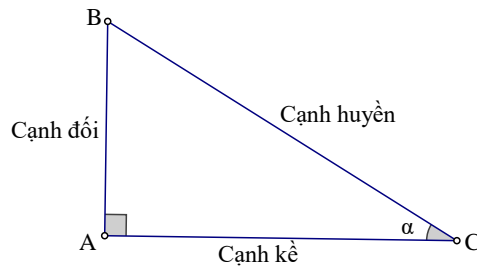


BÀI 2: TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác ABC vuông tại A



1. Định nghĩa: Cho góc nhọn α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho $\alpha = \widehat{ACB}$.

Từ đó ta có:

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC}; \quad \cos \alpha = \frac{AB}{BC}; \quad \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \cot \alpha = \frac{AB}{AC}$$

2. Các tính chất (tỉ số lượng giác hai góc phụ nhau)

a. Nếu $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì: $\sin \alpha = \cos \beta; \cos \alpha = \sin \beta; \tan \alpha = \cot \beta; \tan \beta = \cot \alpha$

b. Với góc nhọn α bất kỳ ta có:

$$\begin{array}{lll} +) 0 < \sin \alpha < 1 & +) 0 < \cos \alpha < 1 & +) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} +) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 & +) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & +) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} +) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} & +) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{array}$$

c. Khi góc nhọn α tăng từ 0° đến 90° thì:

+) $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ tăng

+) $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$ giảm

3. Bảng tỉ số lượng giác của một số góc đặc biệt

	30^0	45^0	60^0
Sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính cạnh, tính góc

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức trong phần tóm tắt lý thuyết

Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tính các tỉ số lượng giác của các góc B từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc C, nếu biết:

a) $AB = 16\text{cm}; BC = 12\text{ cm}$

b) $AB = 13\text{ cm}; BH = 5\text{ cm}$

c) $BH = 16\text{ cm}; CH = 9\text{ cm}$

d) $AB = 6\text{ cm}; AC = 8\text{ cm}$

HD:

a) $AB = 16\text{cm}; AC = 12\text{ cm}$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20\text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{3}{5};$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin C = \frac{4}{5}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot C = \frac{3}{4}$$

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan C = \frac{4}{3}$$

b) $AB = 13\text{ cm}; BH = 5\text{ cm}$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos C = \frac{12}{13} ;$$

$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin C = \frac{5}{13}$$

$$\tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{12}{5} \Rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$\cot B = \frac{BH}{AH} = \frac{5}{12} \Rightarrow \tan C = \frac{5}{12}$$

c) BH = 16 cm; CH = 9 cm

$$AH = \sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12 \text{ cm}$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{3}{5} ;$$

$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin C = \frac{4}{5}$$

$$\tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot C = \frac{3}{4}$$

$$\cot B = \frac{BH}{AH} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan C = \frac{4}{3}$$

d) AB = 6 cm; AC = 8 cm

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{4}{5} ;$$

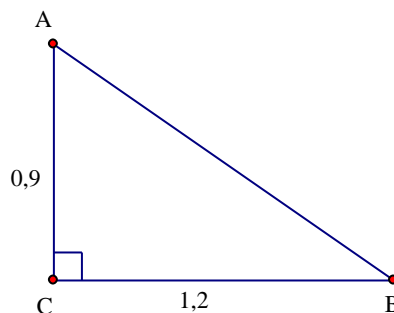
$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin C = \frac{3}{5}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot C = \frac{4}{3}$$

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan C = \frac{3}{4}$$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại C có BC = 1,2cm, AC = 0,9cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A

HD:

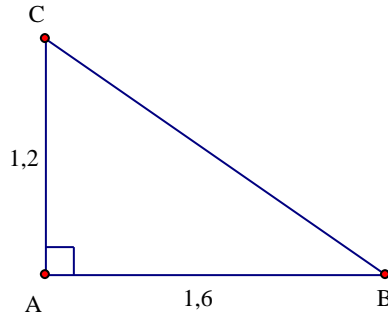


$$- \sin B = \frac{3}{5} \quad - \cos B = \frac{4}{5} \quad - \tan B = \frac{3}{4} \quad - \cot B = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}; \quad \cos A = \frac{3}{5}; \quad \tan A = \frac{4}{3}; \quad \cot A = \frac{3}{4}$$

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 1,6cm, AC = 1,2cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C

HD:



$$\begin{aligned} - \sin B &= \frac{3}{5} & - \cos B &= \frac{4}{5} & - \tan B &= \frac{3}{4} & - \cot B &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

