

CHƯƠNG II:

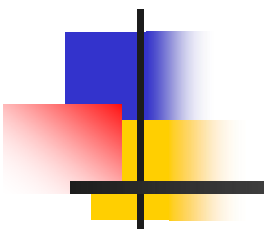
MA TRẬN-ĐỊNH THỨC -HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

I. MA TRẬN

II. ĐỊNH THỨC

III. HẠNG MA TRẬN-MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH



BÀI 1

$$\begin{bmatrix} \Omega & \alpha & \Phi \\ \varphi & \infty & \beta \\ N & \approx & \delta \end{bmatrix}$$

MA TRẬN

§1: Ma Trận

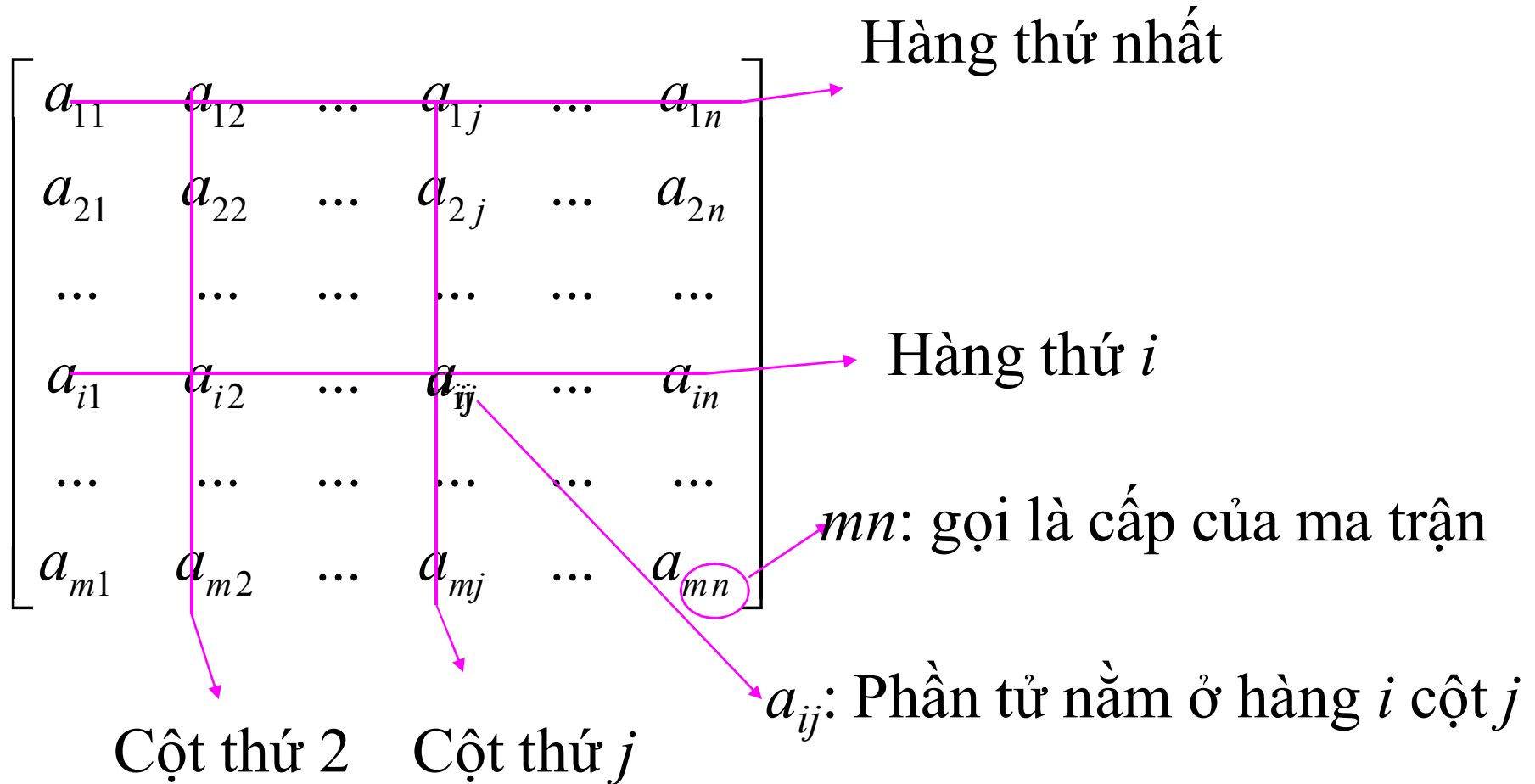
1.1 Các khái niệm

a) **Định nghĩa:** Ma trận là một bảng gồm $m.n$ số thực (phức) được viết thành m hàng và n cột như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ký hiệu: $A = [a_{ij}]_{mn}$

§1: Ma Trận



§1: Ma Trận

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -3 & 1.5 & 5 \end{bmatrix}_{23}$$

a_{21}

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}_{33}$$

đường chéo chính

§1: Ma Trận

b) Các ma trận đặc biệt.

