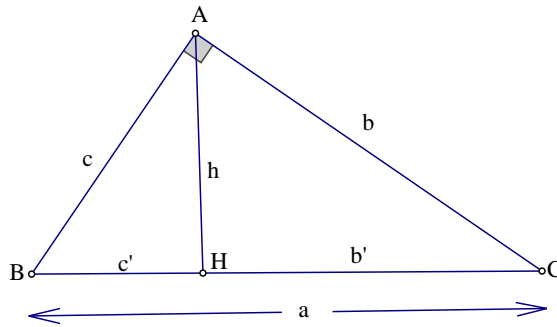


BÀI 1: MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho Tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , ta có:



- 1) Định lí Pitago: Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Hay là: $a^2 = b^2 + c^2$

2. Trong một tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền

$$AC^2 = CH.BC$$

$$AB^2 = BH.BC$$

Hay là: $b^2 = a.b'$;

$$c^2 = a.c'$$

3. Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền)

$$AH^2 = HB.HC$$

Hay là: $h^2 = b'.c'$

4. Trong một tam giác vuông, Tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

Hay là: $a \cdot h = b \cdot c$

5. Trong một tam giác vuông, Nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2}$$

Hay là: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

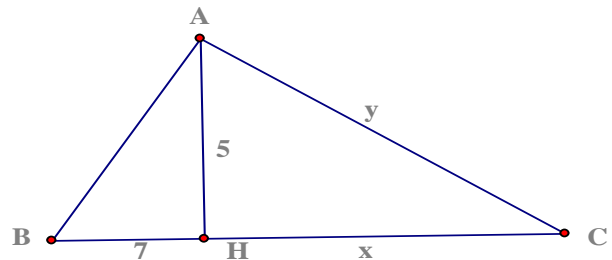
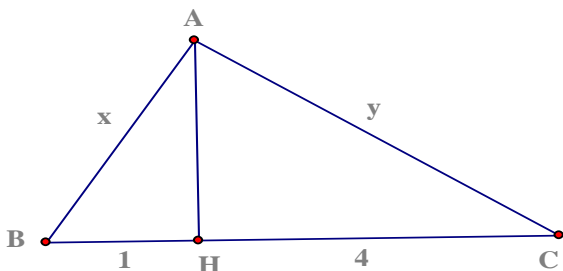
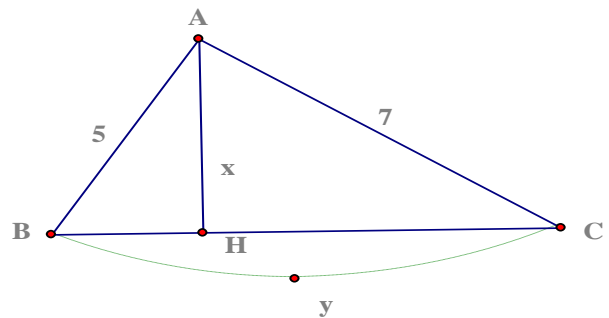
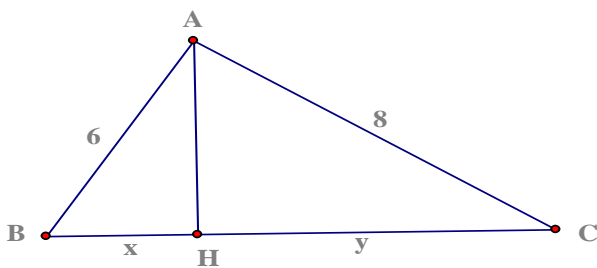
Chú ý: Diện tích tam giác vuông: $S = \frac{1}{2} ab$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông

Phương pháp giải: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH, nếu biết độ dài hai trong sáu đoạn thẳng AB, AC, BC, HA, HB, HC thì ta luôn tính được độ dài bốn đoạn thẳng còn lại

Bài 1: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau



HD:

a. Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có:

Dùng định lý pytago tính $BC = 10$ (cm) $\Rightarrow x = 3,6$ (cm); $y = 6,4$ (cm)

b. Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có:

Dùng định lý pytago tính được: $BC = \sqrt{74} \Rightarrow x = \frac{35\sqrt{74}}{74}$; $y = \sqrt{74}$

c. Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có:

$$AH^2 = HB.HC \Leftrightarrow AH^2 = 4 \Rightarrow AH = 2 \Rightarrow x = \sqrt{5}; y = 2\sqrt{5}$$

d. Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có:

$$AH^2 = HB.HC \Leftrightarrow HC = \frac{AH^2}{HB} = \frac{25}{7} \Rightarrow x = \frac{25}{4}; y = \frac{5\sqrt{41}}{4}$$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Trong các đoạn thẳng sau: AB, AC, BC, AH, BH, CH hãy tính độ dài các đoạn thẳng còn lại nếu biết:

a) $AB = 15$ cm; $BC = 25$ cm

b) $BH = 18$ cm; $CH = 32$ cm

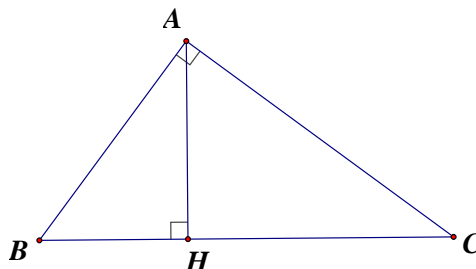
c) $AB = 6$ cm; $BH = 3,6$ cm

d) $AC = 12$ cm; $AH = 7,2$ cm

e) $AH = 7,2$ cm; $CH = 9,6$ cm

f) $BC = 25$ cm; $AH = 12$ cm ($AB < AC$)

HD:



a) Tính AC,CH,BH,AH?

+) Áp dụng định lý pytago vào tam giác ABC vuông tại A ta có :

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25^2 - 15^2 = 400 = 20^2$$
$$\Rightarrow AC = 20(\text{cm})$$

+) Áp dụng hệ thức lượng ta có:

$$*) AC^2 = BC \cdot CH. \text{ Suy ra: } 20^2 = 25 \cdot CH \Rightarrow CH = 400 : 25 = 16(\text{cm})$$

$$*) BH = BC - CH = 25 - 16 = 9(\text{cm})$$

$$*) AH \cdot BC = AB \cdot AC. \text{ Suy ra: } AH \cdot 25 = 15 \cdot 20 \Rightarrow AH = 300 : 25 = 12(\text{cm})$$

b) Tính BC, AH, AB, AC?

$$*) \text{Ta có : } BC = BH + CH = 18 + 32 = 50 (\text{cm})$$

$$*) AH^2 = BH \cdot CH = 18 \cdot 32 = 576 \Rightarrow AH = 24 (\text{cm})$$

$$*) AB^2 = BC \cdot BH = 50 \cdot 18 = 900 \Rightarrow AB = 30(\text{cm})$$

$$*) AC^2 = BC \cdot CH = 50 \cdot 32 = 1600 \Rightarrow AC = 40(\text{cm})$$

c) Tính CH, BC, AC, AH?

$$+) AB^2 = BC \cdot BH. \text{ Suy ra: } 6^2 = BC \cdot 3,6 \Rightarrow BC = 36 : 3,6 = 10(\text{cm})$$

$$+) CH = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4(\text{cm})$$

$$+) AH^2 = BH \cdot CH = 3,6 \cdot 6,4 = 4,8(\text{cm})$$

$$+) AC^2 = BC \cdot CH = 10 \cdot 6,4 = 64 \Rightarrow AC = 8(\text{cm})$$

d) Tính AB, BC, BH, CH?

$$+) HC^2 = AC^2 - AH^2 = 12^2 - 7,2^2 = 92,16 = 9,6^2$$
$$\Rightarrow HC = 9,6(\text{cm})$$

$$+) AH^2 = BH \cdot CH. \text{ Suy ra: } 7,2^2 = BH \cdot 9,6 \Rightarrow BH = 5,4(\text{cm})$$

$$+) BC = BH + HC = 5,4 + 9,6 = 15(\text{cm})$$

$$+) AB^2 = BC \cdot BH = 15 \cdot 5,4 = 81 \Rightarrow AB = 9(\text{cm})$$

e) Tính AB, AC, BH, BC?

+) $AH^2 = BH \cdot CH$. Suy ra: $7,2^2 = BH \cdot 9,6 \Rightarrow BH = 5,4(\text{cm})$

+) $BC = BH + HC = 5,4 + 9,6 = 15(\text{cm})$

+) $AB^2 = BC \cdot BH = 15 \cdot 5,4 = 81 \Rightarrow AB = 9(\text{cm})$

+) $AC^2 = BC \cdot CH = 15 \cdot 9,6 = 144 \Rightarrow AC = 12(\text{cm})$

f) Tính AB, AC, BH, CH?