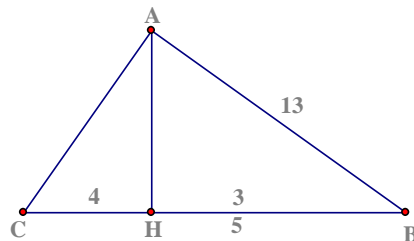
$$\Rightarrow \sin C = \frac{4}{5}; \cos C = \frac{3}{5}; \tan C = \frac{4}{3}; \cot C = \frac{3}{4}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), hãy tính sinB và sinC làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư trong các trường hợp sau

a. AB = 13m, BH = 0,5dm

b. BH = 3cm, CH = 4cm

HD:



a. A/d các tỉ số lượng giác cho tam giác vuông ABH để tính SinB, rồi từ đó suy ra Sin C

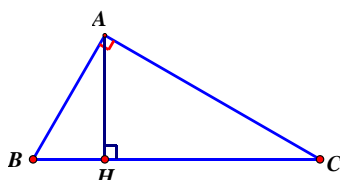
b. Áp dụng hệ thức lượng về cạnh góc vuông và hình chiếu lên cạnh huyền trong tam giác vuông ABC để tính AB. Sau đó làm tương tự câu a

Bài 5: Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Tính sinB, sinC, biết:

a) AB = 13cm, BH = 5cm.

b) BH = 3cm, CH = 4cm.

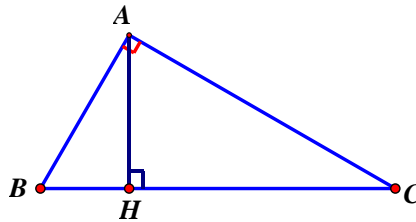
HD:



a) Xét ΔABH vuông tại H có $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = 12cm$

$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{13}$$

$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin C = \frac{5}{13}$$



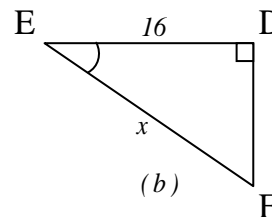
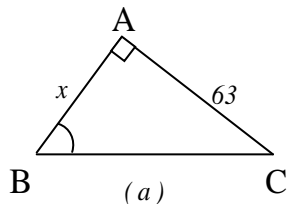
b) Xét ΔABC vuông tại A có: $BC = BH + HC = 3 + 4 = 7cm$

$$AB^2 = BH \cdot BC = 3 \cdot 7 = 21 \Rightarrow AB = \sqrt{21}cm$$

$$AC^2 = CH \cdot BC = 4 \cdot 7 = 28 \Rightarrow AC = 2\sqrt{7}cm$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{7}}{7}; \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Bài 6: Tính giá trị của x (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3) trong mỗi trường hợp sau. Biết $\tan B \approx 1,072$; $\cos E \approx 0,188$.



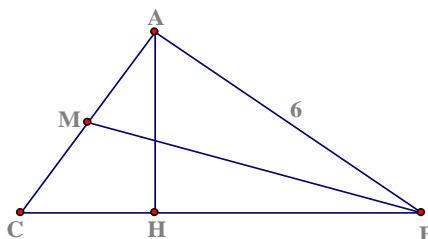
HD:

a) Xét ΔABC vuông tại A có: $\tan B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\tan B} \approx \frac{63}{1,072} \approx 58,769$

b) Xét ΔDEF vuông tại D có: $ED = EF \cdot \cos E \approx 16 \cdot 0,188 \approx 3,008cm$

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6cm$, $\tan B = \frac{5}{12}$. Hãy tính độ dài đường cao AH và trung tuyến BM của tam giác ABC

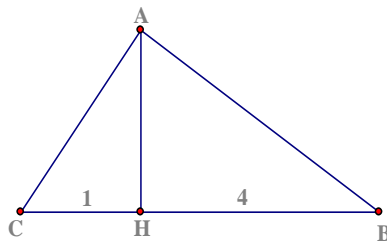
HD:



Xét $\triangle ABH (\hat{H} = 90^\circ) \rightarrow AH = \frac{30}{13} (cm); BM = \frac{\sqrt{601}}{4} (cm)$

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), biết BH = 4cm, CH = 1cm. Hãy giải tam giác ABC

HD:



