

### BÀI 4: HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

#### 1. Định nghĩa hàm số mũ

1. **Định nghĩa:** Cho số dương  $a$  khác 1. Hàm số  $y = a^x$  được gọi là **hàm số mũ** cơ số  $a$ .

VD1: Các hàm số sau đây là hàm số mũ không? a)  $y = 2^x$  b)  $y = (1,025)^x$  c)  $y = e^x$

VD2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số mũ ? với cơ số bao nhiêu ? Vì sao ?

a)  $y = (\sqrt{3})^x$  b)  $y = 5^{\frac{x}{3}}$  c)  $y = x^{-4}$  d)  $y = 4^{-x}$  e)  $y = (-\pi)^x$

VD3: Hãy cho một hàm số là hàm số mũ và một hàm số không phải là hàm số mũ?

#### Hướng dẫn giải:

VD1: Các hàm số sau đây là hàm số mũ a)  $y = 2^x$  b)  $y = (1,025)^x$  c)  $y = e^x$

VD2: Nhận biết được hàm số mũ: a), b), d) với cơ số  $\sqrt{3}, 5, 4$ .

VD3: Một hàm số là hàm số mũ  $y = (\sqrt{5})^x$  và một hàm số không phải là hàm số mũ  $y = x^{-5}$

#### 2. Đạo hàm của hàm số mũ

Ta thừa nhận công thức  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$  (1)

**Bài toán 1.** Giả sử  $\Delta x$  là số gia của  $x$ , ta có :  $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1)$

Do đó:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$  mà  $\lim_{x \rightarrow \Delta x} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$  Nên  $y' = \lim_{x \rightarrow \Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x$

#### Suy ra nội dung định lý 1

a) **Định lý 1.** Hàm số  $y = e^x$  có đạo hàm tại mọi  $x$  và  $(e^x)' = e^x$

**Chú ý 1:**  $(e^u)' = u' e^u$

**VD 1:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = e^{2x+1}$  là

$$y' = (e^{2x+1})' = (2x+1)' e^{2x+1} = 2e^{2x+1}$$

**VD 2:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = 2^x, y = 3^{x^2+x}$

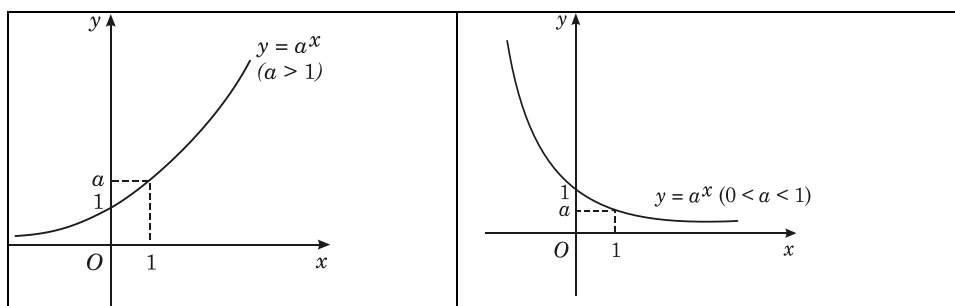
Đạo hàm của  $y = 2^x$  là  $y' = 2^x \cdot \ln 2$ ,

Đạo hàm của  $y = 3^{x^2+x}$  là  $y' = (3^{x^2+x})' = (x^2+x)' 3^{x^2+x} \cdot \ln 3 = (2x+1) 3^{x^2+x} \cdot \ln 3$

#### 3: Khảo sát hàm số mũ

**Dạng đồ thị và tính chất của hàm số mũ  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )**

Đồ thị :



**Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số mũ  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )**

Tập xác định	$(-\infty; +\infty)$
Đạo hàm	$y' = (a^x)' = a^x \ln a$
Chiều biến thiên	$a > 1$ : hàm số luôn đồng biến. $0 < a < 1$ : hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	Trục Ox là tiệm cận ngang.
Đồ thị	Đi qua điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$ , nằm phía trên trục hoành. $(y = a^x > 0, \forall x. \in \mathbf{R}.$

**4: Định nghĩa hàm số logarit**

**1. Định nghĩa:**

Cho số thực dương  $a$  khác 1. Hàm số  $y = \log_a x$  được gọi là hàm số logarit cơ số  $a$ .

