Bài tập 3. *Cho dãy số $u_0 = 1$, $u_1 = 7$, $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$, $n \geq 2$. Tìm ma trận A thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}, \quad n \geq 2.$$

Tìm lũy thừa A^n, từ đó suy ra công thức của u_n. Tương tự, tìm công thức cho số hạng tổng quát của dãy Fibonacci.

HD. Ta có

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Tính kết hợp của phép nhân ma trận dẫn đến:

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}.$$

Tính lũy thừa ma trận như bài trước để suy ra công thức của u_n.

Lưu ý, theo cách này ta thấy u_n là một tổ hợp tuyến tính của 2^n và 3^n ($2, 3$ là hai giá trị riêng của ma trận A). Nếu biết trước điều này ta có thể giả sử $u_n = x2^n + y3^n$ rồi dùng các giá trị đầu u_0, u_1 để xác định x, y.

Hệ phương trình tuyến tính

Một **hệ phương trình tuyến tính** gồm m phương trình theo n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hệ số trên trường $\mathbb{K}$ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases}$$

trong đó $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$. Hệ được viết dưới dạng ma trận:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Quy tắc Cramer

Gabriel Cramer (1704–1752)

Giả sử $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ trong đó A là ma trận vuông có định thức khác không. Khi đó, hệ có nghiệm duy nhất được cho bởi

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

trong đó A_i là ma trận nhận được từ A bằng cách thay cột i bởi cột $\mathbf{b}$.

CM. Vì $\det(A)$ khác không nên A khả nghịch. Nhân hai vế của $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với nghịch đảo A^{-1} cho ta

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Sử dụng công thức nghịch đảo ma trận $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left[\tilde{a}_{i,j}\right]^t$ ta được công thức nghiệm cần tìm.

Bài tập 4. *Giải hệ Cramer:*

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 5 \\ 3x + 5y + 6z &= 7 \\ 2x + 4y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

HD.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}} = -15, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}} = 8, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}} = 2.$$

Phương pháp khử Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng:

- đổi chỗ hai hàng,
- nhân một hàng với một số khác không,
- cộng vào một hàng một bội số của một hàng khác,

để đưa ma trận hệ số mở rộng $[A \mid \mathbf{b}]$ về dạng bậc thang:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
\overline{a}_{11} & * & \dots & * & * & \dots & * & \overline{b}_1 \\
0 & \overline{a}_{22} & \dots & * & * & \dots & * & \overline{b}_2 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \overline{a}_{rr} & * & \dots & * & \overline{b}_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{b}_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{b}_m
\end{array}\right].$$

Trong trường hợp các hệ số $\bar{b}_{r+1}, \cdots, \bar{b}_m$ đều bằng không, giải ngược từ dưới lên trên.

Bài tập 5. *Giải hệ phương trình hệ số thực sau bằng phương pháp khử Gauss:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 25x_4 &= 3. \end{cases}$$

HD. Ta có

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & -4 & -11 & -25 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & -40 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - 10d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Do đó, hệ đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 0. \end{cases}$$

Từ đây, ta suy ra được công thức nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 1 + a + 3b \\ x_2 = -2a - 4b \\ x_3 = a \\ x_4 = b \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Ta có thể viết nghiệm dưới dạng

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

để thấy các nghiệm tạo thành một không gian affine hai chiều.

Chéo hóa ma trận vuông

Ma trận A vuông cấp n được gọi là chéo hóa được nếu có ma trận C vuông cấp n khả nghịch sao cho

$$C^{-1}AC$$

là ma trận chéo $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Giả sử các cột của C là các véc tơ cột $c_1, \cdots, c_n$. Điều kiện khả nghịch của C tương đương với tính chất độc lập tuyến tính của các cột này.

Ta có $C^{-1}AC = D$ tương đương với $AC = CD$ và đẳng thức này chính là dạng ma trận của các đẳng thức:

$$Ac_i = \lambda_i c_i, \qquad 1 \le i \le n.$$

Chuyển vế ta được $(A - \lambda_i I)c_i = 0$ và vì cột c_i khác không (do C khả nghịch) nên đẳng thức này chỉ xảy ra khi chỉ khi $\det(A - \lambda_i I) = 0$.