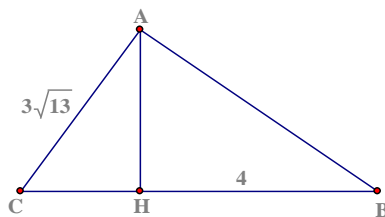
Xét tam giác ABC vuông tại A, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

+) $AB^2 = BC.BH \Rightarrow AB^2 = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}(cm) \Rightarrow AC = \sqrt{5}(cm)$

+) Ta có: $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ; \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = 2 \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC), biết BH = 4cm, AC = $3\sqrt{13}$ cm. Hãy giải tam giác ABC

HD:



Đặt HC = x (cm)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC^2 = BC.CH = (4+x).x \Rightarrow x^2 + 4x = 9.13 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 121 \Rightarrow \begin{cases} x = 9(tm) \\ x = -13(loai) \end{cases}$$

Ta có: BC = BH + HC = 13 (cm)

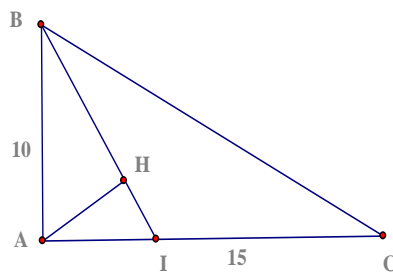
$$+) AB^2 = BH \cdot BC = 13 \cdot 4 = 52 \rightarrow AB = 2\sqrt{13}(cm)$$

$$+) \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \widehat{B} = 56^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 34^\circ$$

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, có: AB = 10cm, AC = 15cm

- a. Tính góc B
- b. Phân giác trong của góc B cắt AC tại I. Tính AI
- c. Vẽ AH vuông góc với BI tại H. Tính AH

HD:



a. Xét tam giác ABC vuông tại A, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 56^\circ$$

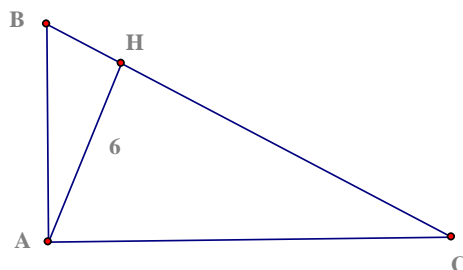
b. Ta có: $\tan \widehat{ABI} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow AI = AB \cdot \tan \widehat{ABI} = 10 \cdot \tan 28^\circ = 5,3(cm)$

c. $\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin 28^\circ = 4,7(cm)$

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = 6cm(H thuộc BC), biết $\tan \widehat{C} = \frac{2}{3} cm$.

Hãy tính độ dài các cạnh: HB, HC, AB, AC.

HD:



Theo giả thiết ta có: $\tan \hat{C} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{2}{3}$

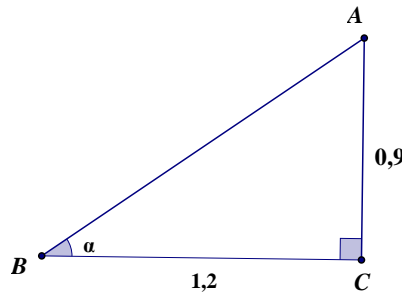
Lại có: $\Delta AHB \sim \Delta CHA(g.g) \rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \rightarrow HB = \frac{HA \cdot 2}{3} = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4; CH = \frac{AH \cdot 3}{2} = 9$

Xét tam giác ABC vuông tại A, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AB^2 = BH \cdot HC \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{13}(cm); AC^2 = CH \cdot CB \Leftrightarrow AC = 3\sqrt{13}(cm)$$

Bài 12: Cho ΔABC vuông tại C, trong đó $AC = 0,90m$, $BC = 1,20m$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.

HD:



$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 1,5 \text{ cm}$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{0,9}{1,5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos A = \frac{3}{5};$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{0,9}{1,2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot A = \frac{3}{4}$$

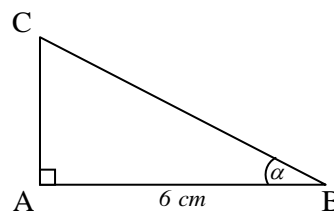
$$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{1,2}{0,9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan A = \frac{4}{3}$$

Bài 13: Cho hình bên:

Biết $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Hãy tính:

a) Cạnh AC.

b) Cạnh BC.



