Chuyên đề: HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ
Bài 2: HÀM SỐ BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y=ax^2+bx+c$,
trong đó x là biến số, a,b,c là các hằng số và $a\neq 0$.
Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý :

+ Khi $a=0$, $b\neq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y=bx+c$.

+ Khi $a=b=0$, hàm số trở thành hàm hằng $y=c$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

a) Đồ thị hàm số $y=ax^2, a\neq 0$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, có trục đối xứng là trục tung (là đường thẳng $x=0$). Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a>0$, xuống dưới nếu $a<0$.

b) Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c, a\neq 0$ là một parabol có:

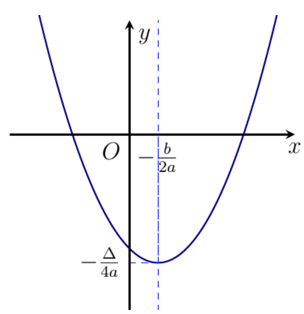
+ Đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

+ Trục đối xứng là đường thẳng $x=-\dfrac{b}{2a}$.

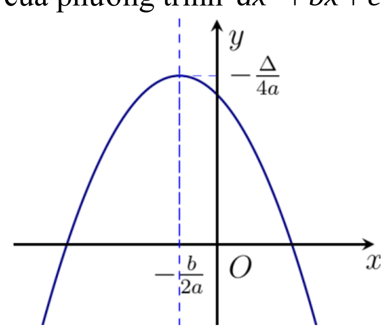
+ Bề lõm hướng lên trên nếu $a>0$, hướng xuống dưới nếu $a<0$.

+ Giao điểm với trục tung là $M(0;c)$.

+ Số giao điểm với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$.



$a>0$



$a<0$

Bảng biến thiên

a>0

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

a<0

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

+ Khi $a>0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ + Khi $a<0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$

và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$

và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$.

Giá trị lớn nhất của hàm số là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Dạng 1-Nhận biếu hàm số bậc hai. Tính giá trị của hàm số bậc hai

Phương pháp : Dùng định nghĩa hàm số bậc hai

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Ví dụ 1: Trong những hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai ?

a) $y=2x+3$. b) $y=10$

c) $y=\frac{3x-1}{2x+1}$. d) $y=4-x^2$

e) $y=2x^2+4x-1$. f) . $y=2\sqrt{x+2}-3$. g) $y=2022x^2$

Lời giải

Những hàm số là hàm số bậc hai

+d) $y=4-x^2$ **,** e) $y=2x^2+4x-1$. g) $y=2022x^2$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=-2x^2+4x-5$.

Tìm giá trị y tương ứng với giá trị x trong bảng sau

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Lời giải

Giá trị y tương ứng với giá trị x trong bảng là

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-35	-21	-11	-5	-3	-5	-11

2. Dạng 2-Xác định tọa độ đỉnh-trục đối xứng của (P)

Phương pháp : Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c, a\neq 0$ là một parabol có:

Cách 1: + Tìm $x=-\frac{b}{2a}$.

+ Thế $x=-\frac{b}{2a}$ vào $y=ax^2+bx+c, a\neq 0$ ta được $y=-\frac{\Delta}{4a}$.

Kết luận Đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. Trục đối xứng là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$.

Cách 2:(Sử dụng cho trắc ngiệm)*Dùng máy tính Casio-Mode-5-3. Bỏ qua hai nghiệm là tọa độ đỉnh parabol.

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Ví dụ 1: Tìm trục đối xứng của đồ thị các hàm số sau :

a) $y=2x^2$ b) $y=x^2-4x$

c) $y=2x^2+4x-1$. d) $y=3-2x^2$.

Lời giải

a) $y=2x^2$. Ta có $a=2,b=0\Rightarrow -\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2.2}=0.$

Vậy trục đối xứng là đường thẳng $x=0$.

b) $y=x^2-4x$. Ta có $a=1,b=-4\Rightarrow -\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2.1}=2$

Vậy trục đối xứng là đường thẳng $x=2$..

c) $y=2x^2+4x-1$. Ta có: $-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2.2}=-1$

Vậy trục đối xứng là đường thẳng $x=-1$..

d) $y=3-2x^2$. Ta có $a=-2,b=0\Rightarrow -\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2.(-2)}=0$

Vậy trục đối xứng là đường thẳng $x=0$.

Ví dụ 2: Tìm tọa độ dỉnh của các Parabol sau:

a) $y=-3x^2$ b) $y=x^2+2x$

c) $y=5-4x-x^2$. d) $y=x^2-1$.

Lời giải

a) $y=-3x^2$

Ta có $a=-3,b=0\Rightarrow -\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2.(-3)}=0.$

Thế $x=0$ vào $y=-3x^2$ ta được $y=-3.0^2=0.$

Vậy tọa độ đỉnh của Parabol là $O(0;0)$.

b) $y=x^2+2x$

Ta có $a=1,b=2\Rightarrow -\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2.1}=-1$

Thế $x=-1$ vào $y=x^2+2x$ ta được $y=(-1)^2+2(-1)=-1$

Vạy tọa độ đỉnh của Parabol là $I(-1;-1)$.

c) $y=5-4x-x^2$.

Ta có $a=-1,b=-4\Rightarrow -\frac{b}{2a}=-\frac{(-4)}{2.(-1)}=-2$

Thế $x=-2$ vào $y=5-4x-x^2$. ta được $y=5-4(-2)-(-2)^2=9.$

Vậy tọa độ đỉnh của Parabol là $I(-2;9)$.

d) $y=x^2-1$.

Ta có $a=1,b=0\Rightarrow -\frac{b}{2a}=0.$

Thế $x=0$ vào $y=x^2-1$. ta được $y=0^2-1=-1.$

Vậy tọa độ đỉnh của Parabol là $I(0;-1)$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM :

Câu 1. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai:

A. $y=2x+3$. **B.** $y=\frac{3x-1}{2x+1}$. **C.** $y=2x^2+4x-1$. **D.** $y=2\sqrt{x+2}-3$.

Câu 2. Cho hàm số $y=4x^2-3x+1$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số:

A. $N(1;2)$ **B.** $Q(0;-1)$ **C.** $P(-2;10)$ **D.** $M(2;1)$

Câu 3. Cho hàm số $y=2x^2+6x+3$ có đồ thị (*P*). Trục đối xứng của (*P*) là

A. $x=-\dfrac{3}{2}$ **B.** $y=-\dfrac{3}{2}$ C. $x=-3$ **D.** $x=3$

Câu 4. Cho hàm số $y=x^2+4x$ có đồ thị (*P*). Hoành độ đỉnh của (*P*) là

A. $x=0.$ **B.** $y=0.$ C. $x=-2.$ **D.** $y=-2.$

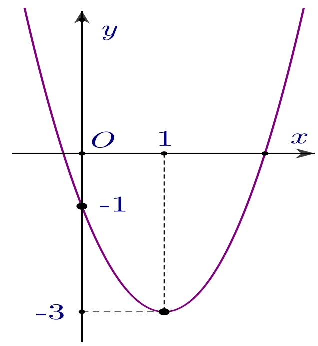
Câu 5. Cho hàm số $y=x^2-2$ có đồ thị (*P*). Tọa độ đỉnh của (*P*) là

A. $(0;-2)$ **B.** $(1;-1)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(2;2)$

Câu 6. Tung độ đỉnh của đồ thị hàm số $y=-2x^2+2x-2$ là

A. $x=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $x=-\dfrac{3}{2}.$ C. $y=-\dfrac{3}{2}.$ **D.** $y=\dfrac{1}{2}.$

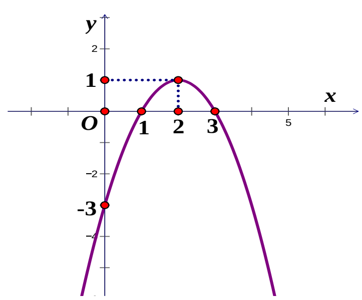
Câu 7. Cho Parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ có đồ thị hình vẽ bên .Tìm trục đối xứng của (P).



A. $x=1.$ **B.** $y=1.$ **C.** $y=3.$ **D.** $x=3.$

Câu 8.

Cho Parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ có đồ thị hình bên . Tìm tọa độ đỉnh của (P).



A. $(3;0)$.. **B.** $(1;0)$.. **C.** $(2;1)$.. **D.** $(0;-3)$..

Câu 9. Cho Parabol $(P): y=x^2-4x+3$. Tọa độ đỉnh của Parabol là

A. $I(-2;15)$. **B.** $I(2;-1)$. **C.** $I(4;3)$. **D.** $I(-4;35)$.

Câu 10. Đồ thị hàm số bậc hai nào dưới đây có tọa độ đỉnh $I(2;-5)$.

A. $y=-x^2+4x-9$ · **B.** $y=x^2-4x-1$. **C.** $y=x^2+4x-17$. **D.** $y=x^2-2x-5$ ·

Câu 11. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ có đồ thị (P). Khi đó, tọa độ đỉnh của (P) là:

A. $I\left(-\dfrac{b}{a};-\dfrac{\Delta}{a}\right)$ **B.** $I\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ **C.** $I\left(\dfrac{b}{2a};\dfrac{\Delta}{2a}\right)$ **D.** $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Câu 12. Parabol $y=3x^2-2x+1$ có đỉnh là

A. $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$. **C.** $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Câu 13. Tọa độ đỉnh I của parabol (P): $y=x^2-4x$ là

A. $I(2;-4)$. **B.** $I(-2;-4)$. **C.** $I(2;4)$. **D.** $I(-1;-4)$.

Câu 14: Parabol $y=x^2-4x+3$ có trục đối xứng là

A. $x=3$ B. $x=2$ C. $x=4$ D. $x=-2$

Câu 15: Trục đối xứng của parabol $y=-x^2+5x+3$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=\frac{5}{4}$. **B.** $x=-\frac{5}{2}$. **C.** $x=-\frac{5}{4}$. **D.** $x=\frac{5}{2}$.

Câu 16: Tìm parabol $(P): y=ax^2+3x-2$, biết rằng parabol có trục đối xứng $x=-3$.

A. $y=x^2+3x-2$. **B.** $y=\frac{1}{2}x^2+x-2$. **C.** $y=\frac{1}{2}x^2-3x-2$. **D.** $y=\frac{1}{2}x^2+3x-2$.

Lời giải

Chọn D.

Trục đối xứng của (P) có dạng:

$$x=-\frac{b}{2a}=-3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2a}=-3 \Leftrightarrow -3=-6a \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Vậy (P) có phương trình: $y=\frac{1}{2}x^2+3x-2$.

Câu 17: Tìm m để Parabol $(P): y=mx^2-2x+3$ có trục đối xứng đi qua điểm $A(2;3)$.

A. $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Với $m=0$ ta có phương trình $y=-2x+3$ là phương trình đuờng thẳng nên loại $m=0$.

Với $m\neq 0$. Ta có phương trình của Parabol:

Trục đối xứng: $x=-\frac{-2}{2m} \Leftrightarrow x=\frac{1}{m}$.

Trục đối xứng đi qua điểm $A(2;3)$ nên $2=\frac{1}{m} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Câu 18: Để đồ thị hàm số $y=mx^2-2mx-m^2-1$ $(m\neq 0)$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y=x-2$ thì m nhận giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(2;6)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $y=mx^2-2mx-m^2-1$ $(m\neq 0)$ có đỉnh là $I(1;-m^2-m-1)$.

Để $I(1;-m^2-m-1)$ nằm trên đường thẳng $y=x-2$ thì $-m^2-m-1=-1 \Leftrightarrow m^2+m=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\ (l) \\ m=-1\ (n) \end{array}\right.$. Vậy $m=-1\in(-2;2)$.

Câu 18: Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+2$. Xác định hệ số a, b biết (P) có đỉnh $I(2;-2)$.

A. $a=-1,\ b=4$. **B.** $a=1,\ b=4$. **C.** $a=1,\ b=-4$. **D.** $a=4,\ b=-1$.

Lời giải

Chọn C.

+ Điều kiện: $a\neq 0$.

+ (P) có đỉnh $I(2;-2)$ nên ta có hệ: $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2\\ -2=a.2^2+b.2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+b=0\\ 4a+2b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-4\end{cases}$.

3. Dạng 3– Vẽ đồ thị hàm số bậc hai

- Xác định chiều biến thiên của hàm số bậc hai

Phương pháp :

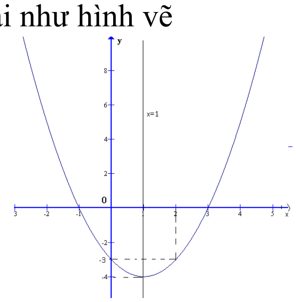
Vẽ đồ thị hàm số** $y=ax^2+bx+c$ ***ta tiến hành các bước

- Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
- Vẽ trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Xác định các giao điểm của parabol với các trục toạ độ(nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên đồ thị.
- Vẽ parabol.(Khi vẽ parabol chú ý hệ số a để quay bề lõm lên trên hay xuống dưới)

*Từ đồ thị suy ra khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

I-BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Ví dụ 1: Cho đồ thị của hàm số bậc hai như hình vẽ



a) Tìm tọa độ đỉnh của đồ thị
b) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số
d) Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số

Lời giải

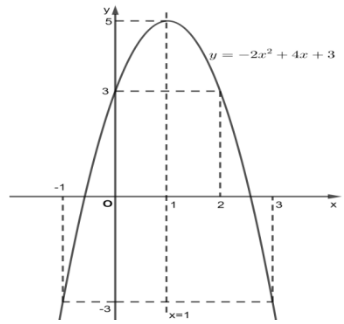
a)Tìm tọa độ đỉnh của đồ thị là $I(1;-4)$

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

c) Giá trị nhỏ nhất cảu hàm số là $y=-4$ khi $x=1$

d) Tập xác định của hàm số là R, tập gái trị là $[-4;+\infty)$

Ví dụ 2: Cho đồ thị của hàm số bậc hai như hình vẽ



a) Tìm tọa độ đỉnh của đồ thị
b) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số
c) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số
d) Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số

Lời giải

a)Tìm tọa độ đỉnh của đồ thị là $I(1;5)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$

c) Giá trị lớn nhất cảu hàm số là $y=5$ khi $x=1$

d) Tập xác định của hàm số là R, tập gái trị là $(-\infty;5]$

Ví dụ 3: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến và tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số số $f\left(x\right)=x^2-4x+5$?

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+5\ \left(a=1>0\right)$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Tọa độ đỉnh của đồ thị $I\left(2;1\right)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;2\right)$, đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y=1$ khi $x=2$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=-x^2+4x+5$. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số.

Lời giải

Hàm số $y=-x^2+4x+5$ có hệ số $a=-1<0$; tọa độ đỉnh của đồ thị hàm số là $I\left(2;9\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	9	↘ $-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;2\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y=9$ khi $x=2$.

Ví dụ 5: a)Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2-2x-3$

b) Từ đồ thị hãy tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$

c) Từ đồ thị, hãy tìm các giá trị x sao cho $y > 0$.

Lời giải

a) Ta có $a = 1 > 0$ nên đồ thị quay bề lõm lên trên

+ Tọa độ đỉnh $I(1;-4)$.

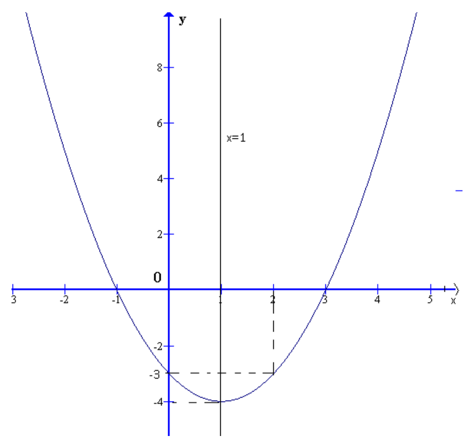
+ Trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.

+ Cho $x = 0 \Rightarrow y = -3$. Giao điểm với trục Oy là $A(0;-3)$.

Cho $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Giao điểm với trục hoành $B(-1;0); C(3;0)$.

Điểm đối xứng với điểm $A(0;-3)$ qua đường thẳng $x = 1$ là $D(2;-3)$.

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên ta được đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$.



b) Từ đồ thị ta suy ra

Hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = -4$ khi $x = 1$.

c) Từ đồ thị ta suy ra các giá trị x sao cho $y > 0$ là $x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = -2x^2 + 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P). Lập bảng biến thiên của hàm số đã cho và vẽ parabol (P).

Lời giải

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $-\dfrac{b}{2a} = 1; -\dfrac{\Delta}{4a} = 5$

Vì $a = -2 < 0$ nên ta có bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 3$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y		5	
	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$, nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

* Vẽ $(P): y = -2x^2 + 4x + 3$.

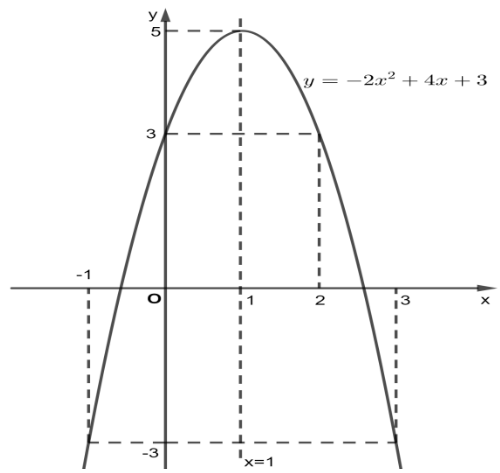
Tọa độ đỉnh $I(1;5)$.

Trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	-3	3	5	3	-3

Đồ thị:



Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị là (P). Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P).Từ đó tìm các giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2 - 2x + 3 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Lời giải

*Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P).

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đồ thị có đỉnh $I(1;2)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.

Bảng biến thiên

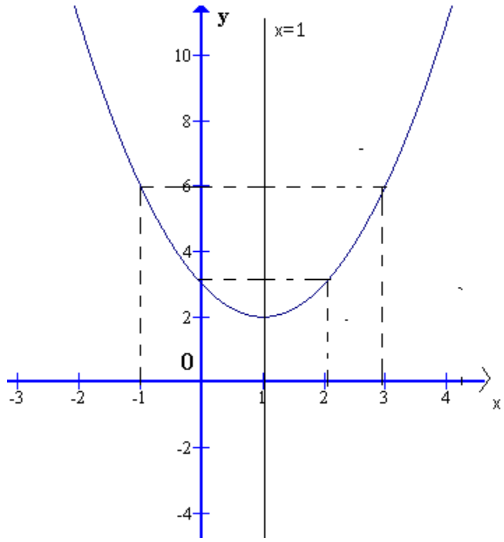
x	$-\infty$ $+\infty$	1
y	$+\infty$ $+\infty$ ↘	2 ↗

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Giao điểm với trục Oy là điểm $(0;3)$. Điểm đối xứng với điểm $(0;3)$ qua đường thẳng $x = 1$ là $(2;3)$.