Đặt $BH = x$, $CH = y$ (ĐK : $x < y$ vì $AB < AC$)

+) $BC = BH + CH \Rightarrow x + y = 25 \Rightarrow x = 25 - y$

+) Áp dụng hệ thức lượng ta có: $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow x \cdot y = 144 \Leftrightarrow (25 - y) \cdot y = 144$

$$y^2 - 25y + 144 = 0 \Rightarrow x_1 = 9; x_2 = 16$$
$$\Rightarrow y_1 = 16; y_2 = 9$$

Vì $x < y$ nên $x = 9$; $y = 16$ hay $BH = 9(\text{cm})$; $CH = 16(\text{cm})$

+) $AB^2 = BC \cdot BH = 25 \cdot 9 = 225 \Rightarrow AB = 15(\text{cm})$

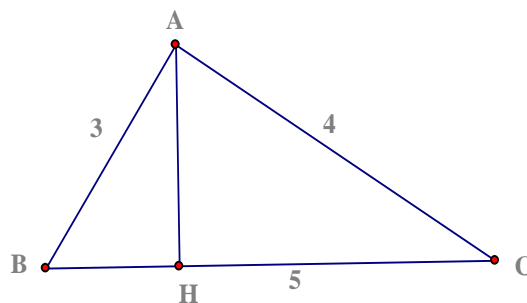
+) $AC^2 = BC \cdot CH = 25 \cdot 16 = 400 \Rightarrow AC = 20(\text{cm})$

Bài 3: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC),

a) Cho biết $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Tính BH, CH, AC và AH

b) Cho biết $BH = 9\text{cm}$, $CH = 16\text{cm}$ Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, BC và AH

HD:



a) Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có:

$$+) AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{9}{5} = 1,8(cm) \Rightarrow CH = 3,2(cm)$$

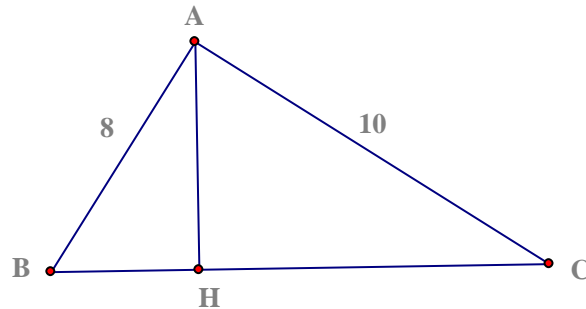
$$+) AC^2 = CB \cdot BC \Rightarrow AC^2 = 5 \cdot 3,2 = 16 \Rightarrow AC = 4(cm)$$

$$+) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \Rightarrow AH = 2,4(cm)$$

b) Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có:

$$AB = 15cm, AC = 20cm, BC = 25cm, AH = 12cm$$

Bài 4: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), có: AC = 10cm , AB = 8cm. Tính BC, BH, CH và AH.



HD:

Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (pytago)

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{41}(cm)$$

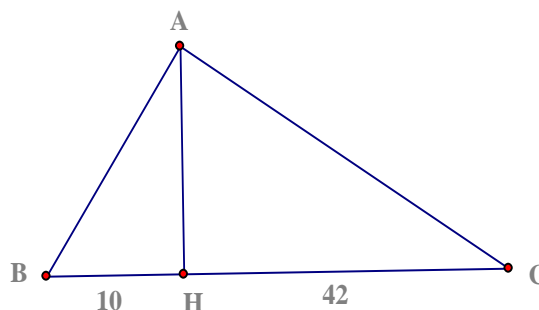
$$+) AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{64}{2\sqrt{41}} = \frac{32}{\sqrt{41}}(cm)$$

$$+) CH = BC - BH = 2\sqrt{41} - \frac{32}{\sqrt{41}} = \frac{50}{\sqrt{41}}(cm)$$

$$+) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} = \frac{1}{64} + \frac{1}{100} \Rightarrow AH = 6,4(cm)$$

Bài 5: Cho ΔABC vuông
thuộc BC), có: BH =
BC, AH, AB và AC.

tại A, đường cao AH (H
10cm , CH = 42cm. Tính



HD:

Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, có:

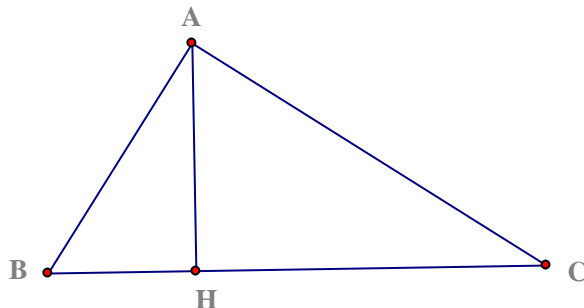
$$+) BC = BH + HC = 52(cm)$$

$$+) AB^2 = BH \cdot BC = 10 \cdot 52 = 520 \Rightarrow AB = 2\sqrt{130}(cm)$$

$$+) AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH = 2\sqrt{105}(cm)$$

$$+) AC^2 = AH^2 + HC^2 (pytago) \Rightarrow AC = 2\sqrt{546}(cm)$$

Bài 6: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC). Biết $AB : AC = 5 : 12$ và $BC = 26$ cm. Tính HB và HC.



HD:

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{AC}{12} = k (k > 0) \Rightarrow \begin{cases} AB = 5k \\ AC = 12k \end{cases}$$

Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC),

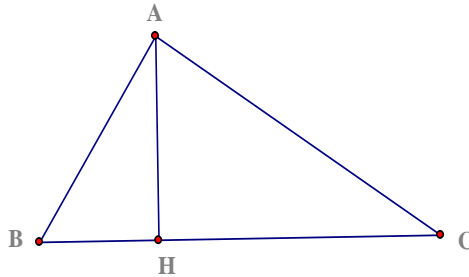
$$\text{Ta có: } AB^2 + AC^2 = BC^2 (pytago) \Rightarrow 25k^2 + 144k^2 = 26^2 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow AB = 10; AC = 24(cm)$$

+) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{10^2}{26} = \frac{50}{13}(cm); HC = BC - BH = 26 - \frac{50}{13} = \frac{288}{13}(cm)$$

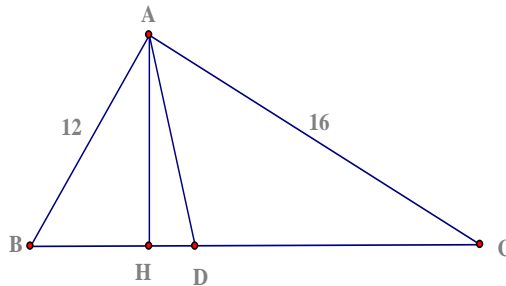
Bài 7: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC). Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}; BC = 122(cm)$. Tính HB và HC

HD:



Làm tương tự, ta tính được: $BH = 50cm, CH = 72cm$

Bài 8: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), $AB = 12cm$, $AC = 16cm$, phân giác AD. Tính độ dài đoạn HD.



HD:

Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2(pytago) \Rightarrow BC = 20(cm)$$

+) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

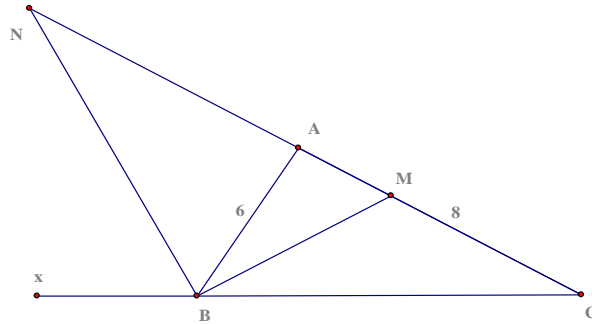
$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{12^2}{20} = 7,2(cm)$$

+) Ta có AD là phân giác của góc BAC

$$\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BD}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{20}{7} (cm)$$

$$\Rightarrow DB = \frac{20}{7} \cdot 3 = \frac{60}{7} (cm) \Rightarrow HD = DB - BH = \frac{60}{7} - \frac{36}{5} = \frac{552}{35} (cm)$$

Bài 9: Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 6cm$, $BC = 10cm$, phân giác trong và ngoài tại đỉnh B cắt AC lần lượt tại M và N. Tính BM, BN?