VD 1: Các hàm số  $\log_2 x, \log_{\sqrt[3]{4}} x, \log x, \ln x$  là các hàm số logarit.

VD2: Tìm tập xác định các hàm số

a)  $y = \log_2(x - 1)$

b)  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x)$

**5: Đạo hàm của hàm số logarit**

**Định lý 3 :** Hàm số  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) có đạo hàm tại mọi

$x > 0$  và:  $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Đặc biệt  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Đối với hàm số hợp, ta có :  $y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

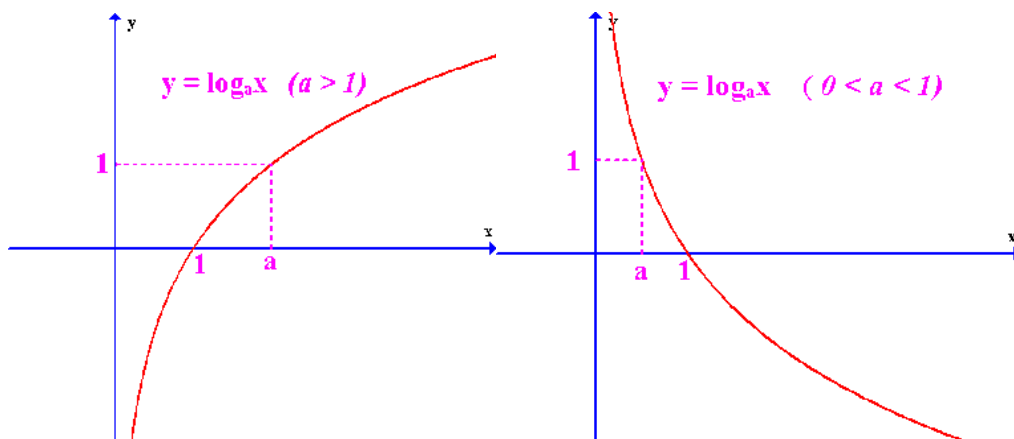
**Ví dụ 1:** Tìm đạo hàm của hàm số:  $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

$$y' = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})'}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

### 6: Khảo sát hàm số logarit

Dạng đồ thị và tính chất của hàm số logarit  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

Đồ thị :



Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số logarit  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

Tập xác định	$(0; +\infty)$
Đạo hàm	$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
Chiều biến thiên	$a > 1$ : hàm số luôn đồng biến. $0 < a < 1$ : hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	Trục Oy là tiệm cận đứng.
Đồ thị	Đi qua điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$ , nằm phía bên phải trục tung.

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

1) Hàm số nào d-ới đây ng biến trên tập xác định của nó?

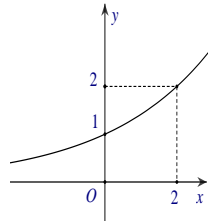
A.  $y = \left(\frac{4}{e}\right)^x$     B.  $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$     C.  $y = 2^{-x} \left(\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\right)^x$     D.  $y = (\sqrt{11}-\sqrt{10})^x \cdot (\sqrt{11}+\sqrt{10})^x$

Câu 2) Số nào d-ới đây nhỏ hơn 1?    A.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$     B.  $(\sqrt{3})^c$     C.  $\pi^c$     D.  $e^\pi$

3) Cho hàm số  $y = (\sqrt{2}-1)^x$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

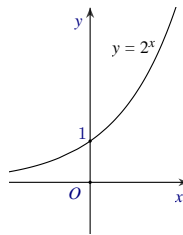
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$
- C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là trục tung.
- D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là trục hoành.

4) Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



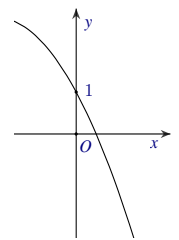
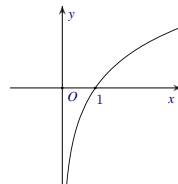
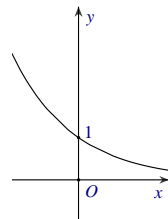
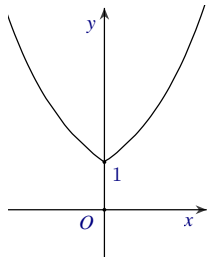
- A.  $y = (\sqrt{2})^x$     B.  $y = x$     C.  $y = 2^x$     D.  $y = (\sqrt{2})^{-x}$

5) hàm số  $y = 2^x$  có đồ thị là hình bên.