Một số điểm khác thuộc đồ thị là $(-1;6), (3;6)$

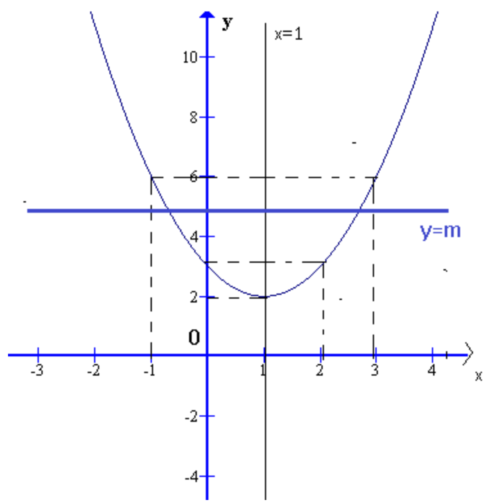
Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên ta được đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ (hình vẽ).



*Tìm các giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2-2x+3-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có $x^2-2x+3-m=0 \Leftrightarrow m=x^2-2x+3$.

Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đường thẳng $y=m$ với $(P): y=x^2-2x+3$.



Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt $(P): y=x^2-2x+3$ tại 2 điểm khi $m>2$.

Vậy phương trình $x^2-2x+3-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt khi $m>2$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=f(x)=3x^2-2x-1$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Từ đồ thị (P) hãy tìm giá trị x sao cho $y \le 0$.

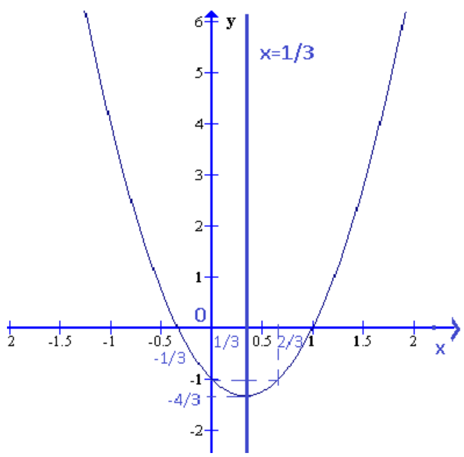
c) Từ đồ thị (P) hãy suy ra đồ thị của hàm số $y=f(|x|)$

d) Tìm m để phương trình $|f(x)|-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P).

- Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{1}{3};\frac{-4}{3}\right)$.
- Trục đối xứng là đường thẳng $x=\frac{1}{3}$.
- Giao điểm với trục tung $A(0;-1)$.
- Giao điểm với trục hoành $B(1;0);C\left(-\frac{1}{3};0\right)$.
- Điểm đối xứng với $A(0;-1)$ qua đường thẳng $x=\frac{1}{3}$ là $A\left(\frac{2}{3};-1\right)$
- Đồ thị hình vẽ.



b) Từ đồ thị (P) hãy tìm giá trị x sao cho $y\le 0$ là $-\frac{1}{3}\le x\le 1$.

c) Từ đồ thị (P) hãy suy ra đồ thị của hàm số $y=f(|x|)$

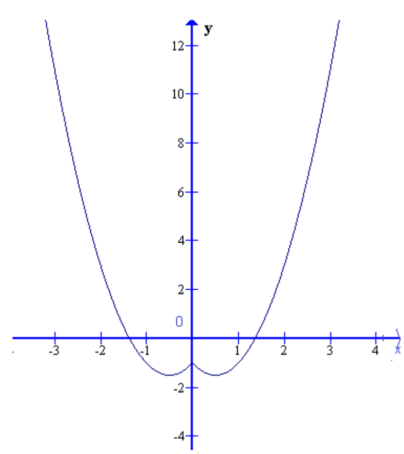
Ta có $y=f(|x|)=f(x)$ nếu $x\ge 0$. Hơn nữa $f(|x|)=f(|-x|)$ nên đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Do đó đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ gồm hai phần

Phần 1: là phần đồ thị (P) phần nằm bên phải trục Oy

Phần 2: đối xứng của phần 1 qua trục Oy .

Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ hình vẽ.



d) Tìm m để phương trình $|f(x)|-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có $|f(x)|-m=0\Leftrightarrow |f(x)|=m$

Số nghiệm của phương trình $\left|f(x)\right|-m=0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ và đường thẳng $y=m.$

*Vẽ đồ thị hàm số (P)

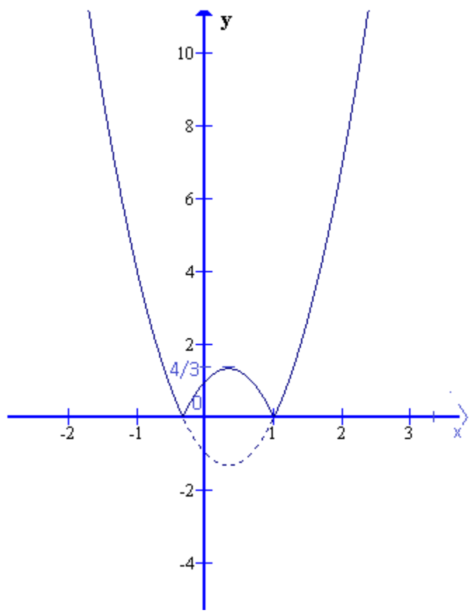
Ta có $y=\left|f(x)\right|=\begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x)<0 \end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ gồm hai phần

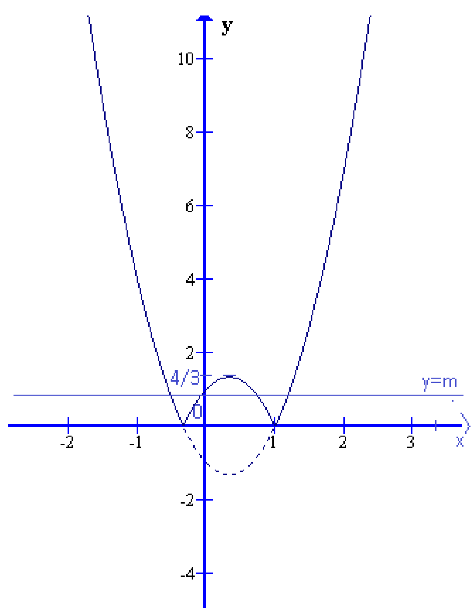
Phần 1: là phần đồ thị (P) phần nằm phía trên trục hoành

Phần 2: đối xứng với phần của (P) nằm dưới trục hoành qua trục hoành.

Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ hình vẽ.

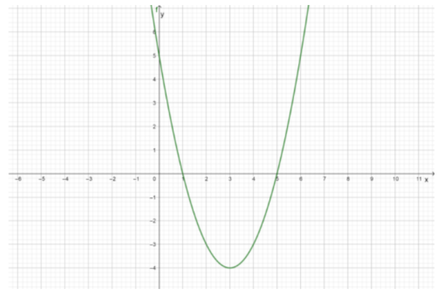


Để phương trình $\left|f(x)\right|-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m.$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ tại 4 điểm phân biệt.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $0 < m < \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có đồ thị (P) như nhình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị, tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $2x^2 - 12x + 6m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương.



Lời giải

Phương trình: $2x^2 - 12x + 6m - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = -3m + \frac{11}{2}$ (1).

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (P) $y = x^2 - 6x + 5$ và đường thẳng $(d)\, y = -3m + \frac{11}{2}$.

Số nghiệm của phương trình (1) chính bằng số giao điểm của (P) và (d).

Dựa vào đồ thị ta thấy, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -4 < -3m + \frac{11}{2} < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < m < \frac{19}{6}$.

Vậy $\frac{1}{6} < m < \frac{19}{6}$.

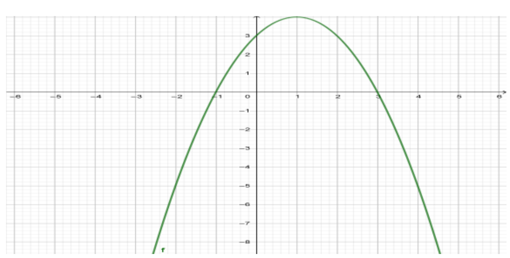
Ví dụ 10: Tìm m để phương trình $\left|-x^2 + 2|x| + 3\right| - 5m + 2 = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

Ta có $\left|-x^2 + 2|x| + 3\right| = 5m - 2$

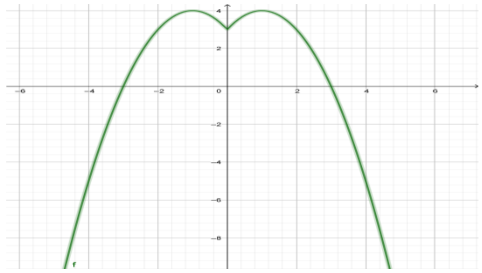
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right|$ và đường thẳng y=5m-2……………………………………………………..

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$,

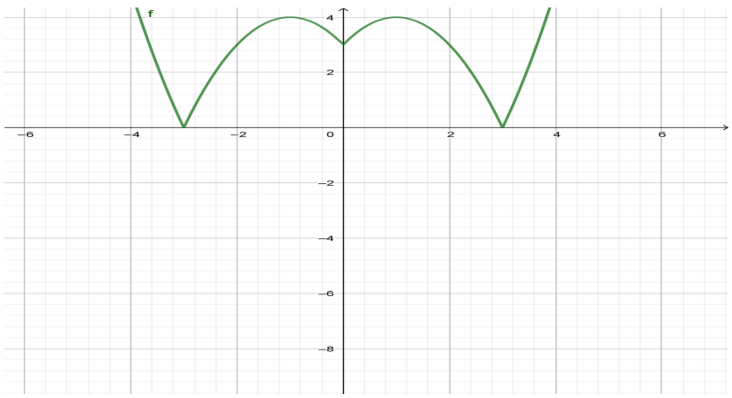


……………………………………….

Suy ra đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2|x| + 3$



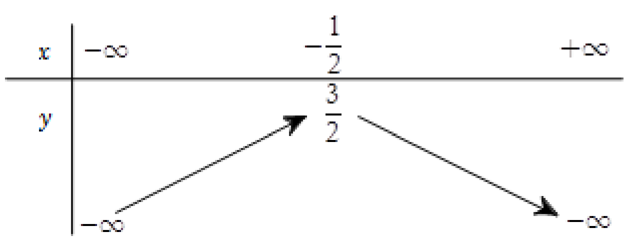
Suy ra đồ thị hàm số $y=\left|-x^2+2|x|+3\right|$



Phương trình có 6 nghiệm khi và chỉ khi $3<5m-2<4 \Leftrightarrow 1<m<\dfrac{6}{5}$

II.BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1 : Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Chọn khẳng định sai.



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ **B.** Hàm số tăng trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

C. Hàm số giảm trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, $a<0$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 2 : Bảng biến thiên nào dưới đây là bảng biến thiên của hàm số $y=x^2-4x+3$?

A. **B.**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	15	$\nearrow$	$+\infty$

C.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	15	$\searrow$	$-\infty$

D.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=x^2-4x+3$ là hàm số bậc hai dạng $y=ax^2+bx+c$ có tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và có hệ số $a=1>0$ nên nó nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 3. Bảng biến thiên của hàm số $y=-2x^2+4x+1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

B.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

C.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

D.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải

Chọn B.

Do hệ số $a=-2<0$ nên parabol có bề lõm hướng xuống và đỉnh có tọa độ $I(1;3)$.

Câu 4. Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y=-x^2+2x+1$:

A.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

B.

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

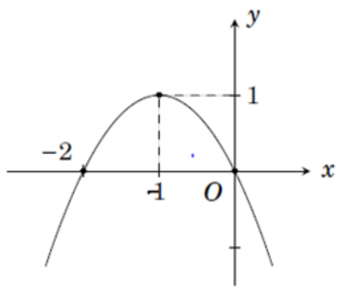
C.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

D.

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 5: Cho đồ thị hàm số như hình vẽ. Khẳng định nào đúng?



A. Hàm số đồng biến $(-\infty;0)$. **B.** Hàm số nghịch biến $(-2;-1)$.

C. Hàm số đồng biến $(-1;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến $(-1;+\infty)$.

Câu 6: Hàm số $y=2x^2+4x-1$. Chọn khẳng định đúng

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $-\dfrac{b}{2a}=-1,\ a=2>0$.

Câu 7: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	5	↘ $-\infty$

Chọn khẳng định đúng

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^2-2x+1$. Chọn câu **sai**.

A. Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x=-1$. **B.** Hàm nghịch biến trên $(0;3)$

C. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;-1)$. **D.** Đồ thị hàm số nhận $I(-1;4)$ làm đỉnh.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $a=-1,\ b=-2,\ c=1$ nên đồ thị có trục đối xứng là $x=-\dfrac{-2}{2.(-1)}=-1$ và tọa độ đỉnh của parabol là $I(-1;2)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=x^2-2x+3$. Chọn câu đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $a=1>0$, $b=-2$, $c=3$ nên hàm số có đỉnh là $I(1;2)$. Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 10: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $(3;4)$?

A. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$. **B.** $y=x^2-7x+2$.
C. $y=-3x+1$. **D.** $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$.

Lời giải

Chọn A.

+ Hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ nên đồng biến trên $(3;4)$. Chọn A

+ Hàm số $y=x^2-7x+2$ đồng biến trên $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. Loại **B.**

+ Hàm số $y=-3x+1$ nghịc biến trên $\mathbb{R}$. Loại **C.**

+ Hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$ đồng biến trên $(-\infty;1)$. Loại **D.**

Câu 11: Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\infty$

A. $y=2x^2+2x-1$. **B.** $y=2x^2+2x+2$. **C.** $y=-2x^2-2x$. **D.** $y=-2x^2-2x+1$.

Lời giải

Chọn D.

- Bảng biến thiên có bề lõm hướng xuống. Loại đáp án A và B.
- Đỉnh của parabol có tọa độ là $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Xét các đáp án còn lại, đáp án D thỏa mãn.

Câu 12: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

A. $y=-x^2+5x+2$. **B.** $y=-\frac{1}{2}x^2+x$.

C. $y = x^2 - 3x + 1$. **D.** $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$.

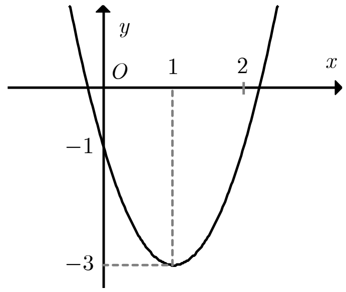
Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị có bề lõm hướng xuống nên loại C, **D.**

Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$ có tọa độ đỉnh $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 13: Cho hàm số bậc hai có đồ thị như hình bên dưới



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

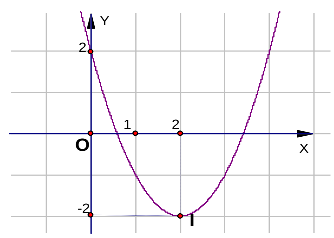
A. $y = x^2 - 4x - 1$. **B.** $y = 2x^2 - 4x - 1$. **C.** $y = -2x^2 - 4x - 1$. **D.** $y = 2x^2 - 4x + 1$.

Lời giải

Chọn B.

- Parabol có bề lõm hướng lên. Loại đáp án C.
- Đỉnh của parabol là điểm $(1;-3)$. Xét các đáp án A, B và D, đáp án B thỏa mãn.

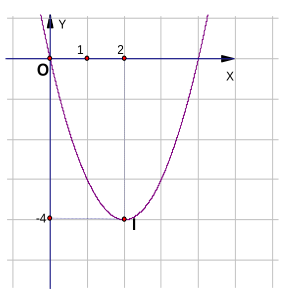
Câu 14. Cho hàm số bậc hai có đồ thị như hình bên dưới



Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^2 + 2x + 2$ **B.** $y = x^2 - 4x + 2$ **C.** $y = -x^2 + 4x + 2$ **D.** $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

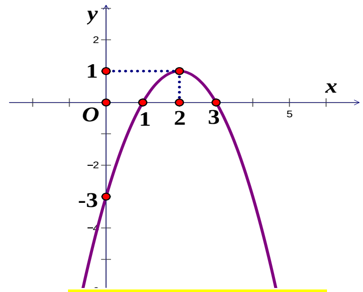
Câu 15. Cho hàm số bậc hai có đồ thị như hình bên dưới



Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^2 + 2x$ **B.** $y = x^2 - 4x$ **C.** $y = -x^2 + 4x - 3$ **D.** $y = x^2 - 4x + 2$

Câu 16. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y=-x^2+2x-3$. **B.** $y=-x^2+4x-3$. **C.** $y=x^2-4x+3$. $y=x^2-2x-3$

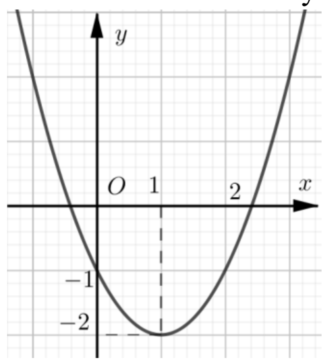
Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị suy ra: $a<0$ và hoành độ đỉnh là 2.

$y=-x^2+4x-3 \Rightarrow a=-1; I\left(2;1\right)$

Câu 17. Đồ thị dưới đây là của hàm số nào sau đây?



A. $y=-x^2-2x+3$. **B.** $y=x^2+2x-2$.

C. $y=2x^2-4x-2$. **D.** $y=x^2-2x-1$.

Lời giải

Chọn D.

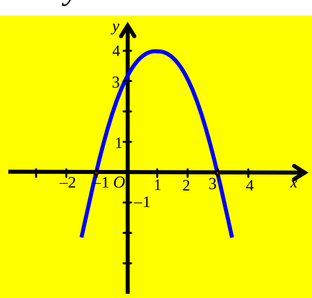
Do parabol có bề lõm quay lên nên $a>0$, từ đó ta loại **A.**

Trục đối xứng của parabol là $x=-\dfrac{b}{2a}=1$ nên ta loại **B.**

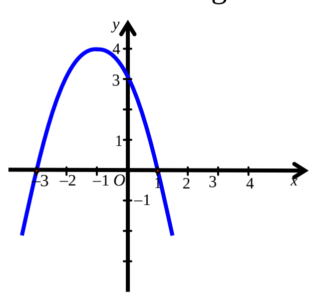
Khi $x=0$ thì $y=-1$ nên loại **C.**

Vậy đồ thị trên là của hàm số $y=x^2-2x-1$.

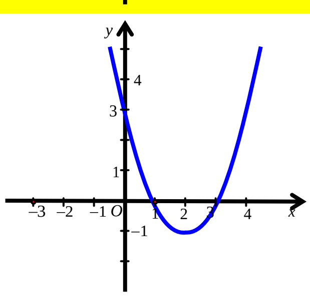
Câu 18: Hàm số $y=-x^2+2x+3$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau?