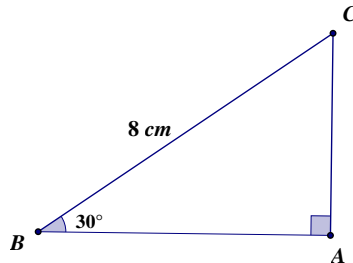
HD:

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{3}{4} \cdot AB = \frac{3}{4} \cdot 6 = 4,5 \text{ cm}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 4,5^2} = 7,5 \text{ cm}$$

Bài 14: Cho ΔABC vuông tại A, $B = 30^\circ$, $BC = 8\text{cm}$. Hãy tính cạnh AB (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba). Biết $\cos 30^\circ \approx 0,866$.

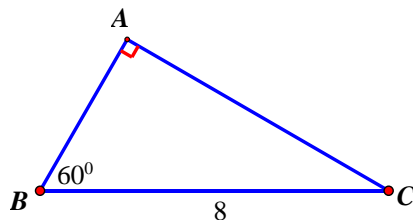
HD:



$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 8 \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$$

Bài 15: Cạnh huyền của một tam giác vuông có một góc bằng 60° là 8. Hãy tìm độ dài của cạnh đối diện với góc 60° .

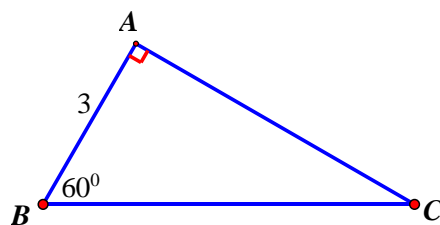
HD:



$$\text{Xét } \Delta ABC \text{ vuông tại A có : } AC = BC \cdot \sin B = 8 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

Bài 16: Cạnh góc vuông kề với góc 60° của một tam giác vuông bằng 3. Hãy tìm cạnh huyền và cạnh góc vuông còn lại (sử dụng bảng lượng giác của các góc đặc biệt).

HD:



$$\text{Xét } \Delta ABC \text{ vuông tại A có : } AC = AB \cdot \tan B = 3 \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

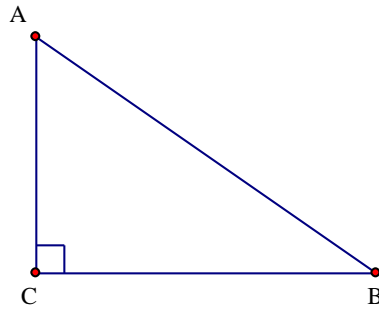
$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{3}{\cos 60^\circ} = 6$$

Bài 17: Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{5}$, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$

a) Chứng minh tam giác ABC vuông

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc B Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A

HD:



a) Dùng định lý pytago đảo, ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 (5a^2 = 3a^2 + 2a^2) \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại C}$$

$$\text{b) } - \sin B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{5} \qquad - \cos B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$- \tan B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad - \cot B = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6}$$

Bài 18: Cho t/giác ABC vuông tại A, $AB = 5\text{cm}$, $\cot B = \frac{5}{8}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC

a) Chứng minh tam giác ABC vuông

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc B Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A

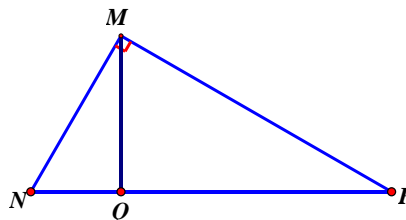
HD:

Áp dụng tỉ số CotB trong tam giác vuông ABC và định lý pytago ta tính được

$$AC = 8\text{cm}, BC = \sqrt{89}\text{cm}$$

Bài 19: Cho ΔMNP vuông ở M, đường cao MQ chia cạnh huyền NP thành hai đoạn $NQ = 3$, $PQ = 6$. Hãy so sánh cotN và cotP. Tỉ số nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu lần.

HD:



Xét $\triangle MNQ$ vuông tại Q có $\cot N = \frac{NQ}{MQ}$

Xét $\triangle MPQ$ vuông tại Q có $\cot P = \frac{PQ}{MQ}$

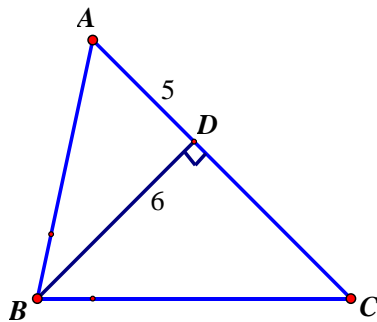
$$\frac{\cot N}{\cot P} = \frac{NQ}{MQ} : \frac{PQ}{MQ} = \frac{NQ}{PQ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot P = 2 \cot N$$

Bài 20: Đường cao BD của tam giác nhọn ABC bằng 6, đoạn thẳng AD bằng 5.

a) Tính diện tích $\triangle ABD$.

b) Tính AC , dùng các thông tin sau đây nếu cần: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$.