HD:

Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 (pytago) \Rightarrow AC = 8(cm)$$

+) Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AM}{3} = \frac{MC}{5} = \frac{AC}{8} = 1 \Rightarrow AM = 3(cm)$$

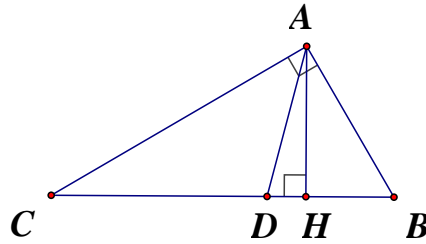
+) Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông BMn, ta có:

$$AB^2 = AM \cdot AN \Rightarrow 36 = 3 \cdot AN \Rightarrow AN = 12(cm); MN = AM + AN = 15(cm)$$

$$BM^2 = MN \cdot AM = 15 \cdot 3 \Rightarrow BM = 3\sqrt{5}(cm); BN^2 = MN \cdot AN = 15 \cdot 12 \Rightarrow BN = 6\sqrt{5}(cm)$$

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và đường phân giác AD (D \in BC). Biết $DB = 15$ cm, $CD = 20$ cm. Tính AH, AD (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

HD:



Ta có $BC = BD + DC = 15 + 20 = 35(\text{cm})$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ta có :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} \Rightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{9+16} = \frac{BC^2}{25} = \frac{35^2}{25} = 49$$

(Định lý pytago và dãy tỉ số bằng nhau)

Do đó $AB^2 = 9 \cdot 49 \Rightarrow AB = 21(\text{cm})$

$AC^2 = 16 \cdot 49 \Rightarrow AC = 28(\text{cm})$

*) Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có:

+) $AH \cdot BC = AB \cdot AC$. Suy ra: $AH \cdot 35 = 21 \cdot 28 \Rightarrow AH = \frac{21 \cdot 28}{35} = 16,8(\text{cm})$

+) $AB^2 = BC \cdot BH$. Suy ra: $21^2 = 35 \cdot BH \Rightarrow BH = 12,6(\text{cm})$

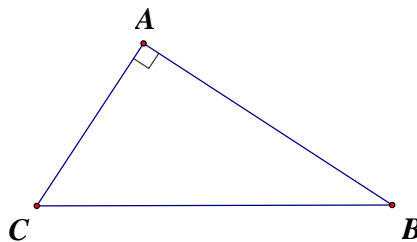
Vì $BH < BD$ nên H nằm giữa B và D $\Rightarrow HD = BD - BH = 15 - 12,6 = 2,4(\text{cm})$

+) Áp dụng định lý pytago vào tam giác AHD vuông tại H ta có :

$$AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} = \sqrt{16,8^2 + 2,4^2} = 12\sqrt{2}(\text{cm})$$

Bài 11: Cạnh huyền của một tam giác vuông lớn hơn một cạnh góc vuông là 1cm, còn tổng của hai cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền 4cm. Hãy tính các cạnh của tam giác vuông này.

HD:



Giả sử theo gt tam giác ABC vuông tại A có $BC - AB = 1$ (1)

$$\text{và } AB + AC - BC = 4 \quad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow BC = 1 + AB$ thay vào (2) ta được : $AB + AC - 1 - AB = 4$

Do đó $AC = 5$ (cm)

Mặt khác theo định lý py-ta-go ta có :

$$BC^2 - AB^2 = AC^2 = 25 \Leftrightarrow (BC - AB).(BC + AB) = 25$$

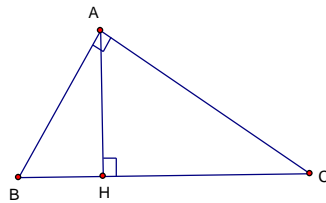
Thay $BC - AB = 1 \Rightarrow BC + AB = 25$ (3)

Từ (1) và (3) ta có : $BC = 13$ (cm) ; $AB = 12$ (cm)

Vậy : $BC = 13$ (cm) ; $AB = 12$ (cm); $AC = 5$ (cm)

Bài 12: Đường cao của một tam giác vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 1 và 2. Hãy tính các cạnh của Δ vuông này.

HD:



Giả sử tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH vuông góc với BC

Theo GT ta có $BH = 1$; $HC = 2 \Rightarrow BC = BH + HC = 1 + 2 = 3$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có:

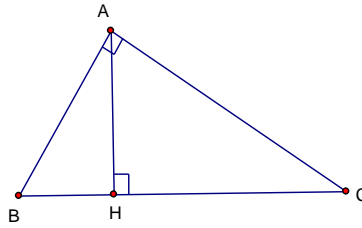
$$+) AB^2 = BC . BH = 3.1 = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$$

$$+) AC^2 = BC . CH = 3. 2= 6 \Rightarrow AC = \sqrt{6}$$

Vậy $AB = \sqrt{3}$; $AC = \sqrt{6}$; $BC = 3$

Bài 13: Một tam giác vuông có cạnh huyền là 5, còn đường cao ứng với cạnh huyền là 2. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.

HD:



Cách 1: Xét ΔABC vuông tại A có $AB < AC$; $AH = 2$; $BC = 5$

Đặt $BH = x$ (Điều kiện $0 < x < 2,5$) $\Rightarrow HC = 5 - x$

Theo định lý 2: $BH \cdot CH = AH^2$

$$\Rightarrow x(5-x) = 2^2 \Leftrightarrow 5x - x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

$x = 1$ (thỏa mãn); $x = 4$ (không thỏa mãn)

Theo định lý 1 ta có: $AB^2 = BC \cdot BH = 5 \cdot 1 = 5 \Rightarrow AB = \sqrt{5}$

Cách 2 Giả sử tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH có $BC = 5\text{cm}$, $AH = 2\text{ cm}$

Đặt $AB = x$; $AC = y$ (ĐK: $x > 0$; $y > 0$)

*) Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow x \cdot y = 10 \quad (1)$$

Áp dụng định lý pytago ta có

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy = 25$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2 \cdot 10 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 45 \Rightarrow x+y = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x = 3\sqrt{5} - y$$

Thay $x = 3\sqrt{5} - y$ vào (1) ta có : $(3\sqrt{5} - y) \cdot y = 10 \Leftrightarrow y^2 - 3\sqrt{5}y + 10 = 0$

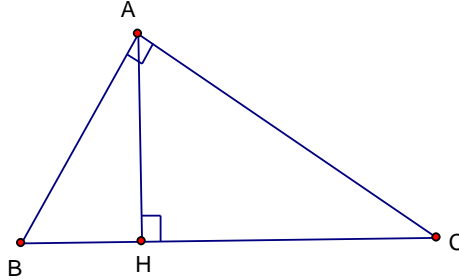
$$y_1 = 2\sqrt{5}; y_2 = \sqrt{5}$$

Từ đó $x_1 = \sqrt{5}; x_2 = 2\sqrt{5}$

Vậy cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông là $\sqrt{5}$

Bài 14: Cho một tam giác vuông. Biết tỉ số hai cạnh góc vuông là 3 : 4 và cạnh huyền là 125cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông và hình chiếu của cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

HD:



Xét ΔABC vuông tại A có $AB:AC=3:4$ và $BC = 125\text{cm}$

$$\text{Ta có } AB:AC=3:4 \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = k \text{ (với } k > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow AB = 3k; AC = 4k$$

ΔABC vuông tại A. Theo định lý Py ta go ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (3k)^2 + (4k)^2 = 125^2$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 + 16k^2 = 15625 \Leftrightarrow 25k^2 = 15625 \Leftrightarrow k^2 = 625$$

$$\Leftrightarrow k = 25 \text{ (vì } k > 0 \text{)}$$

$$AB = 3.25 = 75\text{cm}; AC = 4.25 = 100\text{cm}$$

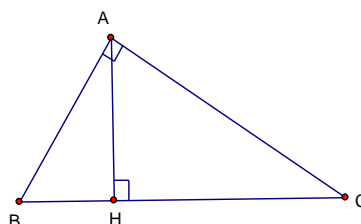
Theo định lý 1:

$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{75^2}{125} = 45\text{cm}$$

$$CH = BC - BH = 125 - 45 = 80\text{cm}$$

Bài 15: Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$, đường cao AH = 30 cm. Tính BH, HC.