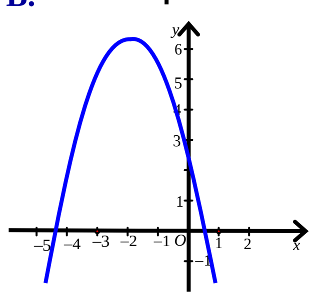
A.



B.



C.



D.

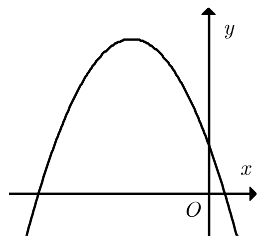
Lời giải:

Chọn A.

Do $a=-1$ nên đồ thị lõm xuống dưới $\Rightarrow$ Loại **C.**

Đồ thị có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\Rightarrow I(1;4)$

Câu 19: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $a>0,\ b<0,\ c>0.$ **B.** $a<0,\ b<0,\ c<0.$

C. $a<0,\ b>0,\ c>0.$ **D.** $a<0,\ b<0,\ c>0.$

Lời giải:

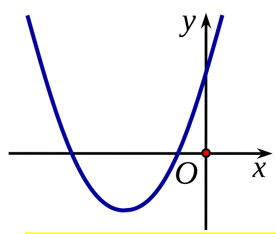
Chọn D.

Bề lõm hướng xuống nên $a<0.$

Hoành độ đỉnh parabol $x=-\frac{b}{2a}<0$ nên $b<0.$

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c>0.$

Câu 20: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh nào sau đây đúng?



A. $a>0,\ b=0,\ c>0$. **B.** $a>0,\ b>0,\ c>0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c>0$. **D.** $a<0,\ b>0,\ c>0$.

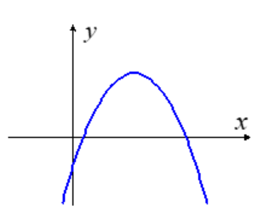
Lời giải

Chọn B.

Đồ thị có bề lõm quay lên trên $\Rightarrow a>0$. Loại đáp án **D.**

Trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}<0\Rightarrow a.b>0\Rightarrow b>0$.

Câu 21: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

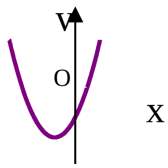


A. $a>0,b>0,\Delta>0$. **B.** $a<0,b>0,\Delta>0$.

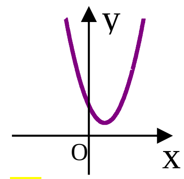
C. $a>0,b>0,\Delta<0$. **D.** $a<0,b<0,\Delta>0$.

Câu 22: Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a < 0, b > 0$ và $c > 0$ thì đồ thị của nó có dạng:

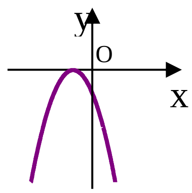
A.



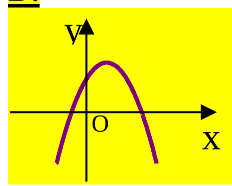
B.



C.



D.



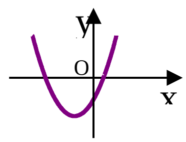
Câu 23: Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như sau thì dấu các hệ số của nó là:

A. $a > 0;\ b > 0;\ c > 0.$

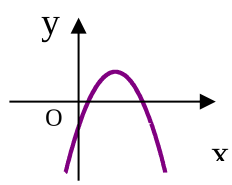
B. $a > 0;\ b > 0;\ c < 0.$

C. $a > 0;\ b < 0;\ c > 0.$

D. $a > 0;\ b < 0;\ c < 0.$



Câu 24: Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như sau thì dấu các hệ số của nó là:



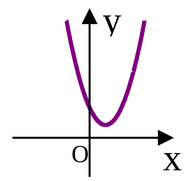
A. $a > 0;\ b > 0;\ c > 0.$

B. $a > 0;\ b > 0;\ c < 0.$

C. $a < 0;\ b > 0;\ c < 0.$

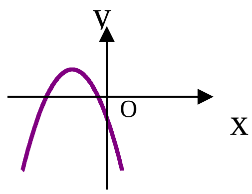
D. $a < 0;\ b < 0;\ c < 0.$

Câu 25: Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như sau thì dấu các hệ số của nó là:



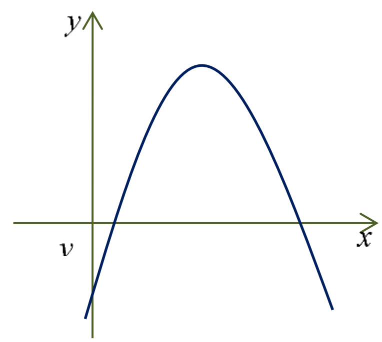
A. $a>0;\ b<0;\ c>0.$ **B.** $a>0;\ b>0;\ c>0.$
C. $a<0;\ b<0;\ c>0.$ **D.** $a>0;\ b<0;\ c<0.$

Câu 26: Nếu hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như sau thì dấu các hệ số của nó là:



A. $a<0;\ b>0;\ c>0.$ **B.** $a>0;\ b>0;\ c<0.$
C. $a<0;\ b>0;\ c<0.$ **D.** $a<0;\ b<0;\ c<0.$

Câu 27. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a<0,\ b>0,\ c>0.$ **B.** $a>0,\ b<0,\ c>0.$
C. $a<0,\ b>0,\ c<0.$ **D.** $a>0,\ b>0,\ c<0.$

Lời giải

Chọn C.

Nhìn vào đồ thị ta có:

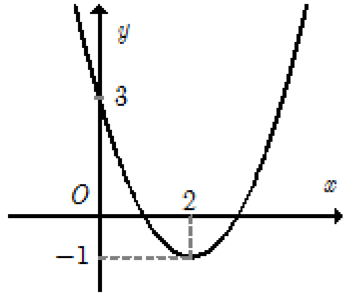
Bề lõm hướng xuống $\Rightarrow a<0$.

Hoành độ đỉnh $x=-\dfrac{b}{2a}>0\Rightarrow \dfrac{b}{2a}<0\Rightarrow b>0$ (do $a<0$).

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c<0$.

Do đó: $a<0,\ b>0,\ c<0$.

Câu 28. Cho hàm số $f\quad x\ =ax^2+bx+c$ đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $f\left(x\right)-1=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

A. $m=2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m>2$. **D.** $-2<m<2$.

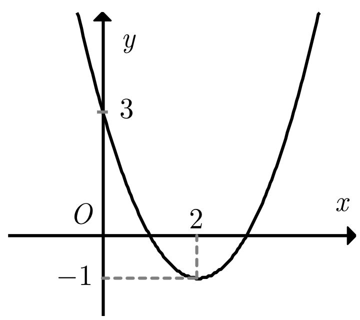
Lời giải

Phương trình $f\left(x\right)-1=m \Leftrightarrow f\left(x\right)=m+1$

Phương trình trên là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=m+1$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

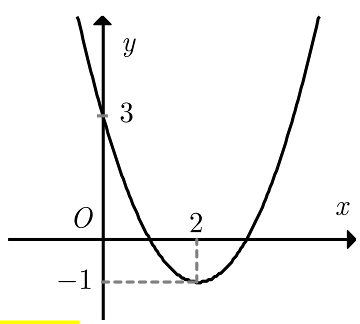
Dựa vào đồ thị, ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m+1>-1 \Leftrightarrow m>-2$.

Câu 29. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $f\left(\left|x\right|\right)-1=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



A. $-2<m<2$. **B.** $m=3$. **C.** $m>3$. **D.** $m=2$.

Câu 30. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $\left|f\left(x\right)\right|-1=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.



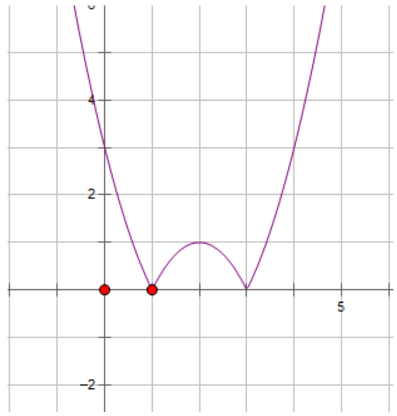
A. $\left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn B.

+ Phương trình $\Leftrightarrow \left|f\left(x\right)\right|=m+1$.

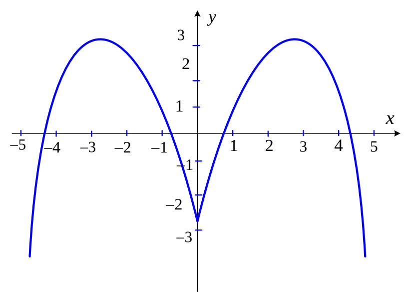
+ Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có dạng:



+ Dựa vào đồ thị, để phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m+1$ có hai nghiệm phân biệt thì:

$\left[\begin{array}{l} m+1>1 \\ m+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Câu 31. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y=x^2-3x-3$. **B.** $y=-x^2+5\left|x\right|-3$. **C.** $y=-x^2-3\left|x\right|-3$. **D.** $y=-x^2+5x-3$.

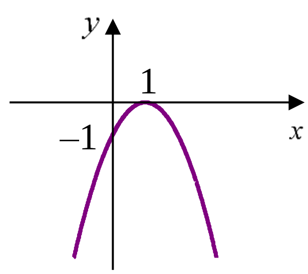
Lời giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta loại A. và D. Phần đồ thị bên phải trục tung là phần đồ thị $\left(P\right)$ của hàm số $y=-x^2+5x-3$ với $x>0$, tọa độ đỉnh của $\left(P\right)$ là $\left(\frac{5}{2};\frac{13}{4}\right)$, trục đối xứng là $x=2,5$.

Phần đồ thị bên trái trục tung là do lấy đối xứng phần đồ thị bên phải của $\left(P\right)$ qua trục tung Oy. Ta được cả hai phần là đồ thị của hàm số $y=-x^2+5\left|x\right|-3$.

Câu 32. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=-\left(x+1\right)^2$. **B.** $y=-\left(x-1\right)^2$. **C.** $y=\left(x+1\right)^2$. **D.** $y=\left(x-1\right)^2$.

Lời giải

Ta có: Đỉnh $I(1;0)$, bề lõm quay xuống, đồ thị hàm đồng biến $(-\infty,1)$ và nghịch biến trên $(1,+\infty)$.

Câu 33. Cho hàm số $y=2x^2-4x+3$ có đồ thị là parabol (P). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. (P) không có giao điểm với trục hoành.

B. (P) có đỉnh là $S(1;1)$.

C. (P) có trục đối xứng là đường thẳng $y=1$.

D. (P) đi qua điểm $M(-1;9)$.

Lời giải

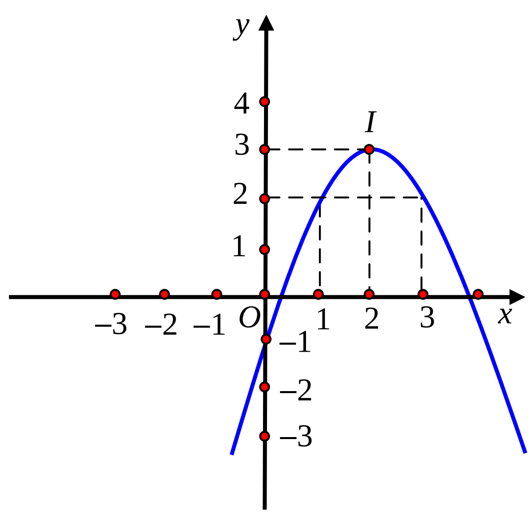
Chọn C.

(P) có đỉnh là $S(1;1)$; trục đối xứng là đường thẳng $x=1$ nên C sai.

và (P) đi qua điểm $M(-1;9)\Rightarrow$ B, D đều đúng.

Xét phương trình $2x^2-4x+3=0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ nên (P) không có giao điểm với trục hoành $\Rightarrow$ A đúng.

Câu 34. $(P): y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $\left|ax^2+bx+c\right|=m$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $-1<m<3$. **B.** $0<m<3$. **C.** $0\le m\le 3$. **D.** $-1\le m\le 3$.

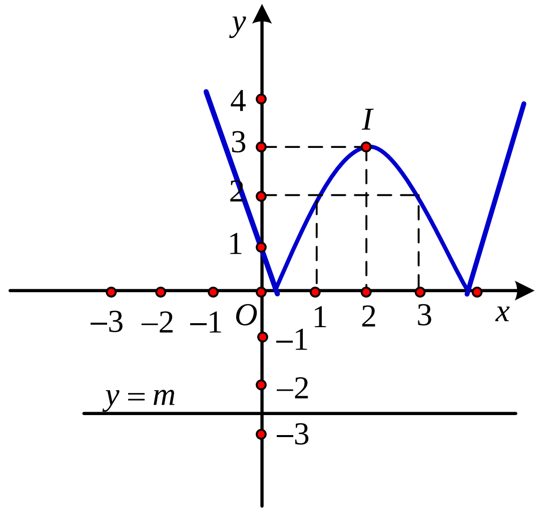
Lời giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta có đỉnh của parabol là $I(2;3)$ nên $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2\\ 3=4a+2b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\ 4a+2b+c=3\end{cases}$.

Mặt khác (P) cắt trục tung tại $(0;-1)$ nên $c=-1$. Suy ra $\begin{cases}b=-4a\\ 4a+2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=4\end{cases}$.

$(P): y=-x^2+4x-1$ suy ra hàm số $y=\left|-x^2+4x-1\right|$ có đồ thị là là phần đồ thị phía trên trục hoành của (P) và phần có được do lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của (P), như hình vẽ sau:



Phương trình $\left|ax^2+bx+c\right|=m$ hay $\left|-x^2+4x-1\right|=m$ có bốn nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số hàm số $y=\left|-x^2+4x-1\right|$ tại bốn điểm phân biệt.

Suy ra $0<m<3$.

Câu 35. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0;2017]$ để phương trình $\left|x^2-4|x|-5\right|-m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

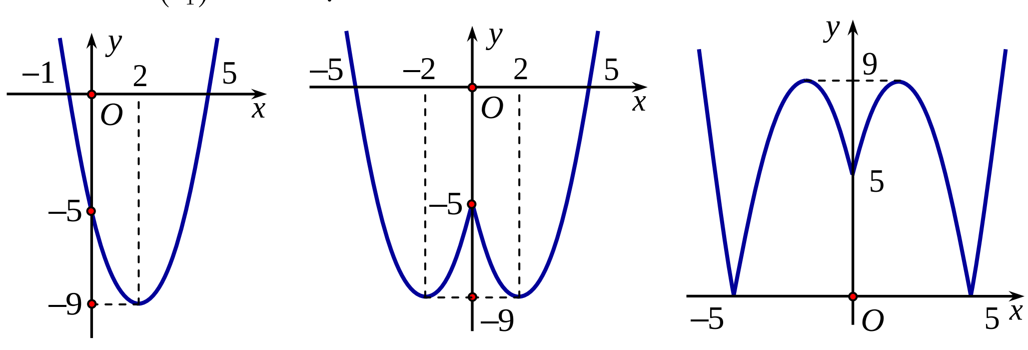
A. 2016. **B.** 2008. **C.** 2009. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn B.

PT: $\left|x^2-4|x|-5\right|-m=0 \Leftrightarrow \left|x^2-4|x|-5\right|=m (1)$. Số nghiệm phương trình $(1) \Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right| (P)$ và đường thẳng $y=m$ (cùng phương Ox).

Xét hàm số $y=x^2-4x-5$ (P_1) có đồ thị như hình 1.



Hình 1. *Hình 2.* *Hình 3.*

Xét hàm số $y=x^2-4|x|-5$ (P_2) là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y=x^2-4|x|-5=x^2-4x-5$ nếu $x\geq 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy.

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy.

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

Xét hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right|(P)$, ta có: $y=\begin{cases} x^2-4|x|-5 & (y\ge 0) \\ -(x^2-4|x|-5) & (y<0) \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox.

Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox.

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $\left|x^2-4|x|-5\right|=m$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>9 \\ m=0 \end{array}\right.$.

Mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(0;2017] \end{cases} \Rightarrow m\in\{10;11;12;...;2017\}$.

4. Dạng 4–Tương giao của (P) và đường thẳng

Phương pháp:

Cho đồ thị (P) của hàm số $y=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$ và đồ thị d của hàm số $y=kx+m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=kx+m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2+bx+c=kx+m \Leftrightarrow ax^2+(b-k)x+c-m=0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).
2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói d và (P) không giao nhau.
3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói d và (P) tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói d là tiếp tuyến của (P).
4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói d và (P) cắt nhau.

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^2-3x+2$ có đồ thị (P).

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) với trục Ox

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) với trục Oy

c) Tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng $y=x-1$.

Lời giải

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) với trục Ox.

Cho $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) với trục Ox là $(1;0)$ và $(2;0)$.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) với trục Oy

Cho $x=0\Rightarrow y=2.$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) với trục Oy là $(0;2)$

c) Tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng $y=x-1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với đường thẳng $y=x-1$ là

$$x^2-3x+2=x-1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\x=3\Rightarrow y=2\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng $y=x-1$ là $(1;0)$ và $(3;2)$.

Ví dụ 2: Biết rằng Parabol $(P): y=x^2-3x+2$ cắt đường thẳng $(d): y=x+5$ tại hai điểm phân biệt. Tính tổng các hoành độ giao điểm đó.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3x+2=x+5\Leftrightarrow x^2-4x-3=0\,(1)$

Do a=1,c=-3,ac=-3<0 nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Tổng các nghiệm là

$S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=4.$

Vậy tổng các hoành độ giao điểm là 4.

Ví dụ 3:Tìm tọa độ giao điểm của Parabol $(P): y=-x^2-4x+1$và đường thẳng $d:\ y=-x+3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$-x^2-4x+1=-x+3\Leftrightarrow x^2+3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right..$$

Với $x=-1\Rightarrow y=4$; $x=-2\Rightarrow y=5$.

Tọa độ giao điểm của (P)và d là $A(-1;4), B(-2;5)$.

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^2+3x+m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2+3x+m$ và trục hoành là

$$x^2+3x+m=0\ \ (1)$$

Để đồ thị hàm số $y=x^2+3x+m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta=3^2-4.m>0\Leftrightarrow 9-4m>0\Leftrightarrow m<\dfrac{9}{4}.$

Vậy $m<\dfrac{9}{4}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Cho Parabol $(P): y=x^2-3x+2$ và đường thẳng $d: y=mx+2$. Tìm m để d tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm khi đó.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với d là

$$x^2-3x+2=mx+2 \Leftrightarrow x^2-(3+m)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m+3 \end{array}\right..$$

Để d tiếp xúc với (P) thì $m=-3$.

Tọa độ tiếp điểm khi đó là $M(0;2)$.