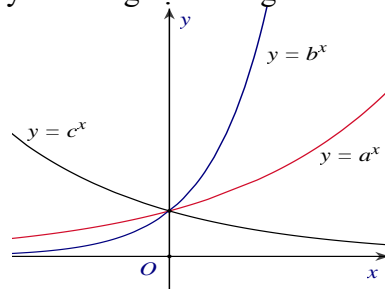


Khi đó, hàm số  $y = 2^{|x|}$  có đồ thị là hình nào trong bốn hình được liệt kê ở bốn A, B, C, D dưới đây ?

- A. Hình 1    B. Hình 2    C. Hình 3    D. Hình 4

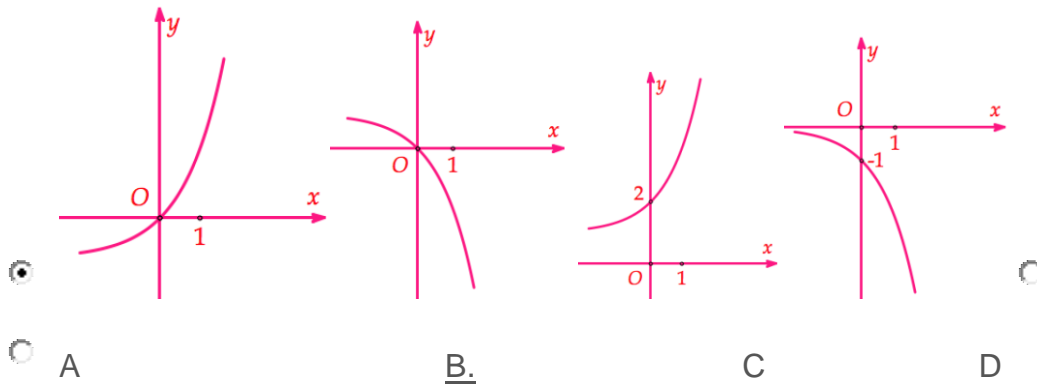


6) Hình bên là đồ thị của ba hàm số  $y = a^x$ ,  $y = b^x$ ,  $y = c^x$  ( $0 < a, b, c \neq 1$ ) được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



- A.  $b > a > c$     B.  $a > b > c$     C.  $a > c > b$     D.  $c > b > a$

7) Cho hàm số  $f(x) = x - e^x$ . Hỏi đồ thị của hàm số  $f'(x)$  là hình nào trong các hình dưới đây ?



8) Tập xác định của hàm số  $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$  là: **A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  **B.**  $(0; +\infty)$  **C.**  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  **D.**  $D = (e; +\infty)$

Câu 9) Hàm số  $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$  có đạo hàm là:

- A.**  $y' = x^2e^x$  **B.**  $y' = -2xe^x$  **C.**  $y' = (2x - 2)e^x$  **D.** Kết quả khác

Câu 10: Cho  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ . Đạo hàm  $f'(1)$  bằng: **A.**  $e^2$  **B.**  $-e$  **C.**  $4e$  **D.**  $6e$

Câu 11: Cho  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Đạo hàm  $f'(0)$  bằng: **A.** 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 12: Cho  $f(x) = e^{\sin 2x}$ . Đạo hàm  $f'(0)$  bằng: **A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 13: Cho  $f(x) = e^{\cos^2 x}$ . Đạo hàm  $f'(0)$  bằng: **A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 14: Cho  $f(x) = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$ . Đạo hàm  $f'(0)$  bằng: **A.** 2 **B.**  $\ln 2$  **C.**  $2\ln 2$  **D.** Kết quả khác

Câu 15: Cho  $f(x) = 2^x \cdot 3^x$ . Đạo hàm  $f'(0)$  bằng: **A.**  $\ln 6$  **B.**  $\ln 2$  **C.**  $\ln 3$  **D.**  $\ln 5$

Câu 16: Cho  $f(x) = x^\pi \cdot \pi^x$ . Đạo hàm  $f'(1)$  bằng: **A.**  $\pi(1 + \ln 2)$  **B.**  $\pi(1 + \ln \pi)$  **C.**  $\pi \ln \pi$  **D.**  $\pi^2 \ln \pi$

Câu 17: Hàm số nào dưới đây thì nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A.**  $y = \log_2 x$  **B.**  $y = \log_{\sqrt{3}} x$  **C.**  $y = \log_{\frac{e}{\pi}} x$  **D.**  $y = \log_\pi x$

Câu 18: Với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ . Phát biểu nào sau đây không đúng?