HD:



Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{AC}{6} = k$ (với $k > 0$)

$\Rightarrow AB = 5k; AC = 6k$

ΔABC vuông tại A. Theo định lý Py ta go ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (5k)^2 + (6k)^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow 25k^2 + 36k^2 = BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 61k^2 \Rightarrow BC = k\sqrt{61}$$

Theo định lý 3:

$$AB.AC = BC.AH \Rightarrow 5k.6k = k\sqrt{61}.30 \Rightarrow k = \sqrt{61}$$

$$AB = 5\sqrt{61} \text{ (cm)}; AC = 6\sqrt{61} \text{ (cm)}$$

$$BC = \sqrt{61}.\sqrt{61} = 61$$

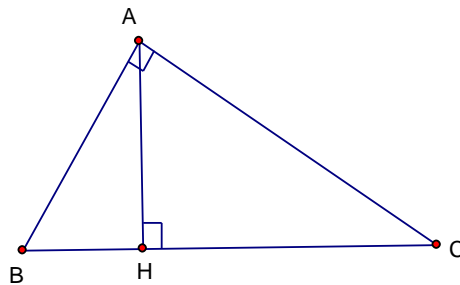
Theo định lý 1:

$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{(5\sqrt{61})^2}{61} = 25 \text{ cm}$$

$$CH = BC - BH = 61 - 25 = 36 \text{ cm}$$

Bài 16: Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{7}$, đường cao AH = 42 cm. Tính BH, HC.

HD:



Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{7} = k$ (với $k > 0$)

$\Rightarrow AB = 3k; AC = 7k$

ΔABC vuông tại A. Theo định lý Py ta go ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (3k)^2 + (7k)^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 + 49k^2 = BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 58k^2 \Rightarrow BC = k\sqrt{58}$$

Theo định lý 3:

$$AB.AC = BC.AH \Rightarrow 3k.7k = k\sqrt{58}.42 \Rightarrow k = 2\sqrt{58}$$

$$AB = 6\sqrt{58} \text{ (cm)}; AC = 14\sqrt{58} \text{ (cm)}$$

$$BC = 2\sqrt{58}.\sqrt{58} = 116 \text{ (cm)}$$

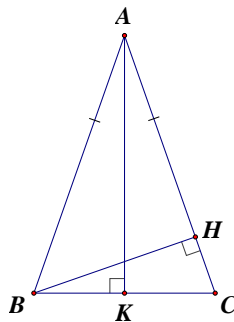
Theo định lý 1:

$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow BH = \frac{(6\sqrt{58})^2}{116} = 18 \text{ cm}$$

$$CH = BC - BH = 116 - 18 = 98 \text{ cm}$$

Bài 17: Cho ΔABC cân tại A. Gọi H là hình chiếu của B trên cạnh AC. Tính cạnh đáy BC của tam giác, biết rằng $AH = 7$, $HC = 2$.

HD:



Kẻ $AK \perp BC$.

Vì ΔABC cân tại A nên AK là đường cao đồng thời là đường trung tuyến ứng với BC

$$\text{Do đó } CK = BK = \frac{1}{2}BC$$

$$\text{Mặt khác: } AC = AH + HC = 7 + 2 = 9 \text{ (cm)}$$

Xét ΔCKA và ΔCHB có: \hat{C} chung

$$\hat{CHB} = \hat{CKA} = 90^\circ$$

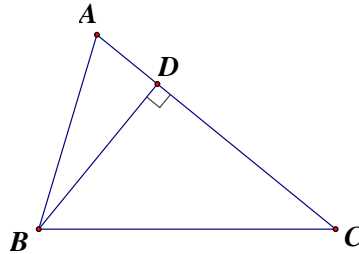
$$\text{Do đó } \Delta CKA \sim \Delta CHB \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{CK}{CH} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow CK.BC = AC.CH$$

$$\text{Nên } \frac{1}{2}BC.BC = 9.2 \Rightarrow BC^2 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

Vậy $BC = 6$

Bài 18: Trong tam giác ABC, biết $AB = 10\text{cm}$, $BC = 17\text{cm}$. Vẽ đường cao BD với D thuộc cạnh AC và $BD = 8\text{cm}$. Tính AC.

HD:



Áp dụng định lý pytago vào $\triangle ABD$ vuông tại D ta có:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Leftrightarrow 10^2 = AD^2 + 8^2 \Rightarrow AD = 6(\text{cm})$$

Áp dụng định lý pytago vào $\triangle BDC$ vuông tại D ta có:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 \Leftrightarrow 17^2 = 8^2 + DC^2 \Rightarrow DC = 15(\text{cm})$$

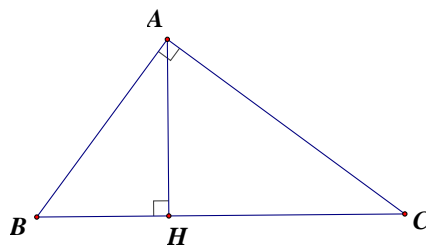
$$\text{Vậy } AC = AD + DC = 6 + 15 = 21(\text{cm})$$

Bài 19: Cho $\triangle ABC$, đường cao AH.

a) Cho $AH = 16$, $BH = 25$. Tính AB, AC, BC, CH.

b) Cho $AB = 12$, $BH = 6$. Tính AH, AC, BC, CH.

HD:



a) Áp dụng định lý pytago vào tam giác ABH vuông tại H ta có :

$$*)AB^2 = AH^2 + BH^2 = 16^2 + 25^2 = 881(\text{cm}) \Rightarrow AB = \sqrt{881} \approx 29,68(\text{cm})$$

$$*)\text{Áp dụng hệ thức lượng ta có } +)AH^2 = BH.CH \Leftrightarrow 16^2 = 25.CH \Rightarrow CH = 10,24(\text{cm})$$

$$\text{Do đó } BC = BH + HC = 25 + 10,24 = 35,24(\text{cm})$$

$$+)AC^2 = CH.BC = 10,24.35,24 = 360,8576 \Rightarrow AC \approx 19(\text{cm})$$

b) Áp dụng định lý pytago vào tam giác ABH vuông tại H ta có :

$$*) AB^2 = AH^2 + BH^2 \Leftrightarrow 12^2 = AH^2 + 6^2 \Rightarrow AH^2 = 108 \Rightarrow AH = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

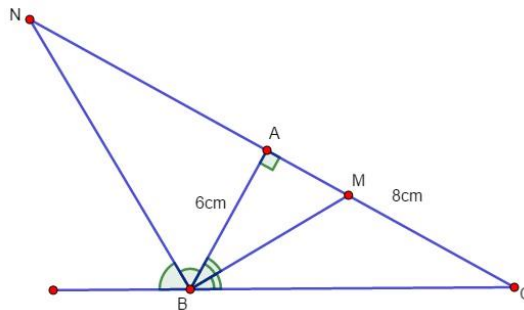
$$*) \text{ Áp dụng hệ thức lượng ta có } AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow 108 = 6 \cdot CH \Rightarrow CH = 18 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó } BC = BH + HC = 6 + 18 = 24 \text{ (cm)}$$

$$+) AC^2 = CH \cdot BC = 18 \cdot 24 = 432 \Rightarrow AC = 12\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Bài 20: Cho ΔABC vuông tại A có cạnh $AB = 6\text{cm}$ và $AC = 8\text{cm}$. Các đường phân giác trong và ngoài của góc B cắt đường thẳng AC lần lượt tại M và N. Tính các đoạn thẳng AM và AN.

HD:



$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 10 \text{ cm}$$

Vì BM là đường phân giác của góc B nên ta có:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{MA}{MA+MC} = \frac{AB}{AB+BC} \text{ (tính chất tỉ lệ thức)}$$

$$\text{Suy ra: } MA = \frac{AB(MA+MC)}{AB+BC} = \frac{6 \cdot 8}{6+10} = \frac{48}{16} = 3 \text{ cm}$$

Vì BN là đường phân giác của góc ngoài đỉnh B nên ta có: $BM \perp BN$.

Suy ra tam giác BMN vuông tại B.

Theo hệ thức liên hệ giữa đường cao và hình chiếu hai cạnh góc vuông, ta có:

$$AB^2 = AM \cdot AN$$

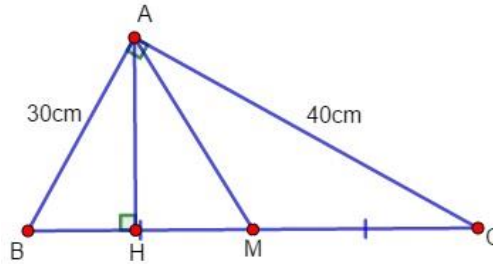
$$\text{Suy ra: } AN = \frac{AB^2}{AM} = \frac{6^2}{3} = 12 \text{ cm.}$$

Bài 21: Cho ΔABC vuông ở A, $AB = 30\text{cm}$, $AC = 40\text{cm}$, đường cao AH, trung tuyến AM.

a) Tính BH, HM, MC.

b) Tính AH.