HD:

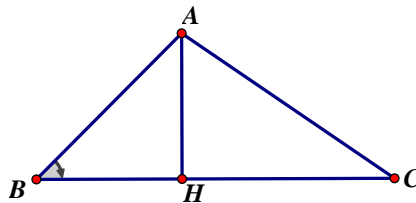


a) $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$ (đơn vị diện tích)

b)

Bài 21: Cho $\triangle ABC$ có đường cao AH . Biết $HB = 20\text{cm}$, $HC = 21\text{cm}$, $B = 45^\circ$. Tính AC .

HD:



Đường cao $AH \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow \triangle AHB$ & $\triangle AHC$ vuông tại H .

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H có: $\tan B = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{AH}{HB} \Rightarrow 1 = \frac{AH}{20} \Rightarrow AH = 20(\text{cm})$

Xét ΔAHC vuông tại H có: $\tan C = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \tan C = \frac{20}{21} \Rightarrow C = 43^{\circ}36'$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin C} = \frac{20}{\sin 43^{\circ}36'} = 14,5(cm)$$

Dạng 2: Chứng minh các đẳng thức lượng giác và áp dụng tính các tỉ số lượng giác

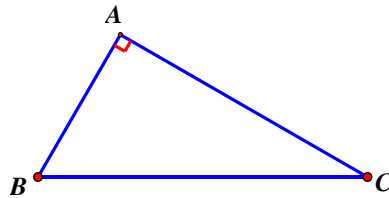
Bài 1: Sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác của một góc nhọn để chứng minh rằng: Với góc nhọn α tùy ý, ta có:

a) $\sin \alpha < 1, \cos \alpha < 1$

b) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

c) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

HD:



Giả sử α là góc B trong ΔABC vuông tại A

a) $\sin \alpha = \frac{\text{đoi}}{\text{huyền}}; \cos \alpha = \frac{\text{ke}}{\text{huyền}}$ mà trong tam giác vuông cạnh huyền là cạnh lớn nhất nên

$$\sin \alpha < 1; \cos \alpha < 1$$

b) Xét ΔABC vuông tại A có :

$$* \sin B = \frac{AC}{BC}; \cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{mà } \tan B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} \text{ hay } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$* \cot \alpha = \frac{\text{ke}}{\text{đoi}}; \tan \alpha = \frac{\text{đoi}}{\text{ke}} \text{ Mà } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$* \cot \alpha = \frac{\text{ke}}{\text{đoi}}; \tan \alpha = \frac{\text{đoi}}{\text{ke}} \Rightarrow \cot \alpha \cdot \tan \alpha = 1$$

c) Xét ΔABC vuông tại A có :

$$\sin B = \frac{AC}{BC}; \cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin^2 B + \cos^2 B = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1 \text{ (định lý Pytago)}$$

ytago)

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Bài 2: Tìm các tỉ số lượng giác còn lại của góc α , biết:

a. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

b. $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

c. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$

HD:

Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} (\cos \alpha > 0) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}; \cot \alpha = \frac{4}{3}$

Bài 3: Hãy tìm $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$, nếu:

a) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$

b) $\cot \alpha = \frac{3}{4}$

HD:

a) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

b) $\cot \alpha = \frac{3}{4}$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\frac{9}{16} + 1} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

Bài 4:a) Cho $\cos \alpha = 0,8$. Hãy tìm $\sin \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

b) Cho $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Hãy tìm $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\cot \alpha$.

c) Cho $\cot \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Hãy tìm $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

HD:

a) Có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,8^2 = \frac{9}{25}$
 $\Rightarrow \sin \alpha = 0,6$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3}$$

b) Cho $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Hãy tìm $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\cot \alpha$.