- A.** Hai hàm số  $y = a^x$  và  $y = \log_a x$  có cùng tập giá trị. **B.** Hai hàm số  $y = a^x$  và  $y = \log_a x$  có cùng tính đơn điệu.

C. Đồ thị hai hàm số  $y = a^x$  và  $y = \log_a x$  đối xứng nhau qua đường thẳng  $y = x$ .

D. Đồ thị hai hàm số  $y = a^x$  và  $y = \log_a x$  đều có đường tiệm cận.

Câu 19 Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

- A. Hàm số  $y = x^\alpha$  có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ . B. Đồ thị hàm số  $y = x^\alpha$  với  $\alpha > 0$  không có tiệm cận.  
C. Hàm số  $y = x^\alpha$  với  $\alpha < 0$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ . D. Đồ thị hàm số  $y = x^\alpha$  với  $\alpha < 0$  có hai tiệm cận.

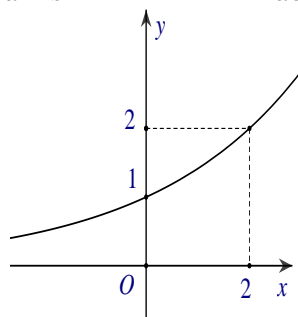
Câu 20: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A. Đồ thị hàm số lôgarit nằm bên phải trục tung. B. Đồ thị hàm số lôgarit nằm bên trái trục tung.  
C. Đồ thị hàm số mũ nằm bên phải trục tung. D. Đồ thị hàm số mũ nằm bên trái trục tung.

Câu 21: Chọn phát biểu **sai** trong các phát biểu sau?

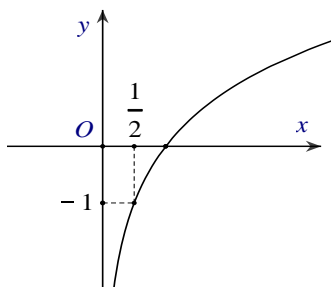
- A. Đồ thị hàm số logarit nằm bên trên trục hoành. B. Đồ thị hàm số mũ không nằm bên dưới trục hoành.  
C. Đồ thị hàm số lôgarit nằm bên phải trục tung. D. Đồ thị hàm số mũ với số mũ âm luôn có hai tiệm cận.

Câu 22: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



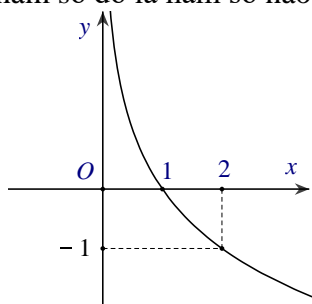
- A.  $y = (\sqrt{2})^x$  B.  $y = x$  C.  $y = 2^x$  D.  $y = (\sqrt{2})^{-x}$

Câu 23 Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



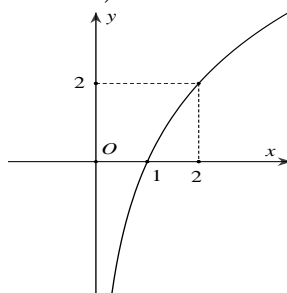
- A.  $y = \log_2 x$  B.  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  C.  $y = \log_{\sqrt{2}} x$  D.  $y = \log_2 (2x)$

Câu 24: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A.  $y = \log_{0,5} x$     B.  $y = \log_2 x$     C.  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$     D.  $y = -3x + 1$

Câu 25: Tìm  $a$  để hàm số  $y = \log_a x$  ( $0 < a \neq 1$ ) có đồ thị là hình bên dưới:



- A.  $a = \sqrt{2}$     B.  $a = 2$     C.  $a = \frac{1}{2}$     D.  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$