HD:



a) Xét tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 50\text{ cm}$

Tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{30^2}{50} = 18\text{ cm.}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 24\text{ cm}$$

Vì AM là trung tuyến của tam giác ABC nên $AM = \frac{1}{2}BC = 25\text{ cm}$

$$\Rightarrow HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 7\text{ cm.}$$

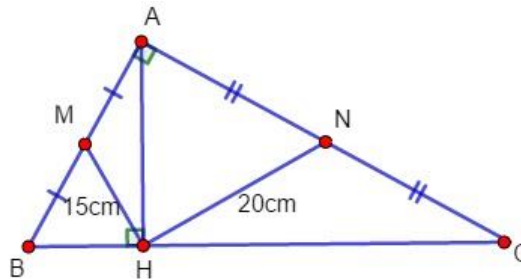
$$MC = \frac{1}{2}BC = 25\text{ cm (M là trung điểm của BC).}$$

b) $AH = 24\text{ cm.}$

Bài 22: Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC.

Biết $HM = 15\text{cm}$, $HN = 20\text{cm}$. Tính HB, HC, AH.

HD:



Xét tam giác ABH vuông tại H có HM là trung tuyến nên $HM = \frac{1}{2}AB$

$$\Rightarrow AB = 2HM = 30\text{ cm.}$$

Xét tam giác AHC vuông tại H có HN là trung tuyến nên $HN = \frac{1}{2}AC$

$$\Rightarrow AC = 2HN = 40 \text{ cm.}$$

Xét tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

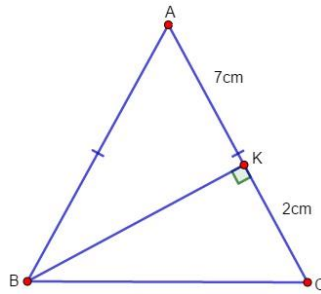
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{30^2} + \frac{1}{40^2} = \frac{1}{576} \Rightarrow AH = 24 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 18 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 32 \text{ cm.}$$

Bài 23: Cho ΔABC cân ở A , đường cao BK . Biết $AK = 7\text{cm}$, $KC = 2\text{cm}$.
Tính BC .

HD:



Theo giả thiết tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC = 7 + 2 = 9\text{cm}$.

Xét tam giác ABK vuông tại K .

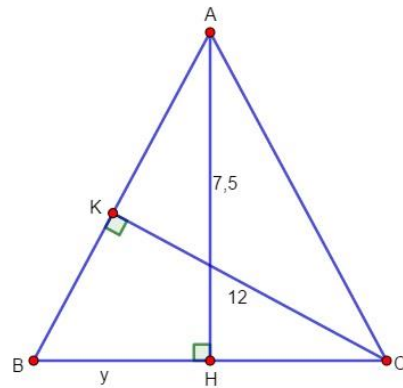
$$\Rightarrow BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{9^2 - 7^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Xét tam giác BKC vuông tại K

$$\Rightarrow BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 2^2} = 6 \text{ cm.}$$

Bài 24: Cho ΔABC cân tại A , kẻ đường cao AH và CK . Biết $AH = 7,5 \text{ cm}$;
 $CK = 12 \text{ cm}$. Tính BC , AB .

HD:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} CK \cdot AB$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 2y = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{7,5 \cdot 2y}{12} = \frac{5}{4} y.$$

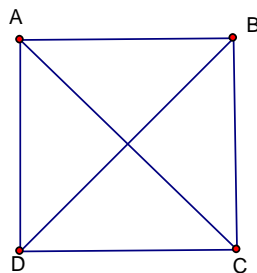
$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Leftrightarrow \frac{25}{16} y^2 = y^2 + 7,5^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{16} y^2 = 7,5^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 \Leftrightarrow y = 10$$

$$\Rightarrow BC = 20; AB = \frac{25}{2}.$$

Bài 25: Cho h.vuông ABCD có độ dài cạnh là a. Tính độ dài đường chéo theo a.

HD:



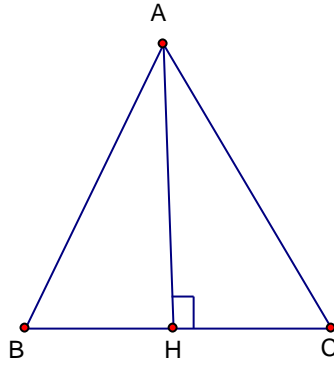
Tứ giác ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB = BC = CD = DA = a$

ΔABD vuông tại A. Theo định lý Py ta go ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Bài 26: Hãy tính đường cao của tam giác đều cạnh a.

HD:



Xét ΔABC đều có cạnh là a

Kẻ đường cao $AH \Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow BH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

ΔAHB vuông tại H theo định lý Py ta go ta có

$$BH^2 + AH^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Bài 27: Hãy tìm tam giác vuông trong các tam giác có độ dài 3 cạnh sau:

a) $IJ = 6, JK = 10$

$KI = 8;$

b) $RS = 7$

$ST = 24$

$TR = 25;$

c) $AB = \frac{1}{3}$

$BC = \frac{1}{4}$

$AC = \frac{1}{5};$

d) $MN = 6,5$

$ML = 3,3$

$LN = 5,6.$

HD:

Các tam giác vuông có độ dài 3 cạnh thỏa mãn đề bài là

+) ΔIJK vuông tại I vì theo định lý pytago đảo

$$\text{Ta có: } JK^2 = IJ^2 + KI^2 \text{ (vì } 10^2 = 6^2 + 8^2 \text{)}$$

+) ΔRST vuông tại S vì theo định lý pytago đảo

$$\text{Ta có: } TR^2 = RS^2 + ST^2 \text{ (vì } 25^2 = 7^2 + 24^2 \text{)}$$

+) ΔMNL vuông tại L vì theo định lý pytago đảo

$$\text{Ta có: } MN^2 = ML^2 + LN^2 \text{ (vì } 6,5^2 = 3,3^2 + 5,6^2 \text{)}$$

Bài 28: Cho tam giác có độ dài các cạnh là 5, 12, 13. Tìm góc của tam giác đối diện với cạnh có độ dài 13.

HD:

Gọi tam giác ABC có độ dài 3 cạnh thỏa mãn đề bài là $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$

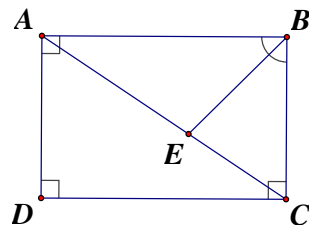
$$\text{Ta có } AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 = BC^2$$

Theo định lý pytago đảo suy ra ΔABC vuông tại A.

Vậy góc đối diện với cạnh có độ dài 13 là $\widehat{BAC} = 90^\circ$

Bài 29: Cho hình chữ nhật ABCD. Đường phân giác của B cắt đường chéo AC thành hai đoạn $4\frac{2}{7}$ m và $5\frac{5}{7}$ m. Tính các kích thước của hình chữ nhật.

HD:



Gọi E là giao điểm tia phân giác góc B với AC.

$$\text{Theo giả thiết ta có : } AC = AE + EC = \frac{40}{7} + \frac{30}{7} = 10 \text{ (cm)}$$

Áp dụng tính chất tia phân giác trong tam giác ABC ta có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{\frac{40}{7}}{\frac{30}{7}} = \frac{4}{3}$$

Áp dụng t/c tỉ lệ thức, tính chất dãy tỉ số bằng nhau và định lý pytago ta có:

$$\frac{AB}{4} = \frac{BC}{3} \Rightarrow \frac{AB^2}{16} = \frac{BC^2}{9} = \frac{AB^2 + BC^2}{16+9} = \frac{AC^2}{25} = \frac{10^2}{25} = 4$$

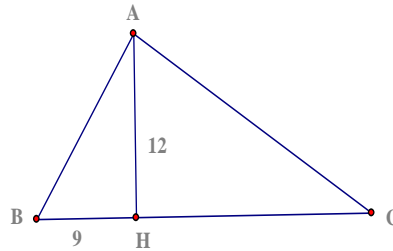
$$\text{Do đó } AB^2 = 16.4 \Rightarrow AB = 8 \text{ (cm)}$$

$$BC^2 = 9.4 \Rightarrow BC = 6 \text{ (cm)}$$

Vậy các kích thước của hình chữ nhật là 8cm và 6 cm

Dạng 2: Tính diện tích, chu vi

Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC). Tính diện tích và chu vi của tam giác ABC biết AH = 12 cm , BH = 9 cm



HD:

Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), ta có:

$$+) AH^2 = BH.CH \Rightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{12^2}{9} = 16 \Rightarrow CH = 4(cm)$$

$$+) AB^2 = BH.BC = 9.13 = 112 \Rightarrow AB = 3\sqrt{13}(cm); AC^2 = BC.CH = 13.4 = 52 \Rightarrow AC = 2\sqrt{13}(cm)$$

$$+) S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} .12.13 = 78(cm^2)$$

$$+) \text{Chu vi } \Delta ABC = AB + BC + CA = 3\sqrt{13} + 2\sqrt{13} + 13 = 13 + 5\sqrt{13}(cm)$$

Bài 2: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), biết $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$; AH = 420(cm).