Nhận xét: Từ phương trình (1) ta tính $\Delta'=(m+3)^2$. Để d tiếp xúc với (P) thì (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Ví dụ 6: Cho Parabol (P) $y=x^2-2x+4$ và đường thẳng $d:\ y=2mx-m^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1{}^2+2(m+1)x_2=3m^2+16$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2-2(m+1)x+m^2+4=0$ (1).

+ Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là $x_1; x_2$ thì $\Delta'>0 \Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$.

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1.x_2=m^2+4 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có

$x_1{}^2+2(m+1)x_2=3m^2+16 \Leftrightarrow x_1{}^2+(x_1+x_2)x_2=3m^2+16$

$\Leftrightarrow x_1{}^2+x_2{}^2+x_1x_2=3m^2+16 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-x_1x_2=3m^2+16$

$\Leftrightarrow (2m+2)^2-m^2-4=3m^2+16 \Leftrightarrow m=2$.

So sánh với điều kiện suy ra $m=2$.

Ví dụ 7: Cho Parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y=(m+1)x-m^2-\frac{1}{2}$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ sao cho biểu thức $T=y_1+y_2-x_1x_2-(x_1+x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d

$\frac{1}{2}x^2=(m+1)x-m^2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+2m^2+1=0$ (1)

Để d cắt (P) tại 2 điểm $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm $x_1; x_2$

$\Leftrightarrow \Delta'\ge 0 \Leftrightarrow (m+1)^2-2m^2-1\ge 0 \Leftrightarrow 0\le m\le 2$

Vậy với $0\le m\le 2$ thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1.x_2=2m^2+1 \end{cases}$

Khi đó: $y_1=(m+1)x_1-m^2-\frac{1}{2}$; $y_2=(m+1)x_2-m^2-\frac{1}{2}$.

Ta có: $T=y_1+y_2-x_1x_2-(x_1+x_2)=(m+1)(x_1+x_2)-2m^2-1-x_1x_2-(x_1+x_2)$

$\Rightarrow T = 2(m+1)^2 - 4m^2 - 2 - 2(m+1) = -2m^2 + 2m - 2$.

Bài toán trở thành tìm giá trị của tham số m để hàm số: $T = -2m^2 + 2m - 2$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$.

Ta có bảng biến thiên:

m	0		$\frac{1}{2}$		2
$-2m^2+2m-2$	-2	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	-6

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T = -6$ đạt được khi $m = 2$.

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị của ham số m sao cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ thỏa mãn $OA = 3OB.$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là: $x^2 - 4x + m = 0.$ (*)

(P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$

Gọi x_A, x_B là hai nghiệm của (*). Ta có $OA = 3OB \Rightarrow |x_A| = 3|x_B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 3x_B \\ x_A = -3x_B \end{array}\right.$.

- TH1: $x_A = 3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_B = 1 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A.x_B = 3 < 4.$

- TH2: $x_A = -3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = -3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 6 \\ x_B = -2 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A.x_B = -12 < 4$.

Vậy $m \in \{-12;3\}$.

5. Dạng 5–Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai

Phương pháp:

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol (P_1) và (P_2), khi đó tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}. \qquad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x) = g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2).

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của (P_1) và (P_2) bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).
ii) $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm. iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1 và x_2, ta luôn có $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ và $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Ví dụ 1: Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^2-6x$ cắt đồ thị hàm số $y=-x^2-4$ tại hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Tính y_A+y_B.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y=x^2-5x$ và $y=-x^2-3$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}y=x^2-6x\\y=-x^2-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x=-x^2-4\\y=-x^2-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+2=0\\y=-x^2-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.\\y=-x^2-4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=-5\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=-8\end{cases}\end{array}\right.$.

Không mất tổng quát ta giả sử $A(1;-5)$ và $B(2;-8)$, suy ra $y_A+y_B=-13$.

Ví dụ 2: Biết rằng parabol $y=x^2-x+1$ cắt parabol $y=-x^2+2x+4$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2. Tính giá trị biểu thức $P=x_1^3+x_2^3$.

Lời giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol là
$x^2-x+1=-x^2+2x+4\Leftrightarrow 2x^2-3x-3=0$. (*)

- Theo giả thiết ta có x_1,x_2 là hai nghiệm phân biệt của (*) nên $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{3}{2}\\x_1x_2=-\frac{3}{2}\end{cases}$

- Ta có $P=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]$

$$\Rightarrow P=\frac{3}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(-\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{81}{8}.$$

Vậy $P=\frac{81}{8}$.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y=(m+1)x^2+2x+3m-2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+2mx+4$ tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

Lời giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đề bài cho là
$(m+1)x^2+2x+3m-2=x^2+2mx+4\Leftrightarrow mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$. (1)
- Phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

- Với điều kiện (2), áp dụng định lý Viet cho phương trình (1) và giả thiết cho, ta có

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ \dfrac{(3m-4)(2-m)}{m^2} = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \qquad (3)$$

- Giải phương trình (3) ta được $m = 2$ và $m = \dfrac{2}{3}$ đều thỏa mãn (2), nên đó là hai giá trị cần tìm của tham số m.

Ví dụ 4: Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hai parabol $y = x^2 + mx + (m+1)^2$ và $y = -x^2 - (m+2)x - 2(m+1)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $P = |x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol là

$$x^2 + mx + (m+1)^2 = -x^2 - (m+2)x - 2(m+1) \Leftrightarrow 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(-m-5) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ -m-5 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+1 \leq 0 \\ -m-5 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1.$$

(2)

Với điều kiện (2), áp dụng định lý Viet cho phương trình (1), ta có

$$P = |x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)| \Rightarrow P = \left|\frac{m^2 + 4m + 3}{2} + 3(m+1)\right| = \frac{1}{2}|(m+1)(m+9)| = \frac{1}{2}|m+1||m+9|$$

$$= \frac{1}{2}(-m-1)(m+9) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{(-m-1)+(m+9)}{2}\right]^2 = 8. \quad (3)$$

Dấu "=" ở bất đẳng thức (3) xảy ra khi và chỉ khi $-m-1 = m+9$ hay $m = -5$ thỏa mãn (2).

Vậy $\max P = 8$ đạt được khi $m = -5$ và do đó $m = -5$ chính là giá trị của tham số m cần tìm.

6. Dạng 6–ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

Phương pháp: Cho họ hàm số $f(x;m) = 0$ (m là tham số) có đồ thị (P_m). Để tìm điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $f(x;m) = 0$.

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn m dạng $Am + B = 0$ (hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi m.

Khi đó ta có $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$. Tìm được $x_0\,; y_0 \Rightarrow M\left(x_0\,; y_0\right)$.

Bước 3: Kết luận.

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = (1+m)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 \ \left(P_m\right)$. Chứng tỏ rằng $\left(P_m\right)$ luôn đi qua một điểm cố định, tìm tọa độ điểm cố định đó.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M\left(x_0\,; y_0\right)$ là điểm cố định mà $\left(P_m\right)$ luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = (1+m)x_0^2 - 2(m-1)x_0 + m - 3$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left(x_0^2 - 2x_0 + 1\right)m + x_0^2 + 2x_0 - 3 - y_0 = 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + 2x_0 - 3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$.

Vậy họ $\left(P_m\right)$ luôn đi qua điểm cố định $M(1;0)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = (m-1)x^2 + 2mx - 3m + 1 \ \left(P_m\right)$. Tìm điểm cố định của họ đồ thị hàm số trên.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M\left(x_0\,; y_0\right)$ là điểm cố định mà $\left(P_m\right)$ luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = (m-1)x_0^2 + 2mx_0 - 3m + 1$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left(x_0^2 + 2x_0 - 3\right)m - x_0^2 + 1 - y_0 = 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \\ -x_0^2 + 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{array}\right. \\ y_0 = 1 - x_0{}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -8 \end{cases}$.

Vậy họ $\left(P_m\right)$ luôn đi qua 2 điểm cố định $M_1(1;0)$ và $M_2(-3;-8)$.

Ví dụ 3: Tìm điểm cố định của đồ thị hàm số $\left(P_m\right): y = m^2x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M\left(x_0\,; y_0\right)$ là điểm cố định mà $\left(P_m\right)$ luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = m^2x_0^2 + 2(m-1)x_0 + m^2 - 1$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left(x_0^2 + 1\right)m^2 + 2x_0m - 2x_0 - 1 - y_0 = 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 1 = 0 \\ 2x_0 = 0 \\ -2x_0 - 1 - y_0 = 0 \end{cases}$ (I). Do phương trình $x_0^2 + 1 = 0$ vô nghiệm nên hệ (I) vô nghiệm.

Vậy không có điểm nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^2+(2m-3)x+5-4m$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đồ thị (P_m) của hàm số đã cho và đường thẳng $(d_m): y=2mx-4m+3$ luôn có một điểm chung cố định.

Lời giải

Tập xác định của hai hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0=2mx_0-4m+3$, $\forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (2x_0-4)m+3-y_0=0$, $\forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x_0-4=0\\ 3-y_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=2\\ y_0=3\end{cases} \Rightarrow M(2;3)$.

Thay tọa độ điểm M và phương trình của (P_m) ta được $3=2^2+(2m-3).2+5-4m$

$\Leftrightarrow 3=3$ (đúng với mọi m).

Vậy $M(2;3)$ là điểm chung cố định của (P_m) và (d_m).

Ví dụ 5: Cho các hàm số $(P_m): y=x^2-(m+3)x+4m-7$, $(C_m): y=mx^2-3(m+1)x-4m+9$, $(d_m):(m-1)x+my+4-m=0$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, các đồ thị của các hàm số đã cho luôn cùng đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Tập xác định của hai hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua.

Khi đó $(m-1)x_0+my_0+4-m=0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow (x_0+y_0-1)m+4-x_0=0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0+y_0-1=0\\ 4-x_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=4\\ y_0=-3\end{cases} \Rightarrow M(4;-3)$.

Thay tọa độ điểm M vào phương trình của (P_m) ta được $-3=4^2-(m+3).4+4m-7$

$\Leftrightarrow -3=-3$ (đúng với mọi m).

Thay tọa độ điểm M vào phương trình của (C_m) ta được $-3=m.4^2-3(m+1).4-4m+9$

$\Leftrightarrow -3=-3$ (đúng với mọi m).

Vậy các đồ thị $(P_m);(C_m);(d_m)$ luôn cùng đi qua một điểm cố định $M(4;-3)$.

II-BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho (P): $y=-x^2+4x-3$. Tọa độ giao điểm với trục tung là:

A. $A(0;3)$ **B.** $A(3;0)$ **C.** $A(-3;0)$ **D.** $A(0;-3)$

Câu 2: Tọa độ giao điểm của $(P): y=x^2-x-6$ với trục hoành là:

A. $M(2;0), N(-1;0)$ **B.** $M(-2;0), N(3;0)$

C. $M(-2;0), N(1;0)$ **D.** $M(-3;0), N(1;0)$

Câu 3: Tọa độ giao điểm của $(P): y=x^2-4x$ với đường thẳng $d: y=-x-2$ là:

A. $M(-1;-1), N(-2;0)$ **B.** $M(1;-3), N(2;-4)$

C. $M(0;-2), N(2;-4)$ **D.** $M(-3;1), N(3;-5)$

Câu 4: Biết đường thẳng d tiếp xúc với $(P): y = 2x^2 - 5x + 3$. Phương trình của d là đáp án nào sau đây?

A. $y = x + 2$ **B.** $y = -x - 1$ **C.** $y = x + 3$ **D.** $y = -x + 1$

Lời giải

Giả sử $d: y = ax + b$ $(a \neq 0)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với đường thẳng d là

$2x^2 - 5x + 3 = ax + b \Leftrightarrow 2x^2 - (5 + a)x + 3 - b = 0$ (1)

$\Delta = (5 + a)^2 - 4.2(3 - b) = a^2 + 10a + 8b + 1$

Để d tiếp xúc với (P) thì (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 + 10a + 8b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{a^2 + 10a + 1}{-8}$

Chọn $a = -1$ thì $b = 1$. Vậy $d: y = -x + 1$

Chú ý: Có rất nhiều đường thẳng tiếp xúc với (P), chẳng hạn

Chọn $a = 1$ thì $b = \dfrac{12}{-8} = -\dfrac{3}{2}$. Vậy $d: y = x - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2x - 2y - 3 = 0$

Câu 5: Giao điểm của parabol (P): $y = x^2 + 3x - 1$ với đường thẳng $y = x - 1$ là:

A. $(1;0)$; $(3;2)$. **B.** $(0;-1)$; $(-2;-3)$.

C. $(-1;2)$; $(2;1)$. **D.** $(2;1)$; $(0;-1)$.

Câu 6: Giao điểm của parabol (P): $y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = -x + 2$ là:

A. $(1;0)$; $(3;2)$. **B.** $(0;-1)$; $(-2;-3)$.

C. $(-1;2)$; $(2;1)$. **D.** $(2;0)$; $(0;2)$

Câu 7: Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $y = x^2 - 7x + 12$ là

A. $(-2;6)$ và $(-4;8)$. **B.** $(2;2)$ và $(4;8)$. **C.** $(2;-2)$ và $(4;0)$. **D.** $(2;2)$ và $(4;0)$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 7x + 12 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

Câu 8: Biết rằng Parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ cắt đường thẳng $(d): y = x + 2$ tại hai điểm phân biệt. Tính tổng các hoành độ giao điểm đó.

A. 2. **B.** -2. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$ (1)

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 4.$

Vậy tổng các hoành độ giao điểm là 4.

Câu 9: Gọi $A(a,b)$ và $B(c,d)$ là tọa độ giao điểm của $(P): y = 2x - x^2$ và $\Delta: y = 3x - 6$. Giá trị $b + d$ bằng:

A. 7 **B.** -7 **C.** 15 **D.** -15

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x-x^2=3x-6 \Leftrightarrow -x^2-x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y=0 \\ x=-3 \Rightarrow y=-15 \end{array}\right.$ (1)

$\Rightarrow b+d=-15.$

Câu 10: Gọi $A(a;b)$ và $B(c;d)$ là tọa độ giao điểm của parabol $y=x^2-3x+2$ với đường thẳng $y=x-1$. Khi đó $b+d$ là :

A. 2. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 11: Giao điểm của parabol (P): $y=x^2-3x+2$ với đường thẳng $y=x-1$ là:

A. $(1;0)$; $(3;2)$. **B.** $(0;-1);(-2;-3)$.

C. $(-1;2);(2;1)$. **D.** $(2;1);(0;-1)$.

Câu 12: Tìm m để đường thẳng d : $y=x+3$ cắt parabol $y=x^2+2x+m$ tại 2 điểm phân biệt

A. $m<\frac{13}{4}$. **B.** $m\geq\frac{13}{4}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\geq 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x+3=x^2+2x+m \Leftrightarrow x^2+x+m-3=0$.

Ta có: $\Delta=1-4(m-3)=13-4m$.

Để đường thẳng d cắt parabol tại 2 điểm phân biệt thì: $\Delta>0 \Leftrightarrow 13-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{4}$.

Câu 13. Giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=x^2+3x-m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

A. $m<-\frac{9}{4}$. **B.** $m>-\frac{9}{4}$. **C.** $m>\frac{9}{4}$. **D.** $m<\frac{9}{4}$.

Câu 14. Giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=x^2+3x+m$ không cắt trục hoành ?

A. $m<-\frac{9}{4}$. **B.** $m>-\frac{9}{4}$. **C.** $m>\frac{9}{4}$. **D.** $m<\frac{9}{4}$.

Câu 15. Giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=x^2+3x-m$ không cắt trục hoành ?

A. $m<-\frac{9}{4}$. **B.** $m>-\frac{9}{4}$. **C.** $m>\frac{9}{4}$. **D.** $m<\frac{9}{4}$.

Câu 16. Giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=x^2+3x-m$ cắt trục hoành?

A. $m<-\frac{9}{4}$. **B.** $m>-\frac{9}{4}$. **C.** $m>\frac{9}{4}$. **D.** $m\leq\frac{9}{4}$.

Câu 17. Tìm m để đường thẳng d : $y=x+3$ cắt parabol $y=x^2+2x+m$ tại 2 điểm phân biệt

A. $m<\frac{13}{4}$. **B.** $m\geq\frac{13}{4}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\geq 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x+3=x^2+2x+m \Leftrightarrow x^2+x+m-3=0$.

Ta có: $\Delta=1-4(m-3)=13-4m$.

Để đường thẳng d cắt parabol tại 2 điểm phân biệt thì: $\Delta > 0 \Leftrightarrow 13-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{13}{4}$.

Câu 18. Biết đường thẳng $d: y=mx$ cắt Parabol $(P): y=x^2-x+1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I\left(\dfrac{1+m}{2};\dfrac{m^2+m}{2}\right)$.
B. $I\left(\dfrac{1+m}{2};\dfrac{-m^2-2m+3}{4}\right)$.
C. $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.
D. $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{m}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$mx=x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-(m+1)x+1=0\,(1)$

Vì hoành độ giao điểm x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình (1) nên ta có tọa độ trung điểm I là $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{m(x_A+x_B)}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{m+1}{2} \\ y_I=\dfrac{m^2+m}{2}\end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1+m}{2};\dfrac{m^2+m}{2}\right)$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=2x+3$ cắt parabol $y=x^2+(m+2)x-m$ tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy.

A. $m>-3$.
B. $m<-3$.
C. $m>3$.
D. $m<0$.

Lời giải

Chọn B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2+(m+2)x-m=2x+3 \Leftrightarrow x^2+mx-m-3=0$. (1)

Để đường thẳng d cắt parabol tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0 \\ \dfrac{c}{a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m+12>0 \\ -m-3>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m<-3$.

Câu 20. Biết đường thẳng $d: y=mx$ cắt Parabol $(P): y=x^2-x+1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I\left(\dfrac{1+m}{2};\dfrac{m^2+m}{2}\right)$.
B. $I\left(\dfrac{1+m}{2};\dfrac{-m^2-2m+3}{4}\right)$.
C. $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.
D. $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{m}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$mx=x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-(m+1)x+1=0\,(1)$

Vì hoành độ giao điểm x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình (1) nên ta có tọa độ trung điểm I là $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{m(x_A + x_B)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{m+1}{2} \\ y_I = \dfrac{m^2 + m}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1+m}{2}; \dfrac{m^2+m}{2}\right)$.

Câu 21. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10;-4)$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt Parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung?

A. 6.　　**B.** 5.　　**C.** 7.　　**D.** 8.

Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình: $-(m+1)x + m + 2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x(m+2) - m - 4 = 0$

Để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung vậy điều kiện là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 + 4(m+4) > 0 \\ -m-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 20 > 0, \forall m \\ m < -4 \end{cases}$

Vậy trong nửa khoảng $[-10;-4)$ có 6 giá trị nguyên m.

Câu 22. Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$.

A. $m = 2$.　　**B.** Không tồn tại m.　　**C.** $m = -2$.　　**D.** $m = \pm 2$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$

$\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1.x_2 = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

A. $m < -3$.　　**B.** $-3 < m < 4$.　　**C.** $m < 4$.　　**D.** $m \le 4$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x - 5 = mx + 3 - 2m \Leftrightarrow$ $x^2 - (m+3)x + 2m - 8 = 0$ $(*)$.