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{4}{3}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

c) Cho $\cot \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Hãy tìm $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{7}{9}} = \frac{1}{\frac{16}{9}} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Bài 5: Hãy tìm $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$, nếu:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

b) $\sin \alpha = \frac{40}{41}$

HD:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

b) $\sin \alpha = \frac{40}{41}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{40}{41}\right)^2 = \frac{81}{1681}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{9}{41}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{40}{41} \cdot \frac{41}{9} = \frac{40}{9}$$

Bài 6: Biết $\tan B = 2$. Tính :

$$A = \frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$$

$$B = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha}$$

$$C = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha$$

$$D = \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

HD:

Biết $\tan B = 2$. Tính :

$$A = \frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B} = \frac{\frac{\sin B}{\cos B} + 1}{\frac{\sin B}{\cos B} - 1} = \frac{\tan B + 1}{\tan B - 1} = \frac{2 + 1}{2 - 1} = 3$$

$$B = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + 1}{\frac{3 \sin \alpha}{\cos \alpha} - 4} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{3 \tan \alpha - 4} = \frac{5}{2}$$

$$C = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 3 \right) \cos^2 \alpha$$
$$= (\tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha - 3) \cos^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha = 3 \cdot \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{3}{5}$$

$$D = \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1}{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1}{2 \tan \alpha} = \frac{1}{4}$$

Bài 7: Biết $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính $M = \frac{2 \tan \alpha - 10 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 4 \cot \alpha}$

HD:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \tan \alpha = 2; \cot \alpha = \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{2 \tan \alpha - 10 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 4 \cot \alpha} = \frac{2.2 - 10 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}}{5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + 4 \cdot \frac{1}{2}} = -18 + 8\sqrt{5}$$

Bài 8: Tìm góc nhọn α , biết:

a. $\sin \alpha = \cos \alpha$

b. $\tan \alpha = \cot \alpha$

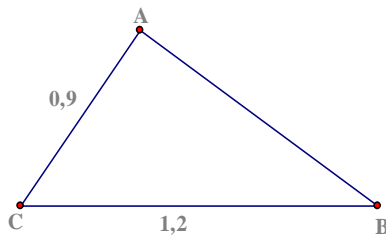
HD:

a. $\sin \alpha = \cos \alpha \rightarrow \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \rightarrow \alpha = 45^\circ$

b. $\tan \alpha = \cot \alpha \rightarrow \tan \alpha = \tan(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \rightarrow \alpha = 45^\circ$

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại C, có BC = 1,2cm, AC = 0,9cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A

HD:



$$\sin B = \frac{3}{5}; \cos B = \frac{4}{5}; \tan B = \frac{3}{4}; \cot B = \frac{4}{3} \rightarrow \sin A = \frac{4}{5}; \cos A = \frac{3}{5};$$
$$\tan A = \frac{4}{3}; \cot A = \frac{3}{4}$$

Bài 10: Cho ΔABC vuông tại A, Chứng minh rằng: $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$.

HD:

Xét ΔABC vuông tại A có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC}; \sin C = \frac{AB}{BC}$$
$$\Rightarrow \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB}$$

Bài 11: Biến đổi tỉ số lượng giác của các góc sau đây thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :

$$\sin 60^{\circ}, \cos 75^{\circ}, \sin 52^{\circ}30', \cot 82^{\circ}, \tan 80^{\circ}.$$

HD:

$$\cos 30^{\circ}; \sin 15^{\circ}; \cos 37^{\circ}30'; \tan 8^{\circ}; \cot 10^{\circ}$$

Bài 12: Tính giá trị của các biểu thức sau

a. $A = 4 - \sin^2 45^{\circ} + 2 \cos^2 60^{\circ} - 3 \cot^3 45^{\circ}$

b. $B = \tan 45^{\circ} \cdot \cos 30^{\circ} \cdot \cot 30^{\circ}$

c. $C = \cos^2 15^{\circ} + \cos^2 25^{\circ} + \dots + \cos^2 75^{\circ}$

d. $D = \sin^2 10^{\circ} + \sin^2 20^{\circ} + \dots + \sin^2 80^{\circ}$

HD:

a. $A = 4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = 1$

b. $B = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$

c. $C = (\cos^2 15^{\circ} + \cos^2 75^{\circ}) + \dots + \cos^2 45^{\circ} = 1 + 1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$

d. $D = (\sin^2 10^{\circ} + \cos^2 10^{\circ}) + \dots + (\sin^2 40^{\circ} + \cos^2 40^{\circ}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Dạng 3: Dựng góc

Bài 1: Dựng góc nhọn α , biết:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$

b) $\cos \alpha = 0,5$

c) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

d) $\cot \alpha = \frac{3}{2}$

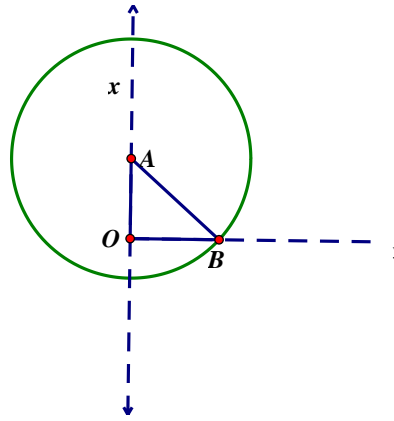
HD:

a) Dựng $xOy = 90^{\circ}$ và chọn 1 đoạn thẳng làm đơn vị.