Tính chu vi ΔABC ?

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{AB}{AC} = \frac{20}{21} \Rightarrow \frac{AB}{20} = \frac{AC}{21} = k(k > 0) \Rightarrow AB = 20k; AC = 21k$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH.BC = AB.AC \Rightarrow 420.BC = 20.21.k^2 = 420k^2 \Rightarrow BC = k^2$$

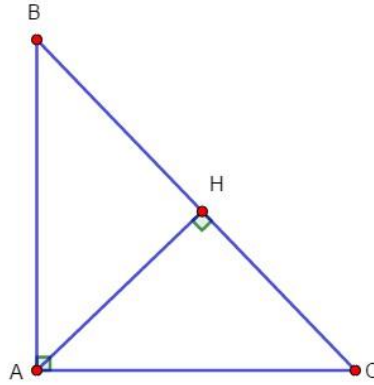
Lại có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 400k^2 + 441k^2 = 841k^2 = (29k)^2 \Rightarrow \begin{cases} BC = 29k \\ BC = k^2 \end{cases} \rightarrow k^2 = 29k \Leftrightarrow k = 29$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = 580(cm) \\ AC = 609(cm) \\ BC = 841(cm) \end{cases} \Rightarrow P_{ABC} = 2030(cm)$$

Bài 3: Cho ΔABC vuông tại A, vẽ đường cao AH. Chu vi của ΔABH là 30cm và ΔACH là 40cm. Tính chu vi của ΔABC .

HD:



Gọi P_1 ; P_2 ; P_3 lần lượt là chu vi của tam giác AHB , CHA và ABC .

Do $\Delta AHB \sim \Delta CHA$ suy ra: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{AB}{CA}$ (1)

Từ (1), ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{3^2} = \frac{AC^2}{4^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{3^2 + 4^2} = \frac{BC^2}{5^2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{5} \Rightarrow AB : AC : BC = 3 : 4 : 5.$$

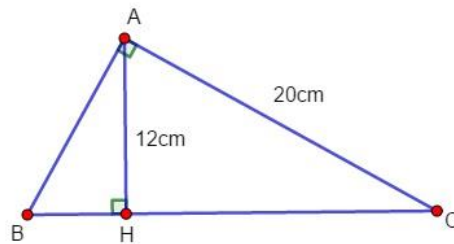
Mặt khác $\Delta AHB \sim \Delta CHA \sim \Delta CAB$, suy ra:

$$P_1 : P_2 : P_3 = AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$$

Vậy nếu $P_1 = 30$ cm, $P_2 = 40$ cm thì $P_3 = 50$ cm.

Bài 4: Cho ΔABC vuông ở A có $AC = 20$ cm, chiều cao $AH = 12$ cm. Tính diện tích ΔABC .

HD:



Xét tam giác AHC vuông tại H .

$$\Rightarrow HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 16 \text{ cm.}$$

Xét tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao.

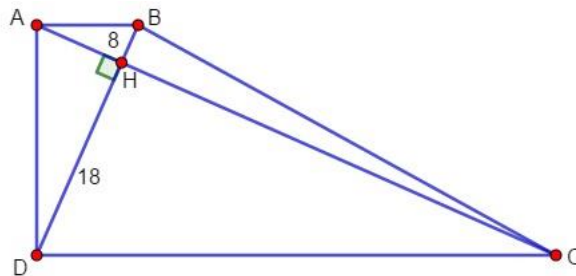
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AC^2 = BC.HC \Rightarrow BC = \frac{AC^2}{HC} = \frac{20^2}{16} = 25 \text{ cm.}$$

Vậy diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = 300,5 \text{ cm}^2$.

Bài 5: Cho hình thang vuông $ABCD$ ($A=D=90^\circ$) có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H . Biết $HD = 18 \text{ cm}$, $HB = 8 \text{ cm}$. tính diện tích hình thang $ABCD$.

HD:



$$HA^2 = HB.HD \Rightarrow HA^2 = 8.18 \Rightarrow HA = 12 \text{ (cm)}$$

$$HD^2 = HA.HC \Rightarrow 18^2 = 12.HC \Rightarrow HC = 27 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow BD = 26 \text{ (cm); } AC = 39 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(26.39)}{2} = 507 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Dạng 3: Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông

Phương pháp giải: Sử dụng các hệ thức về cạnh và đường cao một cách hợp lý theo 3 bước:

Bước 1: Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức

Bước 2: Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao

Bước 3: Liên kết các giá trị trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

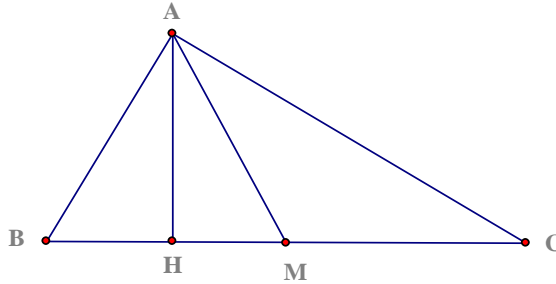
Bài 1: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, đường cao CH . Chứng minh rằng:

a. $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$

b. Vẽ trung tuyến AM của tam giác ABC, chứng minh rằng:

$$+) AB^2 + AC^2 = \frac{BC^2}{2} + 2AM^2 \quad +) AC^2 - AB^2 = 2.BC.HM (AC > AB)$$

HD:



a. Xét tam giác vuông HAB và tam giác vuông HAC, theo định lý pytao ta có:

$$AB^2 - BH^2 = AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow DPCM$$

b. Áp dụng định lý pytago vào tam giác vuông ABC, ta có:

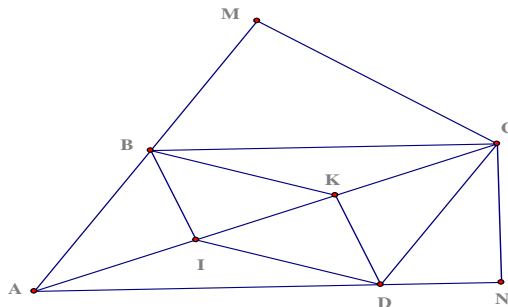
$$AB^2 + AC^2 = BC^2; \frac{BC^2}{2} + 2AM^2 = \frac{BC^2}{2} + 2.\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{2} + \frac{BC^2}{2} = BC^2 \rightarrow dpcm$$

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD có góc nhọn A. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B, D trên đường chéo AC. Gọi M, N là hình chiếu của C trên các đường thẳng AB, AD. Chứng minh rằng:

a. $AK = IC$

b. Tứ giác BIDK là hình bình hành

c. $AC^2 = AD.AN + AB.AM$



HD:

a. Ta có: $AK = AI + IK; IC = IK + KC \Rightarrow AK = IC$ (dpcm)

b. Xét tứ giác BIDK, có: $\begin{cases} BI // DK \\ BI = KD \end{cases} \Rightarrow \diamond BIDK$ là hình bình hành.

c. Ta có: $\Delta AKD \sim \Delta ANC$ (g.g); $\Delta ABI \sim \Delta ACM$ (g.g) $\Rightarrow AC^2 = AD \cdot AN + AB \cdot AM$ (dpcm)

Bài 3: Cho $AB = 2a$ cố định. O là trung điểm của AB, vẽ cùng một phía của AB ta vẽ hai tia Ax, By, trong đó $By \perp AB$. Lấy điểm C thuộc Ax, D thuộc By sao cho $\angle COD = 90^\circ$ ($AC \leq BD$). Hạ OM vuông góc với CD, nối OC cắt AM tại E, nối OD cắt BM tại F.