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ $a.c < 0$ $\Leftrightarrow$ $2m - 8 < 0$ $\Leftrightarrow$ $m < 4$.

Câu 24.Đường thẳng $d: y=(m-3)x-2m+1$ cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB cân. Khi đó, số giá trị của m thỏa mãn là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

$A=d\cap Ox$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=(m-3)x-2m+1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m-1}{m-3} \\ y=0 \end{cases} \text{ nên } A\left(\dfrac{2m-1}{m-3};\ 0\right).$$

$B=d\cap Oy$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=(m-3)x-2m+1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2m+1 \end{cases} \text{ nên } B(0;-2m+1).$$

Ta có $OA=OB \Leftrightarrow \left|\dfrac{2m-1}{m-3}\right|=\left|-2m+1\right| \Leftrightarrow \left|2m-1\right|\left(\dfrac{1}{\left|m-3\right|}-1=0\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-1=0 \\ \left|m-3\right|=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=4,\ m=2 \end{array}\right..$$

Nhận xét: Với $m=\dfrac{1}{2}$ thì $A\equiv B\equiv O(0;0)$ nên không thỏa mãn.

Vậy $m=4,\ m=2$.

Câu 25. Cho hàm số bậc nhất $y=(m^2-4m-4)x+3m-2$ có đồ thị là (d). Tìm số giá trị nguyên dương của m để đường thẳng (d) cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác cân (O là gốc tọa độ).

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Đường thẳng (d) tạo với trục hoành và trục tung một tam giác OAB là tam giác vuông cân $\Leftrightarrow$ đường thẳng (d) tạo với chiều dương trục hoành bằng $45°$ hoặc $135°$ $\Leftrightarrow$ hệ số góc tạo của (d) bằng 1 hoặc $-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-4m-4=1 \\ m^2-4m-4=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-4m-3=0 \\ m^2-4m-5=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=5 \\ m=2\pm\sqrt{7} \end{array}\right..$$

Thử lại: $m=5$ thì d không đi qua O.

Vậy có duy nhất một giá trị $m=5$ nguyên dương thỏa ycbt.

7. Dạng 7–Tìm hàm số bậc hai thỏa điều liện cho trước

Phương pháp:

Để xác định hàm số bậc hai $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số $a,\ b,\ c$) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là $a,\ b,\ c$. Từ đó tìm được $a,\ b,\ c$. Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(x_0;\ y_0\right)\Leftrightarrow y_0=f\left(x_0\right)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x=x_0\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}=x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I\left(x_I;\ y_I\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=x_I\\ -\dfrac{\Delta}{4a}=y_I\end{cases}\quad\left(\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=x_I\\ f\left(x_I\right)=y_I\end{cases}\right)$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f\left(x\right)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a<0$. Lúc này gí trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ là $-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

2. $f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a>0$. Lúc này giá trị nhỏ nhất $f\left(x\right)$ là $-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Ví dụ 1 :

Xác định parabol $y=ax^2+bx+1$, trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua hai điểm $A(1;0)$ và $B(2;4)$;

b) Đi qua điểm $A(1;0)$ và có trục đối xứng $x=1$;

c) Có đỉnh $I(1;2)$

Lời giải

a) Vì parabol $y=ax^2+bx+1$ đi qua điểm $A(1;0)$ nên ta có

$0=a.1^2+b.1+1\Leftrightarrow a+b=-1$ (1)

Vì parabol $y=ax^2+bx+1$ đi qua điểm $B(2;4)$ nên ta có

$4=a.2^2+b.2+1\Leftrightarrow 4a+2b=3$ (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được $\begin{cases}a=\dfrac{5}{2}\\ b=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$

Vậy $y=\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{7}{2}x+1$

b) Đi qua điểm $A(1;0)$ và có trục đối xứng $x=1$;

Vì parabol $y=ax^2+bx+1$ đi qua điểm $A(1;0)$ nên ta có $0=a.1^2+b.1+1\Leftrightarrow a+b=-1$ (1)

Vì parabol $y=ax^2+bx+1$ có trục đối xứng $x=1$ nên ta có

$-\dfrac{b}{2a}=1\Rightarrow -b=2a\Rightarrow 2a+b=0$ (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

Vậy $y=x^2-2x+1$

c) Vì parabol $y=ax^2+bx+1$ có đỉnh $I(1;2)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2=a.1^2+b.1+1 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

Vậy $y=-x^2+2x+1$

Ví dụ 2 : Xác định parabol $(P): y=ax^2+bx+2$, biết rằng (P) đi qua điểm $M(1;5)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x=-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} a+b+2=5 \\ -\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$.

Vậy (P) có phương trình là $y=2x^2+x+2$.

Ví dụ 3 :

Xác định parabol $(P): y=ax^2+2x+c$, biết rằng $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{2}\right)$ là đỉnh của (P).

Lời giải

Ta có : $\begin{cases} -\dfrac{2}{2a}=\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{4+8c}{-8}=\dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ c=5 \end{cases}$.

Vậy (P) có phương trình là $y=-2x^2-2x+5$.

Ví dụ 4 : Tìm parabol $(P): y=ax^2+bx+c$, biết rằng (P) đi qua ba điểm $A(1;-1)$, $B(2;3)$, $C(-1;-3)$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} a.1^2+b.1+c=-1 \\ a.2^2+b.2+c=3 \\ a.(-1)^2+b(-1)+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow (P): y=x^2+x-3$.

Vậy (P) có phương trình là $y=x^2+x-3$.

Ví dụ 5 : Tìm Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua $A(8;0)$ và có đỉnh $I(6;-12)$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 64a+8b+c=0 \\ 36a+6b+c=-12 \\ -\dfrac{b}{2a}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-36 \\ c=96 \end{cases}$.

Vậy parabol cần tìm là $y=3x^2-36x+96$.

Ví dụ 6 : Tìm parabol $(P): y=ax^2+bx+2$ đi qua điểm $A(-1;6)$ và có tung độ đỉnh $-0,25$.

Lời giải

Vì parabol $(P): y=ax^2+bx+2$ đi qua điểm $A(-1;6)$ nên ta có

$6=a.(-1)^2+b(-1)+2 \Leftrightarrow a-b=4 \Leftrightarrow a=b+4 (1)$

Vì parabol $(P): y=ax^2+bx+2$ có tung độ đỉnh $-0,25$.nên ta có

$-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow \Delta=a \Leftrightarrow b^2-4a.2=a \Leftrightarrow b^2-9a=0(2)$

Thế (1) vào (2) ta được : $b^2-9(b+4)=0 \Leftrightarrow b^2-9b-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=12 \\ b=-3 \end{array}\right.$

Với $b=12 \Rightarrow a=16$, ta được $(P): y=16x^2+12x+2$

Với $b=-3 \Rightarrow a=1$, ta được $(P): y=x^2-3x+2$

Vậy có hai parabol thỏa yêu cầu bài toán là $(P_1): y=16x^2+12x+2$ và $(P_2): y=x^2-3x+2$

Ví dụ 7 : Xác định hàm số $y=ax^2+bx+c$ với a, b, c là các tham số, biết rằng hàm số ấy đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x=-2$ và có đồ thị đi qua điểm $M(1;-1)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$, do hàm số $A(1;-1)$ đạt giá trị lớn nhất nên $a<0$.

Do đó theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-2 \\ 4a-2b+c=5 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ b=-\dfrac{8}{3} \\ c=\dfrac{7}{3} \end{cases}$ (nhận).

Vậy hàm số cần tìm là $y=-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{7}{3}$.

Ví dụ 8 : Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y=mx^2-2mx-3m-2$ $(m \neq 0)$ cắt đường thẳng $y=3x-1$ tại đỉnh của nó.

Lời giải

Đỉnh của (P) là $I(1;-4m-2)$.

Theo giả thiết, I thuộc đường thẳng $y=3x-1$ nên $-4m-2=3.1-1 \Leftrightarrow m=-1$.

Vậy $m=-1$.

Ví dụ 9 : Tìm parabol $(P): y = ax^2 - 4x + c$ biết rằng hoành độ đỉnh của (P) bằng -3 và (P) đi qua điểm $M(-2;1)$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} -\dfrac{-4}{2a} = -3 \\ 4a + 8 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 6a \\ 4a + c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ c = -\dfrac{13}{3} \end{cases}$.

Vậy parabol (P) có phương trình là $y = -\dfrac{2}{3}x^2 - 4x - \dfrac{13}{3}$.

Ví dụ 10 : Tìm các tham số $a,\ b,\ c$ sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x = 2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$ hàm số có giá trị nhỏ nhất nên $a > 0$.

Lại có đồ thị hàm số có đỉnh $I(2;4)$. Do đó ta có:

$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$ (nhận).

Ví dụ 11 : Tìm tất cả các giá trị của ham số m sao cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ thỏa mãn $OA = 3OB.$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là: $x^2 - 4x + m = 0.$ (*)

(P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$

Gọi x_A, x_B là hai nghiệm của (*). Ta có $OA = 3OB \Rightarrow |x_A| = 3|x_B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 3x_B \\ x_A = -3x_B \end{array}\right.$.

- TH1: $x_A = 3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_B = 1 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A.x_B = 3 < 4.$

- TH2: $x_A = -3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = -3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 6 \\ x_B = -2 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A.x_B = -12 < 4$.

Vậy $m \in \{-12;3\}$.

Ví dụ 12 : Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 3$.

Lời giải

Ta có $a = 4 > 0$ nên đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm hướng lên và có hoành độ đỉnh $x_I = \frac{m}{2}$.

• Nếu $\frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow m < -4$ thì $x_I < -2 < 0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2;0]$.

Do đó $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = m^2 + 6m + 16$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 + 6m + 16 = 3$ (vô nghiệm).

• Nếu $-2 \le \frac{m}{2} \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 0$ thì $x_I \in [0;2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_I = \frac{m}{2}$.

Do đó $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m$.

Theo yêu cầu bài toán $-2m = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4 \le m \le 0$).

• Nếu $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì $x_I > 0 > -2$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-2;0]$.

Do đó $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m.$

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 3$ (Vì $m > 0$).

Từ các trường hợp trên, ta được $m \in \left\{\frac{-3}{2}; 3\right\}$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Xác định parabol $(P): y = 2x^2 + bx + c,$ biết rằng (P) đi qua điểm $M(0;4)$ và có trục đối xứng $x = 1.$

A. $y = 2x^2 - 4x + 4.$ **B.** $y = 2x^2 + 4x - 3.$ **C.** $y = 2x^2 - 3x + 4.$ **D.** $y = 2x^2 + x + 4.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $M \in (P) \longrightarrow c = 4.$

Trục đối xứng $-\frac{b}{2a} = 1 \longrightarrow b = -4.$ Vậy $(P): y = 2x^2 - 4x + 4.$

Câu 2: Biết rằng $(P): y = ax^2 + bx + 2$ $(a > 1)$ đi qua điểm $M(-1;6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\frac{1}{4}$. Tính tích $T = ab.$

A. $P = -3.$ **B.** $P = -2.$ **C.** $P = 192.$ **D.** $P = 28.$

Lời giải

Chọn C.

Vì (P) đi qua điểm $M(-1;6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\frac{1}{4}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} a-b+2=6 \\ -\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=4 \\ b^2-4ac=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4+b \\ b^2-8(4+b)=4+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4+b \\ b^2-9b-36=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=16 \\ b=12 \end{cases}$ (thỏa mãn $a>1$) hoặc $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$ (loại).

Suy ra $T=ab=16.12=192.$

Câu 3: Cho parabol $y=ax^2+bx+4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=\frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1;3)$. Tổng giá trị $a+2b$ là

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B.

Vì parabol $y=ax^2+bx+4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=\frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1;3)$

Nên ta có: $\begin{cases} a+b+4=3 \\ -\frac{b}{2a}=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases}$

Do đó: $a+2b=-3+4=1$

Câu 4: Xác định $(P): y=-2x^2+bx+c$, biết (P) có đỉnh là $I(1;3)$.

A. $(P): y=-2x^2+3x+1$. **B.** $(P): y=-2x^2+4x+1$.

C. $(P): y=-2x^2+4x-1$. **D.** $(P): y=-2x^2-4x+1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} -2+b+c=3 \\ -\frac{b}{-4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ c=1 \end{cases}$.

Câu 5: Biết rằng hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x=2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$. Tính tổng $S=a+b+c$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} -\frac{b}{2a}=2 \\ y(2)=3 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ 4a+2b+c=3 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ 4a-8a-1=3 \\ c=-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=-1 \end{cases} \longrightarrow S=a+b+c=2.$$

Câu 6: Xác định parabol $(P): y=ax^2-4x+c$ biết rằng hoành độ đỉnh của (P) bằng -3 và (P) đi qua điểm $M(-2;1)$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} -\dfrac{-4}{2a}=-3 \\ 4a+8+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4=6a \\ 4a+c=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ c=-\dfrac{13}{3} \end{cases}.$$

Vậy parabol (P) có phương trình là $y=-\dfrac{2}{3}x^2-4x-\dfrac{13}{3}$.

Câu 7: Xác định hàm số bậc hai $y=2x^2+bx+c$, biết rằng đồ thị của nó có đỉnh là $I(-1;0)$.

Lời giải

Vì đồ thị của hàm số có đỉnh là $I(-1;0)$ nên đồ thị có trục đối xứng là $x=-\dfrac{b}{4}$ và đi qua $I(-1;0)$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{4}=-1 \\ 2-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ c=2 \end{cases}.$$

Hàm số cần tìm là $y=2x^2+4x+2$.

Câu 8: Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua $A(8;0)$ và có đỉnh $I(6;-12)$. Khi đó tích $a.b.c$ bằng

A. -10368. **B.** 10368. **C.** 6912. **D.** -6912.

Lời giải

Chọn A.

Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 64a+8b+c=0 \\ 36a+6b+c=-12 \\ -\dfrac{b}{2a}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-36 \\ c=96 \end{cases} \Rightarrow abc=-10368$.

Câu 9: Xác định hàm số $y=ax^2+bx+c$, biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x=-2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$.

A. $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+6$. **B.** $y=x^2+2x+6$. **C.** $y=x^2+6x+6$. **D.** $y=x^2+x+4$.

Lời giải

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$, suy ra $c=6$.

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x=-2$ nên

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=-2\\ 4a-2b+c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a-b=0\\ 4a-2b+6=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=2\end{cases}$$

Suy ra $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+6$ là hàm số cần tìm.

Câu 10: Biết rằng hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x=2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$. Tính tích $P=abc$.

A. $P=-6$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=6$. **D.** $P=\dfrac{3}{2}$.

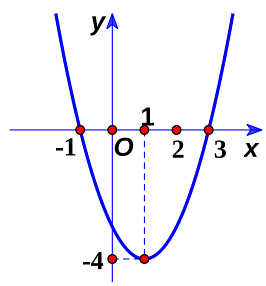
Lời giải

Chọn A.

Nhận xét: Hàm số đi qua điểm $A(0;6)$; đạt cực tiểu bằng 4 tại $x=2$ nên đồ thị hàm số đi qua $I(2;4)$ và nhận $x=2$ làm trục đối xứng, hàm số cũng đi qua điểm $A(0;6)$ suy ra:

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ 4a+2b+c=4\\ c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-2\\ c=6\end{cases}\Rightarrow abc=-6.$$

Câu 12: Cho parabol $(P):y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a+b+2c$ có giá trị là



A. -9. **B.** 9. **C.** -6. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C.

Parabol $(P):y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ -4)$, $C(3;\ 0)$ nên có hệ phương trình: $\begin{cases}a-b+c=0\\ a+b+c=-4\\ 9a+3b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=-3\end{cases}$.

Khi đó: $2a+b+2c=2.1-2+2(-3)=-6$.

Câu 13: Biết đồ thị $(P):y=ax^2+bx+c$ cắt trục tung tại điểm bằng có tung độ bằng 7, đi qua điểm $A(3;1)$ và có tung độ đỉnh bằng 9. Xác định parabol (P).

A. $(P):y=-2x^2+8x-7$. **B.** $(P):y=-2x^2+4x+7$.

C. $(P): y=-4x^2+2x+7$. **D.** $(P): y=-x^2+4x-7$.

Lời giải

Ta có (P) cắt trục tung tại điểm bằng 7 nên $c=7$.

Ta có $A(3;1)\in(P)$: $1=a.3^2+3b+7$

$$\Leftrightarrow 9a+3b=-6$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{-2-b}{3}. \quad (1)$$

Tung độ đỉnh

$$y=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-b^2+4.7.a}{4a}=9$$

$$\Leftrightarrow -b^2+28a=36a$$

$$\Leftrightarrow b^2+8a=0.$$

Thay (1) vào phương trình trên ta được: $3b^2-8b-16=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-\frac{4}{3} \\ b=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{2}{9} \\ a=-2 \end{array}\right..$$

Vậy $(P): y=-2x^2+4x+7$ hoặc $(P): y=-\frac{2}{9}x^2-\frac{2}{3}x+7$.

Câu 14: Xác định các hệ số a và b để Parabol $(P): y=ax^2+4x-b$ có đỉnh $I(-1;-5)$.

A. $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $x_I=-1\Rightarrow -\frac{4}{2a}=-1\Rightarrow a=2.$

Hơn nữa: $I\in(P)$ nên $-5=a-4-b\Rightarrow b=3.$

Câu 15: $(P): y=-2x^2-ax+b$ có điểm $M(1;3)$ với tung độ lớn nhất. Khi đó giá trị của b là

A. 5. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B.

Do bề lõm của (P) quay xuống và M có tung độ lớn nhất nên M là đỉnh của (P).

Ta có $M(1;3)$ là đỉnh của parabol nên $\frac{a}{-4}=1\Leftrightarrow a=-4$.

Suy ra $y=-2x^2+4x+b$ qua $M(1;3)$ nên $b=1$.

8. Dạng 8–Tìm GTLN, GTNN của hàm số bậc hai

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^2-4x-3$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-3;5]$.

Lời giải

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai có hệ số: $a=1,b=-4,c=-3$.

Ta có: $\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2.1}=2$; $\frac{-\Delta}{4a}=\frac{(-4)^2-4.(-3)}{4.1}=\frac{-28}{4}=-7$.

Vì $a=1>0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$, đồng biến trên $(2;+\infty)$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số trên $\left[-3;5\right]$ là:

x	-3		2		5
y	18	$\searrow$	-7	$\nearrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên, vậy $\min\limits_{x\in[-3;5]} y=y(2)=-7$ và $\max\limits_{x\in[-3;5]} y=y(-3)=18$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=-2x^2+4x+3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[2;7\right]$.

Lời giải

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai có $a=-2,b=4,c=3$.