1. *Ma trận không*: $a_{ij} = 0, \forall i, j.$

(tất cả các phần tử đều = 0)

Ví dụ:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

2. *Ma trận vuông*: $m = n$. (số hàng = số cột)

Đ/n: *Ma trận vuông n hàng, n cột được gọi là ma trận vuông cấp n .*

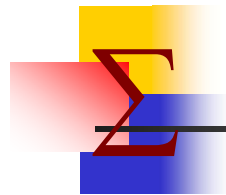
Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix};$$

Ma trận vuông cấp 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ma trận vuông cấp 3



§1: Ma Trận

Cho ma trận vuông cấp n $A=[a_{ij}]$. Các phần tử a_{ii} gọi là các phần tử chéo. Đường thẳng qua các phần tử chéo gọi là đường chéo chính.

Ví dụ:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

đường chéo chính

§1: Ma Trận

3. *Ma trận chéo*: là ma trận vuông có:

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j.$$

(các phần tử ngoài đường chéo chính = 0)

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

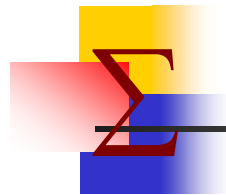
4. *Ma trận đơn vị*: là ma trận chéo có:

$$a_{ii} = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Ký hiệu: E, E_n (hoặc I, I_n).

Ví dụ:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$



§1: Ma Trận

5. *Ma trận tam giác*: là ma trận vuông có

$$a_{ij} = 0, \forall i > j. \quad (\text{tam giác trên})$$

$$a_{ij} = 0, \forall i < j. \quad (\text{tam giác dưới})$$

Ví dụ:

1	2	5	4
0	3	-1	0
0	0	2	6
0	0	0	9

MT tam giác trên

2	0	0	0
7	1	0	0
0	8	2	0
2	9	1	5

MT tam giác dưới

§1: Ma Trận

6. Ma trận cột: là ma trận có $n=1$.

Ma trận cột có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} := [a_i]_m$$

7. Ma trận hàng: là ma trận có $m=1$.

Ma trận hàng có dạng: $[a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$



§1: Ma Trận

8. *Ma trận chuyển vị*: cho ma trận $A = [a_{ij}]_{mn}$, ma trận chuyển vị của ma trận A ký hiệu: A^T và xác định $A^T = [b_{ij}]_{nm}$ với $b_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j .

(chuyển hàng thành cột, cột thành hàng)

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

NX: $(A^T)^T = A$

§1: Ma Trận

1.2. Ma trận bằng nhau:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

VD

$$\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 9 & b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & y \\ x & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ x = 9 \\ y = -2 \end{cases}$$

Chú ý: Chỉ xét 2 ma trận bằng nhau nếu chúng cùng cỡ.

§1: Ma Trận

1.3. Các phép toán trên ma trận:

a. Phép cộng hai ma trận: (cùng cỡ)

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{mn} + \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{mn} = \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}_{mn}$$

(cộng theo từng vị trí tương ứng)

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$



§1: Ma Trận

Bài tập: Tính

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 11 & 8 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



§1: Ma Trận

Các tính chất: Giả sử A, B, C, θ là các ma trận cùng cấp, khi đó:

i) $A + B = B + A$

ii) $A + \theta = A$

iii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

§1: Ma Trận

1.3. Các phép toán trên ma trận:

b. Phép nhân một số với một ma trận:

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{mn} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{ij} \end{bmatrix}_{mn}, \lambda \in \mathbb{R}$$

(các phần tử của ma trận đều được nhân cho λ)

Ví dụ:

$$2 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 14 & 8 & 10 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Đại Số Tuyến Tính



§1: Ma Trận

Bài tập: Tính

$$3 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 0 \\ 15 & -3 \end{bmatrix}$$



§1: Ma Trận

Các tính chất: $\forall \alpha, \beta \in R, \forall A, B$ là hai ma trận cùng cấp, khi đó

$$i) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$ii) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$iii) \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

$$iv) 1A = A$$

§1: Ma Trận

- **Chú ý:** $A - B = A + (-1)B$
- **Nhận xét:** trừ 2 ma trận là trừ theo vị trí tương ứng

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Bài tập: Tính

$$2 + (-2) \cdot 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

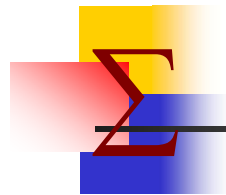
§1: Ma Trận

1.3 Các phép toán trên ma trận:

c. Phép nhân hai ma trận: Cho hai ma trận $A_{mp}; B_{pn}$,
 Khi đó ma trận $A_{mp}B_{pn} = [c_{ij}]_{mn}$ gọi là tích của
 hai ma trận A, B . Trong đó:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}, \forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Như vậy c_{ij} = hàng thứ i của ma trận A nhân tương ứng với cột thứ j của ma trận B rồi cộng lại.