a. Chứng minh CO và DO là phân giác của $\angle ACD$ và $\angle BDC$

b. Chứng minh tam giác MAB vuông tại M

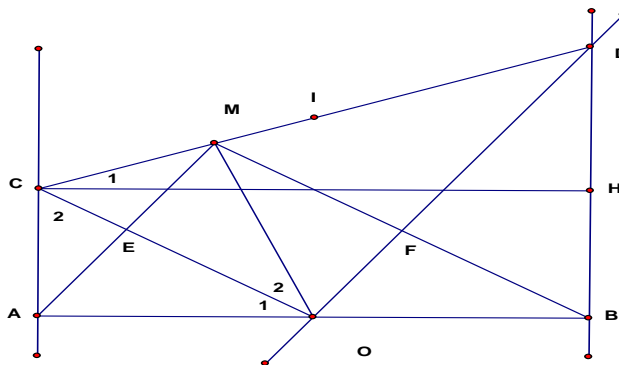
c. Chứng minh tứ giác OEMF là hình chữ nhật

d. $OE \cdot OC = OF \cdot OD$

e. Cho C và D chuyển động mà $\angle COD = 90^\circ$. Chứng minh $AC \cdot BD$ không đổi

f. Cho $\angle MBA = 30^\circ$, tính AC và BD theo a

g. Xác định vị trí của C để cho: $\tan \angle CDB = 3$



HD:

a. Từ giả thiết suy ra $AC \parallel BD$ vì cùng $\perp AB$

Tứ giác ACDB là hình thang.

Gọi I là trung điểm của CD \Rightarrow OI là đường trung bình của hình thang ACDB

\Rightarrow OI // AC \Rightarrow góc IOC = C₂ (So le trong)

Tam giác COD vuông tại O (giả thiết)

IC = ID \Rightarrow IO = IC \Rightarrow IOC = C₁ \Rightarrow C₁ = C₂ \Rightarrow CO là phân giác của góc ACD

Tương tự: DO là phân giác của góc BDC

b. Theo tính chất đường phân giác \Rightarrow OM = OA = OB

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta MAB \text{ vuông tại M}$$

c. ΔOMC vuông tại M và ΔOAC vuông tại A mà $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (cmt)

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{MOC} = \widehat{AOC} \\ \text{Lại có: } OM = OA \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow OC \perp AM \text{ (tai E)} \quad (\text{đpcm})$$

d+e) . Ta có: $\angle AOC + \angle BOD = 90^\circ$

$$\text{suy ra: } \angle AOC = \angle BOD \Rightarrow \Delta AOC \sim \Delta BDO \Rightarrow \frac{AO}{BD} = \frac{AC}{BO} \Rightarrow AC \cdot BD = AO \cdot BO = a^2$$

f. Ta có: OC // MB (cùng vuông góc AM) $\Rightarrow \angle O_1 = \angle MBO = 30^\circ$

$$\Rightarrow AC = AO \cdot \tan 30^\circ = a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}; AC \cdot BD = a^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$$

g. Hạ $CH \perp BD$, đặt $AC = x$ ($x > 0$)

Tứ giác ACHD là hình chữ nhật $\Rightarrow BH = x$; $CH = AB = 2a$

$$\text{Ta có: } \tan \angle CDB = 3 \Leftrightarrow \frac{CH}{HD} = 3 \Leftrightarrow DH = \frac{CH}{3} = \frac{2a}{3} \Rightarrow BD = \frac{2a}{3} + x$$

Theo chứng minh trên: $AC \cdot BD = a^2$

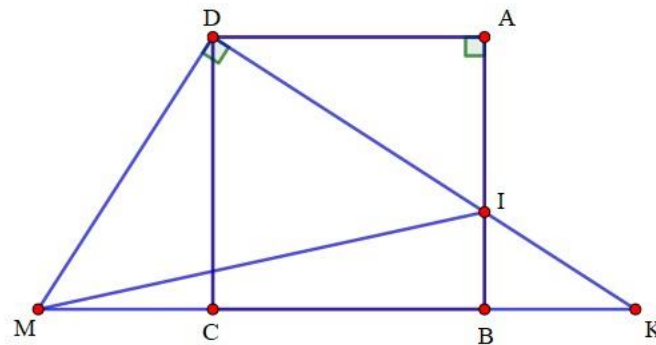
$$\Leftrightarrow x \cdot \left(x + \frac{2a}{3}\right) = a^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2ax}{3} = a^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{a}{3} + \frac{a^2}{9} = a^2 + \frac{a^2}{9}$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{10a^2}{9} \quad (x, a > 0) \Leftrightarrow x + \frac{a}{3} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{a(\sqrt{10} - 1)}{3} \Rightarrow AC = \frac{a(\sqrt{10} - 1)}{3}$$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD, gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia cắt CB cắt nhau ở K. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DI để đường thẳng BC tại M.

a) Chứng minh: $\triangle IDM$ cân.

b) Chứng minh: $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I di chuyển trên cạnh AB.

HD:



a) Xét tam giác IAD và tam giác MCD có:

$$DC = DA$$

$$\angle DCM = \angle DAB (= 90^\circ)$$

$$\angle ADI = \angle MDC \text{ (cùng phụ với góc } \angle IDC)$$

$$\Rightarrow \triangle IAD = \triangle MCD \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow DI = DM$$

$$\Rightarrow \triangle MDI \text{ cân tại } D.$$

b) Theo câu a) ta có $DI = DM$

$$\text{Nên } \frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DM^2} + \frac{1}{DK^2}$$

Do DM và DK là hai cạnh góc vuông của tam giác KDM , đường cao DC .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

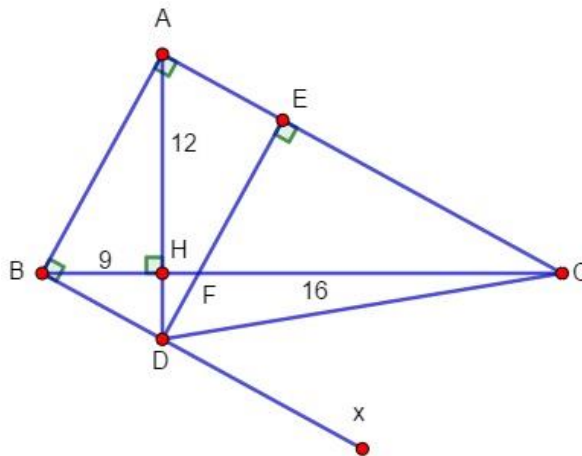
$$\frac{1}{DM^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2} \quad (DC \text{ là cạnh hình vuông; không đổi}).$$

Vậy $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I di chuyển trên cạnh AB .

Bài 5: Cho ΔABC có đường cao AH (H nằm giữa B và C). $AH = 12\text{cm}$, $HB = 9\text{cm}$, $BC = 25\text{cm}$.

- a) Chứng minh: ΔABC vuông tại A .
- b) Kẻ $Bx \parallel AC$ cắt AH ở D . Tính HD và c/m: $AB^2 = AC \cdot BD$.
- c) Kẻ $DE \perp AC$ ($E \in AC$), DE cắt BC ở F . C/m: $BH^2 = HF \cdot HC$
- d) Chứng minh: $S_{\Delta ABH} = S_{\Delta CDH}$. (Không cần tính diện tích)

HD:



a) $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow AB = 15$

$$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow AC = 20.$$

Ta thấy: $25^2 = 20^2 + 15^2 \Leftrightarrow 625 = 625$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

b) $\Delta BHD \sim \Delta CHA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{HD}{HA} = \frac{BD}{AC}$$

$$\Rightarrow HD \cdot CH = BH \cdot AH$$

$$\Rightarrow HGD \cdot 16 = 9 \cdot 12$$

$$\Rightarrow HD = 6,75$$

Có $\Delta BDA \sim \Delta ABC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB^2 = AC \cdot BD$$

c) $BH^2 = HF \cdot HC$

$$BH^2 = AH \cdot HD$$

$$\Delta FDH \sim \Delta ACH$$
 (g.g)

$$\Rightarrow \frac{FH}{AH} = \frac{HD}{HC}$$

$$\Rightarrow FH \cdot HC = AH \cdot HD$$
 (đpcm)

$$\Delta HAC \sim \Delta HDB$$
 (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{HD} = \frac{HC}{HB}$$

$$\Rightarrow AH \cdot HB = HC \cdot HD$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AH \cdot HB = \frac{1}{2} HC \cdot HD$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABH} = S_{\Delta CDH}$$

Bài 6: Cho ΔABC vuông ở A có $AB = 12\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$.