Ta có: $\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2.(-2)}=1$; $\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{4^2-4.(-2).3}{4.(-2)}=5$

Vì $a=-2<0$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$, nghịch biến trên $(1;+\infty)$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số trên $\left[2;7\right]$ là:

x	2		7
y	3	$\searrow$	-67

Dựa vào bảng biến thiên, vậy $\min\limits_{x\in[2;7]} y=y(7)=-67$ và $\max\limits_{x\in[2;7]} y=y(2)=3$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị thực của tham số $m\neq 0$ để hàm số $y=mx^2-2mx-3m-2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I=-\frac{b}{2a}=\frac{2m}{2m}=1$, suy ra $y_I=-4m-2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi $\begin{cases} m>0 \\ -4m-2=-10 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$. (Thỏa mãn)

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x=1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x=2$. Tính abc.

Lời giải

Để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x=1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x=2$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \\ f(1)=2 \\ f(2)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ 2a+b=0 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$.

Vậy $abc = 1.(-2).3 = -6$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = mx^2 - 2x - m - 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2m} = \dfrac{1}{m}$, suy ra $y_I = m.\left(\dfrac{1}{m}\right)^2 - 2.\left(\dfrac{1}{m}\right) - m - 1 = \dfrac{-m^2 - m - 1}{m}$

TH1: Khi $m<0$ thì $\max y = y_I = \dfrac{-m^2-m-1}{m}$ tại điểm $x_I = \dfrac{1}{m}$.

$y_I = f(m) = \dfrac{-m^2-m-1}{m} - 1 + 1 = \dfrac{-m^2-2m-1}{m} + 1 = \dfrac{-(m+1)^2}{m} + 1 \geq 0 + 1 = 1$.

Vậy $\min y_I = 1$ tại điểm $m = -1$.

TH2: Khi $m>0$ thì hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất, chỉ có giá trị nhỏ nhất.

TH3: Khi $m=0$ thì hàm số $y = -2x - 1$ đã cho là hàm số bậc nhất, không có giá trị lớn nhất.

Kết luận: $m = -1$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = -(m-1)^2 x^2 + 2(m-1)^2 x + 1 + 2m$. Với $m \neq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \dfrac{\min\limits_{x\in[0;2]} y}{\max\limits_{x\in[0;2]} y}$.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-2(m-1)^2}{-2(m-1)^2} = 1$, suy ra

$y_I = -(m-1)^2 + 2(m-1)^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$

Do $a = -(m-1)^2 < 0,\ \forall m \neq 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	0		1		2
y	$2m+1$	↗	m^2+2	↘	$2m+1$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{x\in[0;2]} y = m^2 + 2$ tại $x=1$, $\min\limits_{x\in[0;2]} y = 2m+1$ tại $x=0$ hoặc $x=2$.

$$B = \frac{\min\limits_{x\in[0;2]} y}{\max\limits_{x\in[0;2]} y} = \frac{2m+1}{m^2+2} = \frac{\frac{1}{2}m^2 + 2m + 1 - \frac{1}{2}m^2}{m^2+2} = \frac{\frac{1}{2}\left(m^2 + 4m + 4\right) - \frac{1}{2}\left(m^2+2\right)}{m^2+2} = \frac{(m+2)^2}{2\left(m^2+2\right)} - \frac{1}{2}$$

Vì $(m+2)^2 \ge 0,\ \forall m\in\mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} \ge 0,\ \forall m\in\mathbb{R} \Rightarrow B \ge -\dfrac{1}{2},\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy $\min B = -\dfrac{1}{2}$ tại $m=-2$.

Ví dụ 7: Tìm các tham số $a,\ b,\ c$ sao cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x=2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$ hàm số có giá trị nhỏ nhất nên $a>0$.

Lại có đồ thị hàm số có đỉnh $I(2;4)$. Do đó ta có:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=2 \\ 4a+2b+c=4 \\ c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ 4a+2b=-2 \\ c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=6 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=f(x)=4x^2-4mx+m^2-2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của $f(x)=3$.

Lời giải

Ta có $a=4>0$ nên đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm hướng lên và có hoành độ đỉnh $x_I=\dfrac{m}{2}$.

• Nếu $\dfrac{m}{2}<-2 \Leftrightarrow m<-4$ thì $x_I<-2<0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2;0]$.

Do đó $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f(-2)=m^2+6m+16$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2+6m+16=3$ (vô nghiệm).

• Nếu $-2\le\dfrac{m}{2}\le 0 \Leftrightarrow -4\le m\le 0$ thì $x_I\in[0;2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_I=\dfrac{m}{2}$.

Do đó $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f\left(\dfrac{m}{2}\right)=-2m$.

Theo yêu cầu bài toán $-2m=3 \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4\le m\le 0$).

• Nếu $\dfrac{m}{2}>0 \Leftrightarrow m>0$ thì $x_I>0>-2$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-2;0]$.

Do đó $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f(0)=m^2-2m.$

Theo yêu cầu bài toán: $m^2-2m=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=3$ (Vì $m>0$).

Từ các trường hợp trên, ta được $m\in\left\{\dfrac{-3}{2};3\right\}$.

9. Dạng 9–Bài toán thức tế về (P)

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Ví dụ 1: Biết một viên đạn được bắn ra, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Quỹ đạo của viên đạn trong mặt phẳng với hệ tọa độ Ots là một cung parabol có phương trình là $s(t)=-(t-2)^2+16$ trong đó t là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi viên đạn được bắn ra; s là độ cao(tính bằng km) của viên đạn.

a) Tính độ cao của viên đạn khi bắn được $3s$

b) Hỏi khi nào viên đạn đạt độ cao $7\,\text{km}$?

c) Khi nào viên đạn đạt độ cao lớn nhất.

d) Khi nào viên đạn chạm mặt đất

Lời giải

a) Khi $t=3(s)$ thì $s(3)=-(3-2)^2+8=15\ (km)$

b) Viên đạn đạt độ cao $7\,\text{km}$ khi $s(t)=4 \Leftrightarrow -(t-2)^2+16=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-1(KTM) \end{array}\right.$

Vậy khi bắn được $5s$ thì viên độ có độ cao $7\,\text{km}$

c)Giá trị lớn nhất của $s(t)=-(t-2)^2+16$ là 16 khi $t=2$

Vậy khi bắn viên đạn được $2s$ thì viên đạn đạt độ cao lớn nhất là 16 km.

d) Ta có $-(t-2)^2+16=0 \Leftrightarrow (t-2)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-2(KTM) \end{array}\right.$

Vậy sau $6s$ thì viên đạn sẽ rơi xuống mặt đất.

Ví dụ 2: Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t)=-t^2+2t+3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây $(t\geq 0)$.

a. Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

b. Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất ?

Lời giải

a. Ta có: $h(t)=-t^2+2t+3 \Leftrightarrow h(t)=-(t-1)^2+4 \Rightarrow \max h(t)=h(1)=4$.

Vậy quả bóng đạt chiều cao lớn nhất bằng 4 m tại thời điểm $t=1$ giây.

b. Ta có: $-t^2+2t+3=0 \Leftrightarrow t=-1$ (loại) hoặc $t=3$ (nhận).

Vậy sau 3 giây quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất.

Ví dụ 3: Một quả bóng được ném lên trên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu $14,7\,(\text{m/s})$. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) được mô tả bởi công thức $h(t)=-4,9t^2+14,7t$.

a. Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất?

b. Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng?

c) Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng rơi chạm đất ?

Lời giải

a. Quả bóng đạt chiều cao lớn nhất khi $h(t)=-4,9t^2+14,7t$ đạt giá trị lớn nhất.

Đồ thị hàm số $h(t)=-4,9t^2+14,7t$ là một parabol có đỉnh $I(\frac{3}{2};\frac{441}{40})$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $h=\frac{441}{40}$ khi $t=\frac{3}{2}$

Sau khi ném được $1,5$ thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất

b. Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng là $h=\frac{441}{40}$.

c) Quả bóng chạm đất khi $h(t)=0 \Leftrightarrow -4,9t^2+14,7t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right.$

Vì $t>0$ nên $t=3$.

Vậy sau khi ném được 3 giây thì quả bóng rơi chạm đất.

Ví dụ 4: Bác Hùng dùng $200\,\text{m}$ hàng rào dây thép gai để rào miếng đất đủ rộng thành một mảnh vườn hình chữ nhật.

a) Gọi $x\,(\text{m})$ là chiều rộng của mảnh vườn đó, tìm công thức diện tích $S(x)$ theo x.

b) Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có thể rào được.

Lời giải

a) Nửa chu vi của hình chữ nhật là $200:2=100(m)$

Chiều dài của hình chữ nhật là $100-x\,(m)$

Diện tích của mảnh vườn là $S(x)=x(100-x)=-x^2+100x\ \ (\text{m}^2)$

b) Mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất khi $S(x)=-x^2+100x$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $S(x)=-x^2+100x$ đạt giá trị lớn nhất tại hoành độ đỉnh parabol, tức là $x=50\,(\text{m}), y=50\,(\text{m})$

Vậy kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là $50.50=2500\,(\text{m}^2)$

Ví dụ 5: Bác An dùng $60(m)$ lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng hoa.

a) Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (mét) của nó.

b) Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác An có thể rào được.

Lời giải

a) Nửa chu vi của hình chữ nhật là $60:2=30(m)$

Chiều dài của hình chữ nhật là $30-x\,(m)$

Diện tích của mảnh vườn là $S(x)=x(30-x)=-x^2+30x\ \ (\text{m}^2)$

b) Mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất khi $S(x)=-x^2+30x$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $S(x)=-x^2+30x$ đạt giá trị lớn nhất tại hoành độ đỉnh parabol, tức là $x=15\,(\text{m}), y=15\,(\text{m})$

Vậy kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là $15.15=225\,(\text{m}^2)$

Ví dụ 6: Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây ?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Lời giải

Độ cao của quả bóng tính theo thời gian được xác định bởi hàm số $h(t)=at^2+bt+c$ (tính bằng mét), t : giây, $t\geq 0$.

Với các thông số cho bởi bảng trên ta có:

$$\begin{cases} c=0 \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=28 \\ a+b+c=48 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-16 \\ b=64 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow h(t)=-16t^2+64t \Rightarrow h(3)=48.$$

Vậy độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây là 48 m.

Ví dụ 7: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung Parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth, trong đó t là thời gian(tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao(tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 2,4m. Sau đó 1 giây nó đạt được độ cao 10,2m và 2 giây sau khi đá lên nó đạt độ cao 8,5m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên(tính chính xác đến hàng phần trăm)?

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung Parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth, trong đó t là thời gian(tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao(tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 2,4m. Sau đó 1 giây nó đạt được độ cao 10,2m và 2 giây sau khi đá lên nó đạt độ cao 8,5m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên(tính chính xác đến hàng phần trăm)?

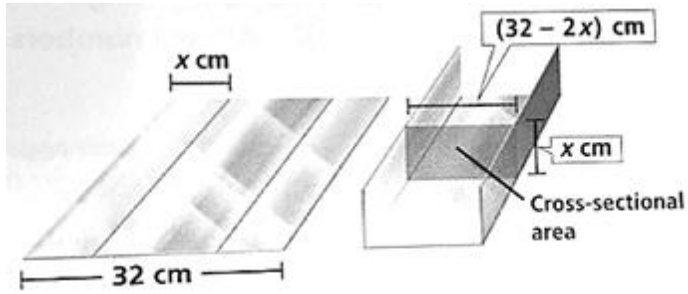
Giả sử phương trình Parabol $y=at^2+bt+c(a\neq 0)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} y(0)=2,4 \\ y(1)=10,2 \\ y(2)=8.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,4=c \\ 10,2=a+b+c \\ 8,5=4a+2b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{19}{4} \\ b=\frac{251}{20} \\ c=\frac{12}{5} \end{cases}$ ....

Vậy (P): $y=-\frac{19}{4}t^2+\frac{251}{20}t+\frac{12}{5}$ ....

Bóng chạm đất thì $-\frac{19}{4}t^2+\frac{251}{20}t+\frac{12}{5}=0 \Leftrightarrow t\approx 2,82$ (giây).....................

Ví dụ 8: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất ?



Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$S(x)=x(32-2x)$, với $0<x<16$.

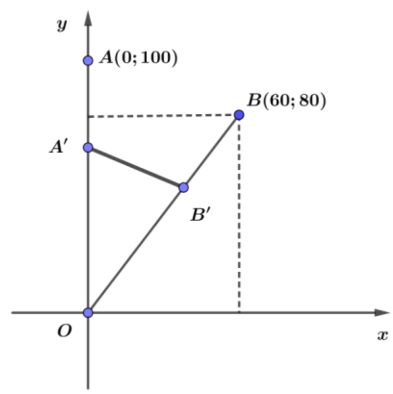
Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;16)$.

Ta có: $S(x)=-2x^2+32x=-2(x-8)^2+128\le 128,\ \forall x\in(0;16)$.

$\Rightarrow \max S(x)=S(8)=128$.

Vậy $x=8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Ví dụ 9: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quĩ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.
Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s.
Con còn lại bay trên quĩ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s.
Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu ?



Lời giải

Xét tại thời điểm t (giây), $t\in[0;10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0;100-5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60;80)$ về $O(0;0)$ trên quĩ đạo là đường thẳng có hệ số góc là $k=\tan\alpha=\dfrac{4}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\ \sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

Do đó tại thời điểm t, nó có tọa độ là $\begin{cases}x=60-10t.\cos\alpha\\ y=80-10t.\sin\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=60-6t\\ y=80-8t\end{cases}$

$\Rightarrow B'(60-6t;80-8t)$.

Ta có: $\overrightarrow{A'B'}=(60-6t;-20-3t)$.

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$d=A'B'=\sqrt{(60-6t)^2+(20+3t)^2}\Leftrightarrow d=\sqrt{45t^2-600t+4000}$

d nhỏ nhất khi hàm số $f(t)=45t^2-600t+4000$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;10]$.

Ta có: $f(t)=5(3t-20)^2+2000\ge 2000,\ \forall t\in[0;10]$

$\Rightarrow \min\limits_{t\in[0;10]} f(t) = f\left(\dfrac{20}{3}\right) = 2000$.

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

Ví dụ 10: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để của hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng (x : đồng, $30000 \le x \le 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40 + \dfrac{10}{1000}(50000 - x) = -\dfrac{1}{100}x + 540$

.

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$f(x) = \left(-\dfrac{1}{100}x + 540\right).(x - 30000) = -\dfrac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000;50000]$

Ta có: $f(x) = -\left(\dfrac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \le 1440000,\ \forall x \in [30000;50000]$

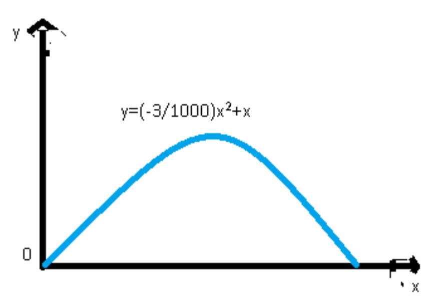
$\Rightarrow \max\limits_{x\in[30000;50000]} f(x) = f(42000) = 1440000$.

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Ví dụ11: Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng toạ độ Oxy là một parabol có phương trình $y = \dfrac{-3}{1000}x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc 0, y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất (H.6.15).

a) Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.

b) Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O. Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.



Lời giải

Vật đạt độ cao lớn nhất khi $y = \dfrac{-3}{1000}x^2 + x$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có tọa độ đỉnh của parabol là $I(\dfrac{500}{3};\dfrac{250}{3})$

Vậy vật đạt độ cao lớn nhất là $\frac{250}{3}(m)$.

b) Vật chạm mặt đất tức là $y=0 \Leftrightarrow \frac{-3}{1000}x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1000}{3} \end{array}\right.$

Vậy tầm xa của quỹ đạo là $\frac{1000}{3}(m)$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Chiều cao h mét của tên lửa sau t giây khi nó được bắn lên theo chiều dọc cho bởi công thức $h(t)=80t-5t^2,(t\geq 0)$. Sau bao lâu thì tên lửa đạt độ cao tối đa?

A. $t=8$ giây

B. $t=4$ giây

C. $t=10$ giây

D. $t=12$ giây

Lời giải

Chọn A.

Tên lửa đạt độ cao tối đa khi vị trí tên lửa trùng với đỉnh của Parabol $h(t)=80t-5t^2,(t\geq 0)$.

Khi đó $t=-\frac{80}{2.(-5)}=8$ giây.

Câu 2: Biết một viên đạn được bắn ra theo quỹ đạo là một parabol có phương trình $s(t)=-(t-3)^2+9\ (km)$, với t là thời gian tính bằng giây. Hỏi khi nào viên đạn đạt độ cao $8\,km$?

A. $t=4\,s$. **B.** $t=5\,s$.

C. $t=3s$. **D.** $t=2\,s$.

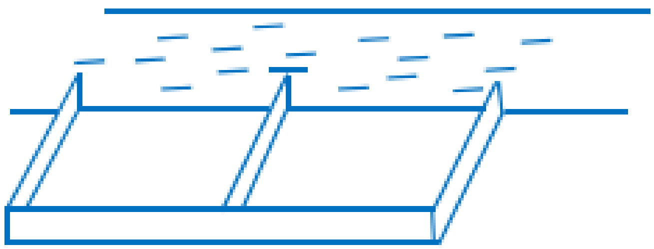
Lời giải

Quả đạn đạt độ cao $8\,km$ khi

$s(t)=8 \Leftrightarrow -(t-3)^2+9=8 \Leftrightarrow (t-3)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (KTM) \\ t=2\ \ (TM) \end{array}\right.$ Parabol

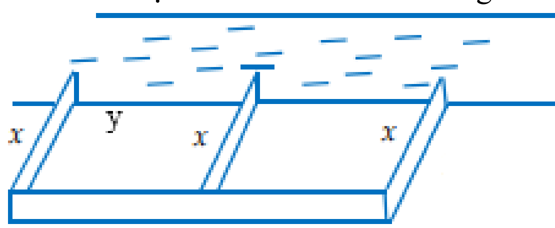
Câu 3: Một người nông dân có $15.000.000$ vnđ để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 vnđ/m, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 vnđ/m. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được.

A. 50 m^2. **B.** 3125 m^2. **C.** 1250 m^2. **D.** 6250 m^2.



Lời giải

Phân tích ta đặt các kích thước của hàng rào như hình vẽ



Giá thành làm rào là:

$3x.50000+2y.60000=15000000 \Leftrightarrow 5x+4y=500 \Leftrightarrow y=\dfrac{500-5x}{4}$.

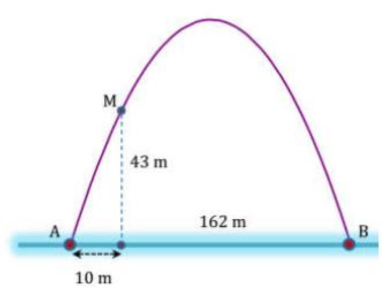
Diện tích khu vườn sau khi được rào là: $S\left(x\right)=x.2y=x.2.\dfrac{500-5x}{4}=-\dfrac{5}{2}x^2+250x$.