Lấy A trên Ox sao cho $OA = 2$ đơn vị độ dài

Dựng cung tròn tâm A, bán kính 3 đơn vị độ dài cung tròn này cắt Oy tại B.

Nối A với B, ta được $OBA = \alpha$ cần dựng.

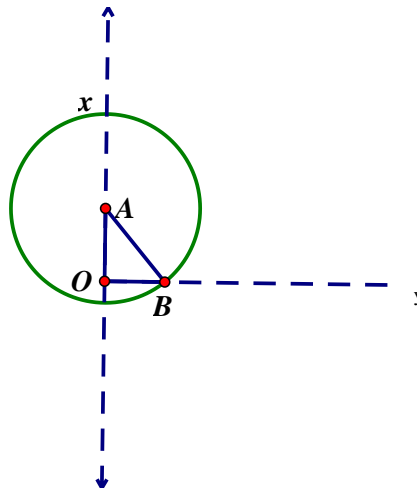


b) - Dụng $xOy = 90^\circ$ và chọn 1 đoạn thẳng làm đơn vị.

- Lấy A trên Ox sao cho $OA = 1$ đơn vị độ dài

- Dụng cung trong tâm A, bán kính 2 đơn vị độ dài cung tròn này cắt Oy tại B.

- Nối A với B, ta được $OAB = \alpha$ cần dựng.

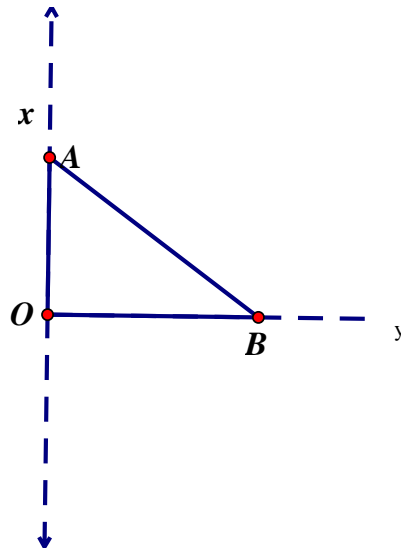


c) - Dụng $xOy = 90^\circ$ và chọn 1 đoạn thẳng làm đơn vị.

- Lấy A trên Ox sao cho $OA = 3$ đơn vị độ dài;

- Lấy B trên Oy sao cho $OB = 4$ đơn vị độ dài

- Nối A với B, ta được góc $OBA = \alpha$ cần dựng.

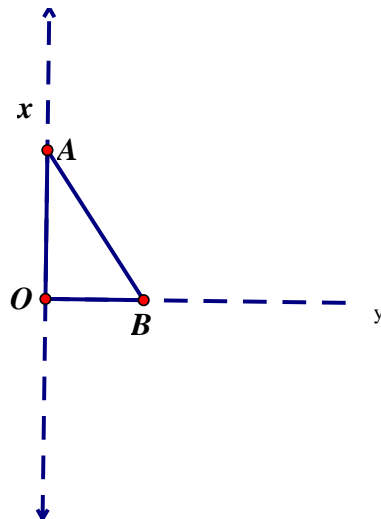


d) - Dụng $xOy = 90^\circ$ và chọn 1 đoạn thẳng làm đơn vị.

- Lấy A trên Ox sao cho $OA = 3$ đơn vị độ dài;

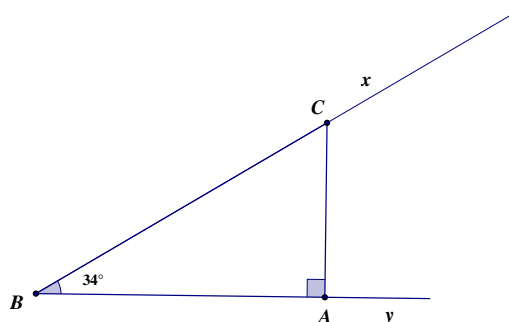
- Lấy B trên Oy sao cho $OB = 2$ đơn vị độ dài

- Nối A với B, ta được góc $OAB = \alpha$ cần dựng.