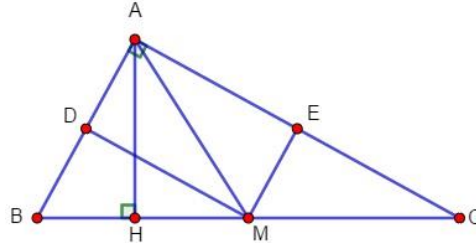
a) Tính độ dài trung tuyến AM.

b) Kẻ đường cao AH. Tính chu vi ΔABH .

c) Tia phân giác của góc AMB và góc AMC cắt AB, AC lần lượt ở D và E. Chứng minh: $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ đồng dạng.

d) Tính: S_{BDEC} và S_{DME} .

HD:



a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 400 \Rightarrow BC = 20$

$$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = 10 \text{ (cm)}.$$

b) $AB^2 = BH \cdot BC$

$$\Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{12^2}{20} = 7,2$$

$$\Rightarrow HC = 20 - 7,2 = 12,8$$

$$AH^2 = BH \cdot HC = \frac{2304}{25} \Rightarrow AH = 9,6.$$

$$\Rightarrow \text{Chu vi } \triangle ABH \text{ là: } AB + BH + AH = 12 + 7,2 + 9,6 = 28,8.$$

c) Ta có: $MB = MA = MC$

$\Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M ; MD là phân giác.

$\Rightarrow MD \perp AB$, D là trung điểm AB .

Tương tự E là trung điểm AC .

$\Rightarrow DE$ là đường trung bình $\triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC$.

$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$.

d) Dễ dàng chứng minh tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật.

Cách 1: $MD = \frac{1}{2} AC = 8 \text{ cm}$; $ME = \frac{1}{2} AB = 6 \text{ cm}$.

$$\Rightarrow S_{\Delta MDE} = \frac{8.6}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow S_{\Delta MDE} = S_{\Delta ADE} = 24 \text{ cm}^2$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2}.12.16 = 96 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = 72 \text{ cm}^2$$

Cách 2: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

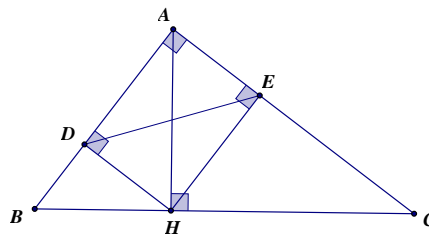
$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{S_{ABC}}{4} = 24 \text{ cm}^2$$

$$S_{BDEC} = \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{4}. \frac{1}{2}. 12.16 = 72 \text{ cm}^2$$

Bài 7: Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$) với đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh:

- a) $AB.AD = AC.AE$
- b) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$
- c) $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{CE}$
- d) $AH^3 = BC.BD.CE$
- e) Biết $BC = 10 \text{ cm}$, $AH = 4 \text{ cm}$. Tính HB, HC và S_{ADHE} , S_{BDEC} .

HD:



a) Chứng minh $AB.AD = AC.AE$

$$\Delta ABC \text{ có } A = 90^\circ; HD \perp AB \Rightarrow AH^2 = AD.AB$$

$$\Delta AHC \text{ có } H = 90^\circ; HE \perp AC \Rightarrow AH^2 = AE.AC$$

Suy ra ΔABC có $AD.AB = AE.AC (= AH^2)$

b) Chứng minh $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH.BC}{CH.BC} = \frac{BH}{CH}$$

c) Chứng minh $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{CE}$

Theo câu b) ta có

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} \Leftrightarrow \left(\frac{AB^2}{AC^2}\right)^2 = \left(\frac{BH}{CH}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BH^2}{CH^2} = \frac{BD.AB}{CE.AC} \Leftrightarrow \frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{CE} \text{ (đpcm)}$$

d) Chứng minh $AH^3 = BC.BD.CE$

$$AH^2 = BH.CH$$

$$\Leftrightarrow AH^4 = BH^2.CH^2 = (BD.AB)(CE.AC) = (BD.CE)(AB.AC) = BD.CE.AH.BC$$

$$\Leftrightarrow AH^3 = BD.CE.BC$$

e) Tính HB, HC và S_{ADHE} , S_{BDEC} .

Có $BC = 10 \text{ cm}$, $AH = 4 \text{ cm} \Rightarrow \begin{cases} BH + CH = 10 \\ BH.CH = 4^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BH + CH = 10 \\ BH - CH = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BH = 8 \\ CH = 2 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} BH = 2 \\ CH = 8 \end{cases}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2}.4.10 = 20(\text{cm}^2)$$

$$TH1: BH = 8\text{cm}; CH = 2\text{cm} \Rightarrow \begin{cases} AC = \sqrt{CH.BC} = \sqrt{2.10} = 2\sqrt{5} \\ AB = \sqrt{BH.BC} = \sqrt{8.10} = 4\sqrt{5} \end{cases}$$

$$AE = \frac{AH^2}{AC} = \frac{4^2}{2\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}; AD = \frac{AH^2}{AB} = \frac{4^2}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$S_{ADHE} = AD.AE = \frac{8\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = 6,4(\text{cm}^2)$$

$$S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = S_{ABC} - \frac{1}{2} S_{ADHE} = 20 - \frac{1}{2}.6,4 = 16,8(\text{cm}^2)$$

TH2: $BH = 2\text{cm}; CH = 8\text{cm}$

(Tương tự)

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- Biết $AH = 6\text{cm}$, $BH = 4,5\text{cm}$. Tính AB, AC, BC, HC
- Biết $AB = 6\text{cm}$, $BH = 3\text{cm}$. Tính AH và tính chu vi của các tam giác vuông trong hình vẽ

HD:

a) Tính được: $AB = 7,5\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$, $BC = 12,5\text{cm}$, $HC = 8\text{cm}$

b) $AH = 3\sqrt{3}\text{cm}$, $P_{ABC} = 18 + 6\sqrt{3}\text{cm}$, $P_{ABH} = 9 + 3\sqrt{3}\text{cm}$; $P_{ACH} = 9 + 9\sqrt{3}\text{cm}$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính diện tích tam giác ABC, biết $AH = 12\text{cm}$, $BH = 9\text{cm}$

HD:

Ta tính được: $S_{ABC} = 150\text{cm}^2$

Bài 3: Cho tam giác ABC, biết $BC = 7,5\text{cm}$, $AC = 4,5\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$

- Tính đường cao AH của tam giác ABC
- Tính độ dài BH, CH

HD:

a) $AH = 3,6\text{cm}$

b) $BH = 4,8\text{cm}$, $CH = 2,7\text{cm}$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $AB : AC = 3 : 4$, $AH = 6\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và CH

HD:

Sử dụng hệ thức về cạnh góc vuông và đường cao trong tam giác vuông, tính được $BH = 4,5\text{cm}$, $CH = 8\text{cm}$

Bài 5: Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Cho biết $AB = 15\text{cm}$, $AD = 20\text{cm}$, các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O. Tính

- Độ dài các đoạn thẳng OB và OD
- Độ dài đoạn thẳng AC
- Diện tích hình thang ABCD.

HD:

a) Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông ABD, tính được:

$$BD = 2,5\text{cm}, OB = 9\text{cm}, OD = 16\text{cm}$$

c) Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông DAC tính được

$$OA = 12\text{cm}, AC = \frac{100}{3}\text{cm}$$

c) Tính được: $S = \frac{1250}{3}\text{cm}^2$

Bài 6: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 8\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$

- Tính độ dài đoạn thẳng BD
- Vẽ AH vuông góc BD tại H. Tính độ dài đoạn thẳng AH
- Đường thẳng AH cắt BC và DC lần lượt tại I và K. Chứng minh $AH^2 = HI \cdot HK$

HD:

a) $BD = 17\text{cm}$

b) $AH = \frac{120}{17}\text{cm}$

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH, kẻ EH, HF lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh rằng

a. $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$

b. $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$

HD:

a) Sử dụng hệ thức giữa cạnh góc vuông với hình chiếu của nó lên cạnh huyền và cạnh huyền trong các tam giác vuông HBA và HCA

b) Áp dụng hệ thức giữa đường cao và hình chiếu cạnh góc vuông lên cạnh huyền trong tam giác vuông ABC

Bài 8: Cho tam giác ABC cân tại A $\cos A$ và BK là hai đường cao. Kẻ đường thẳng vuông góc BC tại B cắt tia CA tại D

a. $BD = 2AH$

b. $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4HA^2}$

HD:

a) Chứng minh AH là đường trung bình của $\triangle BCD$

b) Sử dụng hệ thức giữa đường cao và các cạnh góc vuông trong tam giác vuông BCD và áp dụng câu a