Diện tích khu vườn lớn nhất khi hàm số $S\left(x\right)=-\dfrac{5}{2}x^2+250x$ đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó: $S_{\max}=-\dfrac{\Delta}{4a}=6250\ \ m^2$.

Vậy diện tích lớn nhất của đất rào thu được là $6250\ \ m^2$.

Câu 4: Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43m so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).

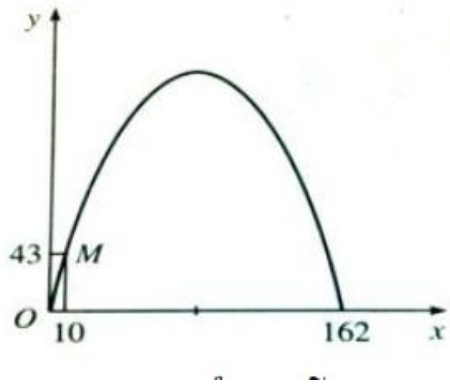


A. $175,6$m. **B.** $197,5$m. **C.** 210m. **D.** $185,6$m.

Lời giải

Chọn D

+ Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng với A, tia Ox cùng hướng với tia OB và tia Oy hướng lên (như hình bên dưới).



+ Hàm số bậc hai có dạng $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$.

+ Theo đề ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c = 0 \\ 100a + 10b + c = 43 \\ 26244a + 162b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\dfrac{43}{1520} \\ b = \dfrac{3483}{760} \end{cases}$

+ Vậy, hàm số bậc hai là: $y = -\dfrac{43}{1520}x^2 + \dfrac{3483}{760}x$.

+ Chiều cao h của cổng là tung độ đỉnh của parabol nên $h = \dfrac{282123}{1520} \approx 185,6\,m$.

Câu 5: Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth ,trong đó t là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao(tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2\text{m}$. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao $8,5\text{m}$ và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao 6m. Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

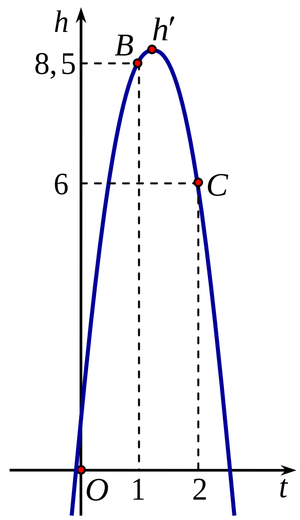
A. $y = 4,9t^2 + 12,2t + 1,2$. **B.** $y = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

C. $y = -4,9t^2 + 12,2t - 1,2$. **D.** $y = -4,9t^2 - 12,2t + 1,2$.

Lời giải

Chọn B.

Tại $t = 0$ ta có $y = h = 1,2$; tại $t = 1$ ta có $y = h = 8,5$; tại $t = 2$, ta có $y = h = 6$.



Chọn hệ trục Oth như hình vẽ.

Parabol (P) có phương trình: $y = at^2 + bt + c$, với $a \neq 0$.

Giả sử tại thời điểm t' thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất h'.

Theo bài ra ta có: tại $t = 0$ thì $h = 1,2$ nên $A(0; 1,2) \in (P)$.

Tại $t = 1$ thì $h = 8,5$ nên $B(1; 8,5) \in (P)$.

Tại $t = 2$ thì $h = 6$ nên $C(2; 6) \in (P)$.

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,2 \\ a = -4,9 \\ b = 12,2 \end{cases}$.

Vậy hàm số Parabol cần tìm có dạng: $y = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

Câu 6: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 360 - 10n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lương cá sau một vụ thu được nhiều nhất?

A. 12. **B.** 18. **C.** 36. **D.** 40.

Lời giải

Chọn B.

Trọng lượng cá trên đơn vị diện tích là

$T = (360 - 10n)n = 360n - 10n^2 = -10(n^2 - 36n + 324 - 324) = -10(n - 18)^2 + 3240$

$\Rightarrow T_{\max} = 3240$ khi $n = 18$.

Câu 7: Một của hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

A. 80 USD. **B.** 160 USD. **C.** 40 USD. **D.** 240 USD.

Lời giải

Chọn A.

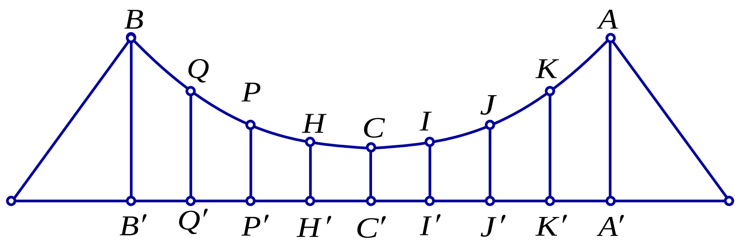
Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y=(120-x)(x-40)=-x^2+160x-4800=-(x-80)^2+1600\le 1600$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

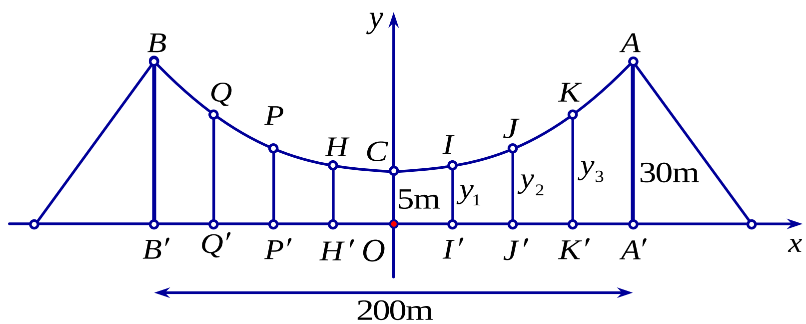
Câu 8: Dây truyền đỡ trên cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trục AA' và BB' với độ cao $30\,\text{m}$. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng $200\,\text{m}$. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $OC=5\,\text{m}$. Gọi Q', P', H', O, I', J', K' là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền: QQ', PP', HH', OC, II', JJ', KK' gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo?



A. Đáp án khác. **B.** $36,87\,\text{m}$. **C.** $73,75\,\text{m}$. **D.** $78,75\,\text{m}$.

Lời giải

Chọn D.



Giả sử Parabol có dạng: $y=ax^2+bx+c$, $a\ne 0$.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, khi đó parabol đi qua điểm $A(100;30)$, và có đỉnh $C(0;5)$. Đoạn AB chia làm 8 phần, mỗi phần $25\,\text{m}$.

$$\text{Suy ra: }\begin{cases}30=10000a+100b+c\\ \dfrac{-b}{2a}=0\\ 5=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{400}\\ b=0\\ c=5\end{cases}\Rightarrow (P): y=\frac{1}{400}x^2+5.$$

Khi đó, tổng độ dài của các dây cáp treo bằng $OC+2y_1+2y_2+2y_3$

$$=5+2\left(\frac{1}{400}.25^2+5\right)+2\left(\frac{1}{400}.50^2+5\right)+2\left(\frac{1}{400}.75^2+5\right)$$

$=78,75(\text{m})$.

Câu 9: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung Parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth, trong đó t là thời gian(tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao(tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 2,4m. Sau đó 1 giây nó đạt được độ cao 10,2m và 2 giây sau khi đá lên nó đạt độ cao 8,5m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên(tính chính xác đến hàng phần trăm)?

A. $t \approx 2,83$ giây **B.** $t \approx 2,82$ giây **C.** $t \approx 2,8$ giây **D.** $t \approx 2,81$ giây

C.BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HÀM SỐ BẬC HAI

Câu 1. Tung độ đỉnh I của parabol $(P): y = 2x^2 - 4x + 3$ là

A. -1. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Chọn B

Ta có :Tung độ đỉnh I là $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = 1$.

Câu 2. Hàm số nào sau đây có giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{3}{4}$?

A. $y = 4x^2 - 3x + 1$.**B.** $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$.**C.** $y = -2x^2 + 3x + 1$.**D.** $y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đạt GTNN nên loại phương án B và C.

Phương án A: Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{8}$ nên loại.

Còn lại chọn phương án D.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x + 2$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. y giảm trên $(2;+\infty)$. **B.** y giảm trên $(-\infty;2)$.

C. y tăng trên $(2;+\infty)$. **D.** y tăng trên $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a = -1 < 0$ nên hàm số y tăng trên $(-\infty;2)$ và y giảm trên $(2;+\infty)$ nên chọn phương án A.

Câu 4. Hàm số nào sau đây nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$?

A. $y = \sqrt{2}x^2 + 1$. **B.** $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$. **C.** $y = \sqrt{2}(x+1)^2$. **D.** $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ nên loại phương án B và **D.**

Phương án A: hàm số y nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và y đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên chọn phương án A.

Câu 5. Cho hàm số: $y=x^2-2x+3$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

A. y tăng trên $(0;+\infty)$. **B.** y giảm trên $(-\infty;2)$.

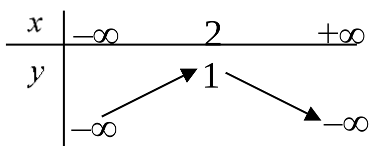
C. Đồ thị của y có đỉnh $I(1;0)$. **D.** y tăng trên $(2;+\infty)$.

Lời giải

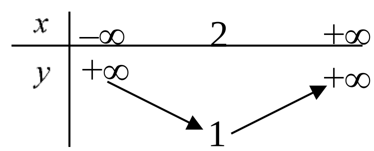
Chọn D

Ta có $a=1>0$ nên hàm số y giảm trên $(-\infty;1)$ và y tăng trên $(1;+\infty)$ và có đỉnh $I(1;2)$ nên chọn phương án **D.** Vì y tăng trên $(1;+\infty)$ nên y tăng trên $(2;+\infty)$.

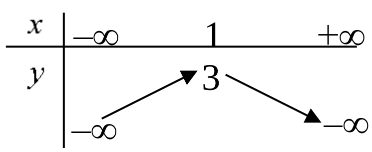
Câu 6. Bảng biến thiên của hàm số $y=-2x^2+4x+1$ là bảng nào sau đây?

A. 

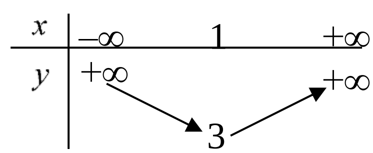
.

B. 

.

C. 

.

D. 

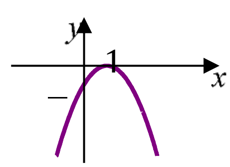
.

Lời giải

Chọn C

Ta có a=-2 <0 và Đỉnh của Parabol $I\left(-\frac{b}{2a};f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)=I(1,3)$.

Câu 7. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?



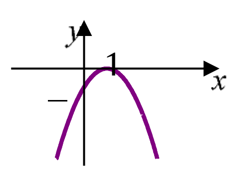
A. $y=-(x+1)^2$. **B.** $y=-(x-1)^2$. **C.** $y=(x+1)^2$. **D.** $y=(x-1)^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Đỉnh $I(1,0)$ và nghịch biến $(-\infty,1)$ và $(1,+\infty)$.

Câu 8. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=-x^2+2x$. **B.** $y=-x^2+2x-1$. **C.** $y=x^2-2x$. **D.** $y=x^2-2x+1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Đỉnh $I(1,0)$ và nghịch biến $(-\infty,1)$ và $(1,+\infty)$.

Câu 9. Parabol $y=ax^2+bx+2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ có phương trình là:

A. $y=x^2+x+2$. **B.** $y=x^2+2x+2$. **C.** $y=2x^2+x+2$. **D.** $y=2x^2+2x+2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: Vì $A,B\in(P)\Leftrightarrow\begin{cases}5=a.1^2+b.1+2\\8=a.(-2)^2+b.(-2)+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$.

Câu 10. Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua $A(8;0)$ và có đỉnh $A(6;-12)$ có phương trình là:

A. $y=x^2-12x+96$. **B.** $y=2x^2-24x+96$.
C. $y=2x^2-36x+96$. **D.** $y=3x^2-36x+96$.

Lời giải

Chọn D

Parabol có đỉnh $A(6;-12)$ nên ta có : $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=6\\-12=a.6^2+b.6+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12a+b=0\\36a+6b+c=-12\end{cases}$ (1)

Parabol đi qua $A(8;0)$ nên ta có : $0=a.8^2+b.8+c\Leftrightarrow 64a+8b+c=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases}12a+b=0\\36a+6b+c=-12\\64a+8b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-36\\c=96\end{cases}$.

Vậy phương trình parabol cần tìm là : $y=3x^2-36x+96$.

Câu 11. Parabol $y=ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x=-2$ và đi qua $A(0;6)$ có phương trình là:

A. $y=\frac{1}{2}x^2+2x+6$. **B.** $y=x^2+2x+6$. **C.** $y=x^2+6x+6$. **D.** $y=x^2+x+4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-\dfrac{b}{2a}=-2\Rightarrow b=4a$.(1)

Mặt khác : Vì $A, I \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = a.(-2)^2 + b.(-2) + c \\ 6 = a.(0)^2 + b.(0) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4.a - 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$ (2)

Kết hợp (1),(2) ta có : $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases}$. Vậy $(P): y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

Câu 12. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0;-1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;1)$ có phương trình là:

A. $y = x^2 - x + 1$. **B.** $y = x^2 - x - 1$. **C.** $y = x^2 + x - 1$. **D.** $y = x^2 + x + 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Vì $A, B, C \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = a.0^2 + b.0 + c \\ -1 = a.(1)^2 + b.(1) + c \\ 1 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = x^2 - x - 1$.

Câu 13. Cho $M \in (P)$: $y = x^2$ và $A(2;0)$. Để AM ngắn nhất thì:

A. $M(1;1)$. **B.** $M(-1;1)$. **C.** $M(1;-1)$. **D.** $M(-1;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M \in (P) \Rightarrow M(t, t^2)$ (loại đáp án **C, D**)

Mặt khác: $AM = \sqrt{(t-2)^2 + t^4} = \sqrt{2}$

(thế M từ hai đáp án còn lại vào nhận được với $M(1;1)$ sẽ nhận được $AM = \sqrt{(1-2)^2 + 1^4} = \sqrt{2}$ ngắn nhất).

Câu 14. Giao điểm của parabol (P): $y = x^2 + 5x + 4$ với trục hoành:

A. $(-1;0)$; $(-4;0)$. **B.** $(0;-1)$; $(0;-4)$. **C.** $(-1;0)$; $(0;-4)$. **D.** $(0;-1)$; $(-4;0)$.

Lời giải

Chọn A

Cho $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

Câu 15. Giao điểm của parabol (P): $y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là:

A. $(1;0)$; $(3;2)$. **B.** $(0;-1)$; $(-2;-3)$. **C.** $(-1;2)$; $(2;1)$. **D.** $(2;1)$; $(0;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Cho $x^2-3x+2=x-1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$.

Câu 16. Giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=x^2+3x+m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

A. $m<-\frac{9}{4}$. **B.** $m>-\frac{9}{4}$. **C.** $m>\frac{9}{4}$. **D.** $m<\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Cho $x^2+3x+m=0\,(1)$

Để đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 3^2-4m>0 \Leftrightarrow 9-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{9}{4}$.

Câu 17. Khi tịnh tiến parabol $y=2x^2$ sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số:

A. $y=2(x+3)^2$. **B.** $y=2x^2+3$ **C.** $y=2(x-3)^2$. **D.** $y=2x^2-3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x+3$ ta có $y=2t^2=2(x+3)^2$.

Câu 18. Cho hàm số $y=-3x^2-2x+5$. Đồ thị hàm số này có thể được suy ra từ đồ thị hàm số $y=-3x^2$ bằng cách

A. Tịnh tiến parabol $y=-3x^2$ sang trái $\frac{1}{3}$ đơn vị, rồi lên trên $\frac{16}{3}$ đơn vị.

B. Tịnh tiến parabol $y=-3x^2$ sang phải $\frac{1}{3}$ đơn vị, rồi lên trên $\frac{16}{3}$ đơn vị.

C. Tịnh tiến parabol $y=-3x^2$ sang trái $\frac{1}{3}$ đơn vị, rồi xuống dưới $\frac{16}{3}$ đơn vị.

D. Tịnh tiến parabol $y=-3x^2$ sang phải $\frac{1}{3}$ đơn vị, rồi xuống dưới $\frac{16}{3}$ đơn vị.

Lời giải

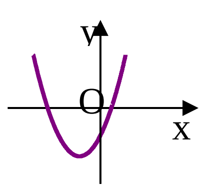
Chọn A

Ta có

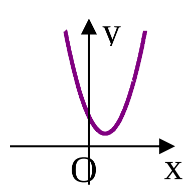
$$y=-3x^2-2x+5=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+5=-3(x^2+2.x.\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9})+5=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{3}$$

Vậy nên ta chọn đáp án A.

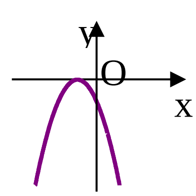
Câu 19. Nếu hàm số $y=ax^2+bx+c$ có $a<0,b<0$ và $c>0$ thì đồ thị của nó có dạng:



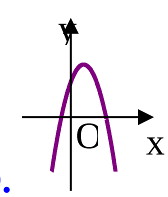
A.



B.



C.



D.

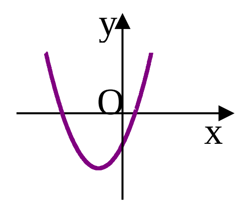
Lời giải

Chọn D

Vì $a<0$ Loại đáp án A,B.

$c>0$ chọn đáp án D.

Câu 20. Nếu hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như sau thì dấu các hệ số của nó là:



A. $a>0;\ b>0;\ c>0.$ **B.** $a>0;\ b>0;\ c<0.$

C. $a>0;\ b<0;\ c>0.$ **D.** $a>0;\ b<0;\ c<0.$

Lời giải

Chọn B

Nhận xét đồ thị hướng lên nên $a>0$.

Giao với $0y$ tại điểm nằm phí dưới trục hoành nên $c<0$.

Mặt khác Vì $a>0$ và Đỉnh I nằm bên trái trục hoành nên $b>0$.

Câu 21. Cho phương trình: $\left(9m^2-4\right)x+\left(n^2-9\right)y=\left(n-3\right)\left(3m+2\right)$. Với giá trị nào của m và n thì phương trình đã cho là đường thẳng song song với trục Ox?