Ta gọi λ_i là một giá trị riêng (eigenvalue) của A và c_i là một véc tơ riêng (eigenvector) tương ứng với giá trị riêng λ_i. Như thế A chéo hóa được khi chỉ khi ta tìm được một hệ độc lập tuyến tính gồm n véc tơ riêng của A.

Định thức $\det(A - \lambda I)$ là một đa thức bậc n theo λ, được gọi là đa thức đặc trưng (characteristic polynomial) của A, kí hiệu $P_A(\lambda)$.

Bài tập 6. *Chéo hóa (nếu được) ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

HD. Đa thức đặc trưng của A là $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12$. Giải phương trình $P_A(\lambda) = 0$ ta được 3 nghiệm $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

- Với $\lambda_1 = -2$, các vectơ riêng ứng với λ_1 có dạng $a(1, -1, 4)^t$, $a \neq 0$.
- Với $\lambda_2 = 2$, các vectơ riêng ứng với λ_2 có dạng $b(-1, 0, 1)^t$, $b \neq 0$.
- Với $\lambda_3 = 3$, các vectơ riêng ứng với λ_3 có dạng $c(-1, 1, 1)^t$, $c \neq 0$.

Với $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ thì

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bài tập 7. *Tìm lũy thừa bậc n của ma trận A ở trên.*

HD. Theo trên ta có

$$A = C \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} C^{-1},$$

trong đó

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 \\ -11 & -1 & 0 \\ 1/5 & 1 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy nếu $A = CDC^{-1}$ thì

$$A^n = CD^nC^{-1}$$

và nếu $D = \mathrm{diag}(a, b, c)$ là ma trận chéo thì

$$D^n = \mathrm{diag}(a^n, b^n, c^n).$$

Từ đó ta tính được A^n.

Như thế chéo hóa ma trận A cũng cho ta một cách để tính lũy thừa của A.

Bài tập 8. *Chứng minh đa thức đặc trưng của ma trận:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

là đa thức $(-1)^k(a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k)$*. [Ma trận* A *được gọi là ma trận đồng hành (companion matrix) của đa thức* $a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k$*.]*

HD. Ta cần tính $\det(A - \lambda I)$, tức là định thức của ma trận sau

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{k-1} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Nhắc lại nếu các véc tơ cột của một ma trận C là $c_1, \ldots, c_n$ thì định thức

$$\det(C) = \det(c_1, \ldots, c_n)$$

là một hàm được xác định bởi ba tính chất:
- **đa tuyến tính** (tuyến tính theo mỗi c_i),
- **thay phiên** (alternating, hai cột bằng nhau thì $\det = 0$),
- **chuẩn hóa** ($\det(I) = 1$).

Các tính chất đặc trưng này dẫn đến các tính chất sau của định thức:
- đổi chỗ hai cột thì định thức đổi dấu,
- có hai cột tỉ lệ nhau thì định thức bằng không,
- cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính của các cột khác thì định thức không đổi.

Có thể thay **cột** bởi **hàng** trong các tính chất trên.

Như thế thay vì dùng khai triển Laplace ta có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng hoặc cột để đưa ma trận về dạng đơn giản rồi tính định thức (chẳng hạn ma trận tam giác trên hay tam giác dưới thì định thức bằng tích các phần tử trên đường chéo).

Quay lại với định thức của ma trận

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{k-1}-\lambda \end{bmatrix}.$$

Nếu không có số hạng $-\lambda$ ở hàng đầu thì khỏe, khi đó định thức dễ dàng được tính bằng cách khai triển Laplace theo hàng thứ nhất.

Ta loại bỏ số hạng này bằng cách cộng λ hàng hai vào hàng một, khi đó hàng một trở thành $(0, -\lambda^2, 0 \cdots, 0, -a_0 - a_1\lambda)$ và định thức không đổi.

Để loại bỏ $-\lambda^2$ trong hàng này, ta cộng λ^2 hàng ba vào hàng một, khi đó hàng một trở thành $(0, 0, -\lambda^3, 0, \cdots, 0, -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2)$, các hàng khác giữ nguyên, và định thức không thay đổi. Tiếp tục cho đến khi hàng một có dạng

$$(0, 0, \cdots, 0, 0, -a_0 - a_1\lambda - a_{k-2}\lambda^{k-2} - (a_{k-1} + \lambda)\lambda^{k-1}).$$

Khai triển định thức theo hàng một ta được điều phải chứng minh.