§1: Ma Trận

Ví dụ: Nhân hai ma trận sau:

5

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

số cột của $A =$ số hàng của B

Chú ý: hàng 1 nhân cột 2 viết vào vị trí C_{12}

§1: Ma Trận

Ví dụ: Nhân hai ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{33} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{32} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ & \\ -4 & \end{bmatrix}_{32}$$

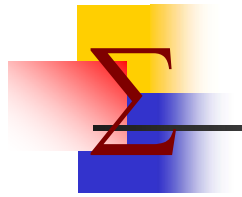
Đại Số Tuyến Tính

§1: Ma Trận

Ví dụ: Tính

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 \\ 10 & 16 & 3 \end{bmatrix}$$

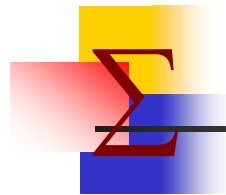
The calculation shows the product of a 2x3 matrix and a 3x2 matrix. The result is a 2x3 matrix. The elements 16, 2, 3, 10, 16, 3, 23, and 33 are circled in pink. A pink line connects the first row of the first matrix to the first row of the result matrix. A pink line connects the first column of the second matrix to the first column of the result matrix. The labels "Hàng 1" and "Cột 1" are placed above the first row and first column of the second matrix, respectively.



§1: Ma Trận

- **Bài tập:** Tính

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$



§1: Ma Trận

■ Chú ý:

- Muốn nhân A với B thì số cột của A = số hàng của B.
- Do đó, việc tồn tại AB không suy ra được việc tồn tại BA.
- Nói chung $AB \neq BA$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -1 \\ 23 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$



§1: Ma Trận

Các tính chất: Ta giả sử các ma trận có cấp phù hợp để tồn tại ma trận tích

$$i) A(BC) = (AB)C$$

$$ii) A(B + C) = AB + AC$$

$$iii) (A + B)C = AC + BC$$

$$iv) AE = EA = A \quad (\text{E là MT đơn vị})$$

§1: Ma Trận

■ Ví dụ:

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

§1: Ma Trận

*Chú ý:

- Nếu A, B là các ma trận vuông cấp n thì AB và BA tồn tại và cũng là ma trận vuông cấp n .

- Kí hiệu: $A^m = A.A \dots A$ (m ma trận A)

- ***Đa thức của ma trận:***

Cho đa thức $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

và ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$

Khi đó:

$$P_n(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n E_n$$

§1: Ma Trận

- **Bài tập:** Cho $f(x) = x^2 + 3x - 4$

và ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Tính $f(A) = ?$



§1: Ma Trận

$$f(A) = A^2 + 3A - 4I_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 14 & 26 \\ 0 & 14 & 32 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

1.4 Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận:

1. Nhân một số khác không với một hàng (cột) của ma trận. Ký hiệu: $A \xrightarrow{\lambda h_i \ (\lambda c_i)} B$
2. Đổi chỗ hai hàng (cột) của ma trận. Ký hiệu: $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j \ (c_i \leftrightarrow c_j)} B$
3. Cộng vào một hàng (cột) với một hàng (cột) khác đã nhân thêm một số khác không. Ký hiệu: $A \xrightarrow{h_i + \lambda h_j \ (c_i + \lambda c_j)} B$

§1: Ma Trận

- Ví dụ:** Đưa ma trận sau về dạng ma trận hình thang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} h_2 + (-2)h_1 \\ h_3 + 4h_1 \\ h_4 + 1h_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$-5 = -1 + (-2)2$

- Ta làm cho phần dưới đường chéo chính = 0.
- Ta lặp lại như trên cho phần ma trận này

Đại Số Tuyến Tính

§1: Ma Trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} h_2 + (-2)h_1 \\ h_3 + 4h_1 \\ h_4 + 1h_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} h_3 + 9h_2 \\ h_4 + 8h_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4 + (-1)h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

- **Ví dụ:** Đưa ma trận sau về dạng ma trận hình thang:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2h_3 + (-3)h_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2h_3 + 3h_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

- **Bài tập:** Đưa ma trận sau về dạng ma trận hình thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} h_2 - 2h_1 \\ h_3 - 4h_1 \\ h_4 + 3h_1 \end{matrix}]{\hspace{1cm}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} h_3 - 7h_2 \\ h_4 + 6h_2 \end{matrix}]{\hspace{1cm}}$$



§1: Ma Trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -35 \\ 0 & 0 & 14 & 37 \end{bmatrix} \xrightarrow{8h_4 + 14h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -194 \end{bmatrix}$$

Đại Số Tuyến Tính

MỘT SỐ ĐỀ THI

Câu 1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
 Tính $f(A)$. Tìm ma trận X thỏa mãn $(5A^2 - A^3)X = A^t$

(Đề 1- K55)

Câu 2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = x^2 - 8x + 1$
 Tính $f(A)$. Tìm ma trận Y thỏa mãn $Y(8A^2 - A^3) = A^t$

(Đề 2- K55)

Câu 3. (6/2014) Tìm ma trận X thỏa mãn

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$