A. $m=\pm\frac{2}{3};n=\pm3$ **B.** $m\neq\pm\frac{2}{3};n=\pm3$

C. $m=\frac{2}{3};n\neq\pm3$ **D.** $m=\pm\frac{3}{4};n\neq\pm2$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(9m^2-4\right)x+\left(n^2-9\right)y=\left(n-3\right)\left(3m+2\right)$

Muốn song song với Ox thì có dạng $by+c=0$,$c\neq0,b\neq0$

Nên $\begin{cases}9m^2-4=0\\n^2-9\neq0\\(n-3)(3m+2)\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\pm\frac{2}{3}\\n\neq\pm3\\n\neq3\\m\neq\frac{-2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{2}{3}\\n\neq\pm3\end{cases}.$

Câu 22. Cho hàm số $\mathrm{f}\left(x\right)=x^2-6x+1$. Khi đó:

A. $f\left(x\right)$ tăng trên khoảng $\left(-\infty;3\right)$ và giảm trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

B. $f\left(x\right)$ giảm trên khoảng $\left(-\infty;3\right)$ và tăng trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

C. $f\left(x\right)$ luôn tăng.

D. $f\left(x\right)$ luôn giảm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a=1>0$ và $x=-\dfrac{b}{2a}=3$

Vậy hàm số $f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;3)$ và tăng trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=x^2-2x+3$. Trong các mệnh đề sau đây, tìm mệnh đề đúng?

A. y tăng trên khoảng $(0;+\infty)$. **B.** y giảm trên khoảng $(-\infty;2)$

C. Đồ thị của y có đỉnh $I(1;0)$ **D.** y tăng trên khoảng $(1;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $a=1>0$ và $x=-\dfrac{b}{2a}=1\Rightarrow I(1,2)$

Vậy hàm số $f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$ và tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 24. Hàm số $y=2x^2+4x-1$. Khi đó:

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và nghịch biến trên $(-2;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và đồng biến trên $(-2;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên $(-1;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên $(-1;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $a=2>0$ và $x=-\dfrac{b}{2a}=-1\Rightarrow I(-1,-3)$

Vậy hàm số $f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$ và tăng trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+2$. Khi đó:

A. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;0)$ **B.** Hàm số giảm trên khoảng $(5;+\infty)$

C. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;2)$ **D.** Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;2)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $a=1>0$ và $x=-\dfrac{b}{2a}=2\Rightarrow I(2,-2)$

Vậy hàm số $f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;2)$ và tăng trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+12$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Hàm số luôn luôn tăng.

B. Hàm số luôn luôn giảm.

C. Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;2)$ và tăng trên khoảng $(2;+\infty)$

D. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;2)$ và giảm trên khoảng $(2;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $a=1>0$ và $x=-\dfrac{b}{2a}=2\Rightarrow I(2,8)$

Vậy hàm số $f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;2)$ và tăng trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)=-x^2+5x+1$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A. y giảm trên khoảng $\left(\dfrac{29}{4};+\infty\right)$ **B.** y tăng trên khoảng $(-\infty;0)$

C. y giảm trên khoảng $(-\infty;0)$ **D.** y tăng trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a=-1<0$ và $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5}{2}$.

Vậy hàm số $f(x)$ tăng trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$ và giảm trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

Câu 28. Cho parabol (P): $y=-3x^2+6x-1$. Khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau là:

A. (P) có đỉnh $I(1;2)$ **B.** (P) có trục đối xứng $x=1$

C. (P) cắt trục tung tại điểm $A(0;-1)$ **D.** Cả a,b,c, đều đúng.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a=-3<0$ và $x=-\dfrac{b}{2a}=1\Rightarrow I(1,2)$

$x=1$ là trục đố xứng.

hàm số $f(x)$ tăng trên khoảng $(-\infty;1)$ và giảm trên khoảng $(1;+\infty)$.

Cắt trục $0y\Rightarrow x=0\Rightarrow y=-1$.

Câu 29. Đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây là trục đối xứng của parabol $y=-2x^2+5x+3$?

A. $x=\dfrac{5}{2}$. **B.** $x=-\dfrac{5}{2}$. **C.** $x=\dfrac{5}{4}$. **D.** $x=-\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a=-2<0$ và $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5}{4}$.

Vậy $x=\dfrac{5}{4}$ là trục đối xứng.

Câu 30. Đỉnh của parabol $y=x^2+x+m$ nằm trên đường thẳng $y=\dfrac{3}{4}$ nếu m bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow y=\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-1}{2}\right)+m=m-\dfrac{1}{4}\Rightarrow I\left(\dfrac{-1}{2},m-\dfrac{1}{4}\right)$

Để $I\in(d):y=\dfrac{3}{4}$ nên $m-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow m=1$.

Câu 31. Parabol $y=3x^2-2x+1$

A. Có đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **B.** Có đỉnh $I\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

C. Có đỉnh $I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** Đi qua điểm $M(-2;9)$.

Lời giải

Chọn C

Đỉnh parabol $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)\Rightarrow I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

(thay hoành độ đỉnh $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{3}$ vào phương trình parabol tìm tung độ đỉnh).

Câu 32. Cho Parabol $y=\dfrac{x^2}{4}$ và đường thẳng $y=2x-1$. Khi đó:

A. Parabol cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt.

B. Parabol cắt đường thẳng tại điểm duy nhất $(2;2)$.

C. Parabol không cắt đường thẳng.

D. Parabol tiếp xúc với đường thẳng có tiếp điểm là $(-1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường là:

$$\frac{x^2}{4}=2x-1\Leftrightarrow x^2-8x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4+2\sqrt{3}\\x=4-2\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy parabol cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt.

Câu 33. Parabol $(P):y=-x^2+6x+1$. Khi đó

A. Có trục đối xứng $x=6$ và đi qua điểm $A(0;1)$.

B. Có trục đối xứng $x=-6$ và đi qua điểm $A(1;6)$.

C. Có trục đối xứng $x=3$ và đi qua điểm $A(2;9)$.

D. Có trục đối xứng $x=3$ và đi qua điểm $A(3;9)$.

Lời giải

Chọn C

Trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}\Leftrightarrow x=\frac{-6}{-2}\Leftrightarrow x=3$

Ta có $-2^2+6.2+1=9\Rightarrow A(2;9)\in(P)$.

Câu 34. Cho parabol $(P):y=ax^2+bx+2$ biết rằng parabol đó cắt trục hoành tại $x_1=1$ và $x_2=2$. Parabol đó là:

A. $y=\frac{1}{2}x^2+x+2$. **B.** $y=-x^2+2x+2$. **C.** $y=2x^2+x+2$. **D.** $y=x^2-3x+2$.

Lời giải

Chọn D

Parabol (P) cắt Ox tại $A(1;0)$, $B(2;0)$.

Khi đó $\begin{cases}A\in(P)\\B\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+2=0\\4a+2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-2\\2a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$

Vậy $(P):y=x^2-3x+2$.

Câu 35. Cho parabol $(P):y=ax^2+bx+2$ biết rằng parabol đó đi qua hai điểm $A(1;5)$ và $B(-2;8)$. Parabol đó là

A. $y=x^2-4x+2$. **B.** $y=-x^2+2x+2$. **C.** $y=2x^2+x+2$. **D.** $y=x^2-3x+2$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases}A\in(P)\\B\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+2=5\\4a-2b+2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\2a-b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$.

Vậy $(P):y=2x^2+x+2$.

Câu 36. Cho parabol $(P):y=ax^2+bx+1$ biết rằng parabol đó đi qua hai điểm $A(1;4)$ và $B(-1;2)$. Parabol đó là

A. $y=x^2+2x+1$. **B.** $y=5x^2-2x+1$. **C.** $y=-x^2+5x+1$. **D.** $y=2x^2+x+1$.

Lời giải

Chọn D

$\begin{cases}A\in(P)\\B\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+1=4\\a-b+1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$.

Vậy $(P):y=2x^2+x+1$.

Câu 37. Biết parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua gốc tọa độ và có đỉnh $I(-1;-3)$. Giá trị a, b, c là

A. $a=-3, b=6, c=0$. **B.** $a=3, b=6, c=0$.
C. $a=3, b=-6, c=0$. **D.** $a=-3, b=-6, c=2$.

Lời giải

Chọn B

Parabol qua gốc tọa độ $O \Rightarrow c=0$

Parabol có đỉnh $I(-1;-3) \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-1 \\ a-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}$.

Câu 38. Biết parabol $(P): y=ax^2+2x+5$ đi qua điểm $A(2;1)$. Giá trị của a là

A. $a=-5$. **B.** $a=-2$. **C.** $a=2$. **D.** $a=3$.

Lời giải

Chọn B

$A(2;1) \in (P) \Rightarrow 4a+4+5=1 \Leftrightarrow a=-2$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$. Biểu thức $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)$ có giá trị bằng

A. ax^2-bx-c. **B.** ax^2+bx-c. **C.** ax^2-bx+c. **D.** ax^2+bx+c.

Lời giải

Chọn D

$f(x+3)=a(x+3)^2+b(x+3)+c=ax^2+(6a+b)x+9a+3b+c$.

$f(x+2)=a(x+2)^2+b(x+2)+c=ax^2+(4a+b)x+4a+2b+c$.

$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$.

$\Rightarrow f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)=ax^2+bx+c$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)=x^2+4x$. Các giá trị của x để $f(x)=5$ là

A. $x=1$. **B.** $x=5$. **C.** $x=1,\ x=-5$. **D.** $x=-1,\ x=-5$
.

Lời giải

Chọn C

$f(x)=5 \Leftrightarrow x^2+4x=5 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Câu 41. Bảng biến thiên của hàm số $y=-x^2+2x-1$ là:

A.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

B.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

C.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

D.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Lời giải

Chọn D

Parabol $y=-x^2+2x-1$ có đỉnh $I(1;0)$ mà $a=-1<0$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 42. Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y=-x^2+2x+1$ là:

A.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

B.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

C.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

D.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải

Chọn C

Parabol $y=-x^2+2x+1$ có đỉnh $I(1;2)$ mà $a=-1<0$ nên hàm số nên đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 43. Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y=x^2-2x+5$?

A.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

B.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

C.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

D.

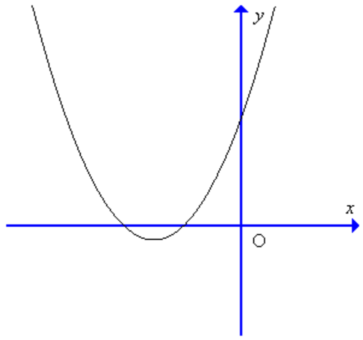
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

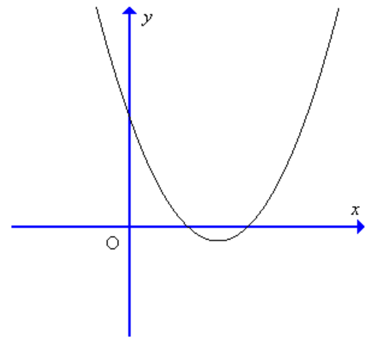
Lời giải

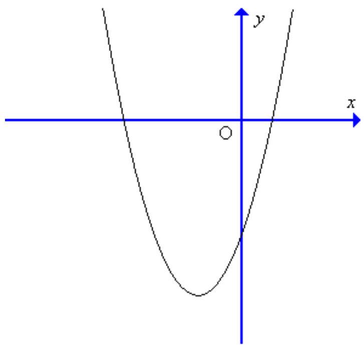
Chọn A

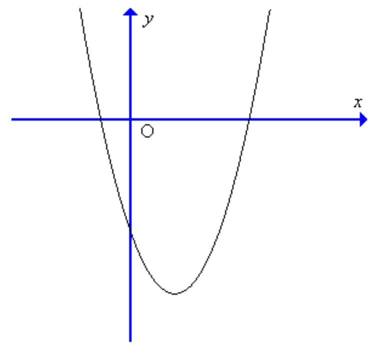
Parabol $y=x^2-2x+5$ có đỉnh $I(1;4)$ mà $a=1>0$ nên hàm số nên nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 44. Đồ thị hàm số $y=4x^2-3x-1$ có dạng nào trong các dạng sau đây?

A. 

B. 

C. 

D. 

Lời giải

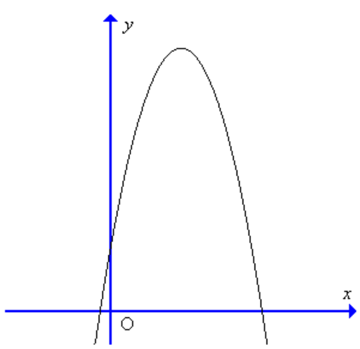
Chọn D

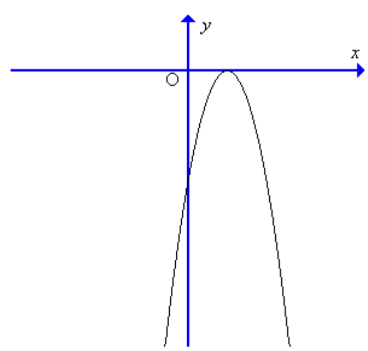
Parabol $y=4x^2-3x-1$ bề lõm hướng lên do $a=4>0$.

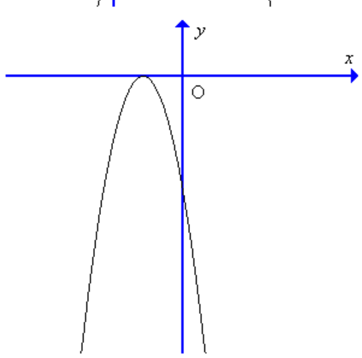
Parabol có đỉnh $I\left(\frac{3}{8};-\frac{25}{16}\right)$. (hoành độ đỉnh nằm bên phải trục tung)

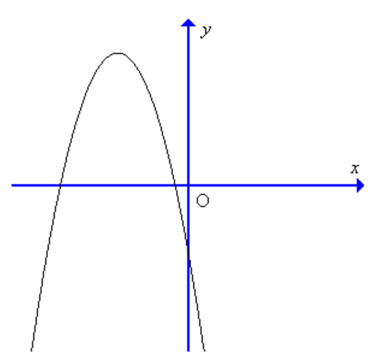
Parabol cắt *Oy* tại tại điểm có tung độ bằng -1. (giao điểm *Oy* nằm bên dưới trục hoành)

Câu 45. Đồ thị hàm số $y=-9x^2+6x-1$ có dạng là?

A. 

B. 

C. 

D. 

Lời giải

Chọn B

Parabol $y=-9x^2+6x-1$ có bề lõm hướng xuống do $a=-3<0$.

Parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{3};0\right)\in Ox$.

Parabol cắt Oy tại điểm có tung độ bằng -1.

Câu 46. Tìm tọa độ giao điểm của hai parabol: $y=\frac{1}{2}x^2-x$ và $y=-2x^2+x+\frac{1}{2}$ là

A. $\left(\frac{1}{3};-1\right)$. **B.** $(2;0)$, $(-2;0)$. **C.** $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{5};\frac{11}{50}\right)$. **D.** $(-4;0),(1;1)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol:

$$\frac{1}{2}x^2-x=-2x^2+x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{5}{2}x^2-2x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\\ x=-\frac{1}{5}\Rightarrow y=\frac{11}{50}\end{array}\right..$$

Vậy giao điểm của hai parabol có tọa độ $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{5};\frac{11}{50}\right)$.

Câu 47. Parabol (P) có phương trình $y=-x^2$ đi qua A, B có hoành độ lần lượt là $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$. Cho O là gốc tọa độ. Khi đó:

A. Tam giác AOB là tam giác nhọn. **B.** Tam giác AOB là tam giác đều.
C. Tam giác AOB là tam giác vuông. **D.** Tam giác AOB là tam giác có một góc tù.

Lời giải

Chọn B

Parabol $(P): y=-x^2$ đi qua A, B có hoành độ $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$ suy ra $A\left(\sqrt{3};3\right)$ và $B\left(-\sqrt{3};3\right)$ là hai điểm đối xứng nhau qua Oy. Vậy tam giác AOB cân tại O.

Gọi I là giao điểm của AB và $Oy\Rightarrow\Delta IOA$ vuông tại I nên

$\tan IAO=\frac{IO}{IA}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow IAO=60^\circ$. Vậy AOB là tam giác đều.

Cách khác :

$OA=OB=2\sqrt{3}$, $AB=\sqrt{\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2+(3-3)^2}=2\sqrt{3}$. Vậy $OA=OB=AB$ nên tam giác AOB là tam giác đều.

Câu 48. Parabol $y=m^2x^2$ và đường thẳng $y=-4x-1$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt ứng với:

A. Mọi giá trị *m*.
B. Mọi $m\neq 2$.
C. Mọi m thỏa mãn $|m|<2$ và $m\neq 0$.
D. Mọi $m<4$ và $m\neq 0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=m^2x^2$ và đường thẳng $y=-4x-1$:

$m^2x^2=-4x-1\Leftrightarrow m^2x^2+4x+1=0\ (1)$

Parabol cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ a\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}4-m^2>0\\ m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2<m<2\\ m\neq 0\end{cases}$.

Câu 49. Tọa độ giao điểm của đường thẳng $y=-x+3$ và parabol $y=-x^2-4x+1$ là:

A. $\left(\frac{1}{3};-1\right)$.
B. $(2;0)$, $(-2;0)$.
C. $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{5};\frac{11}{50}\right)$.
D. $(-1;4)$, $(-2;5)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=-x^2-4x+1$ và đường thẳng $y=-x+3$:

$-x^2-4x+1=-x+3\Leftrightarrow x^2+3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=4\\ x=-2\Rightarrow y=5\end{array}\right.$

Vậy giao điểm của parabol và đường thẳng có tọa độ $(-1;4)$ và $(-2;5)$.

Câu 50. Cho parabol $y=x^2-2x-3$. Hãy chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

A. (P) có đỉnh $I(1;-3)$.
B. Hàm số $y=x^2-2x-3$ tăng trên khoảng $(-\infty;1)$ và giảm trên khoảng $(1;+\infty)$.
C. (P) cắt Ox tại các điểm $A(-1;0)$, $B(3;0)$.
D. Parabol có trục đối xứng là $y=1$.

Lời giải

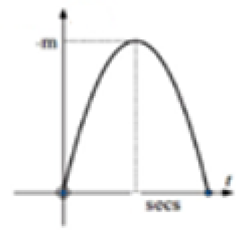
Chọn C

$y=x^2-2x-3$ có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\Rightarrow I(1;-4)$.

Hàm số có $a=1>0$ nên giảm trên khoảng $(-\infty;1)$ và tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

Parabol cắt Ox: $y=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$. Vậy (P) cắt Ox tại các điểm $A(-1;0)$, $B(3;0)$.

Câu 51: Chiều cao h mét của tên lửa sau t giây khi nó được bắn lên theo chiều dọc cho bởi công thức $h(t)=80t-5t^2,(t \geq 0)$. Sau bao lâu thì tên lửa đạt độ cao tối đa?



A. $t=8$ giây

B. $t=4$ giây

C. $t=10$ giây

D. $t=12$ giây

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tên lửa đạt độ cao tối đa khi vị trí tên lửa trùng với đỉnh của Parabol $h(t)=80t-5t^2,(t \geq 0)$.

Khi đó $t=-\dfrac{80}{2.(-5)}=8$ giây.