Bài 2: Lập tỉ số lượng giác của góc 34° bằng cách vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn 34° .

HD:



$$\sin 34^\circ = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos 34^\circ = \frac{AB}{BC}$$

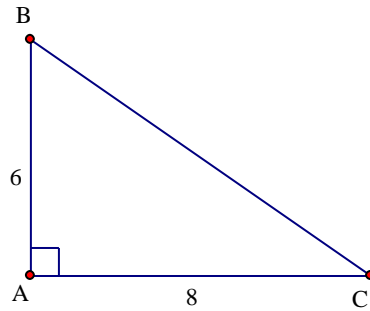
$$\tan 34^\circ = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot 34^\circ = \frac{AB}{AC}$$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 60mm, AC = 8cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

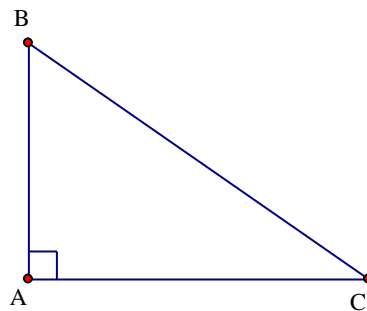
HD:



$$\sin B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \cos B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \tan B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \cot B = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin C = \frac{3}{5}; \cos C = \frac{4}{5}; \tan C = \frac{3}{4}; \cot C = \frac{4}{3}$$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C biết rằng $\cos B = 0,6$.

HD:

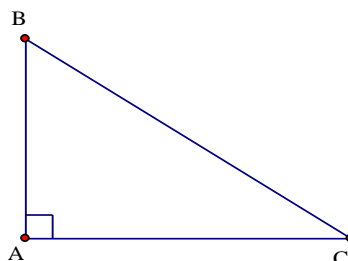


Ta có:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \sin^2 B + 0,6^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 B = 0,74 \Rightarrow \hat{B} \Rightarrow \hat{C}$$

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết AB = 30cm, $\hat{B} = \alpha, \tan \alpha = \frac{5}{12}$. Tính BC, AC

HD:

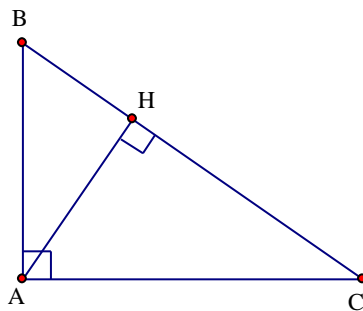


$$\hat{B} = \alpha, \tan \alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AC}{30} = \frac{5}{12} \Rightarrow AC = \frac{150}{12} = 12,5 \Rightarrow BC$$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính Sin B, Sin C, biết

a) $AB = 13\text{cm}, BH = 5\text{cm}$

b) $BH = 3\text{cm}, CH = 4\text{cm}$



a) $AB = 13\text{cm}, BH = 5\text{cm} \rightarrow AH \rightarrow BC \rightarrow \sin B, \sin C$

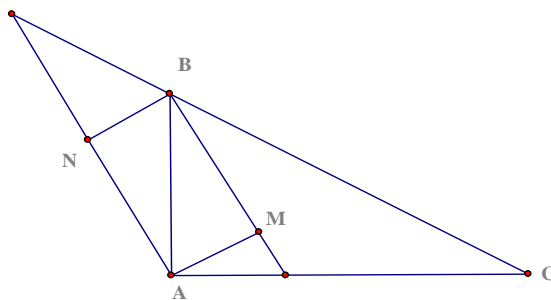
b) $BH = 3\text{cm}, CH = 4\text{cm} \Rightarrow AH \Rightarrow AB, AC \Rightarrow \sin B, \sin C$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, góc C = 30°, BC = 10cm

a. Tính AB, AC

b. Kẻ từ A các đường thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Chứng minh MN = AB

c. Chứng minh các tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỷ số đồng dạng.



HD:

b. Chú ý: Hai đường phân giá của hai góc kề bù vuông góc với nhau

c. Ta có: BM là phân giác của góc B. Từ đó tính được số đo các góc của tam giác MAB

Chú ý: Tam giác MAB và ABC đều là các tam giác nửa đều, từ đó tính được tỉ số đồng dạng là 0,5.

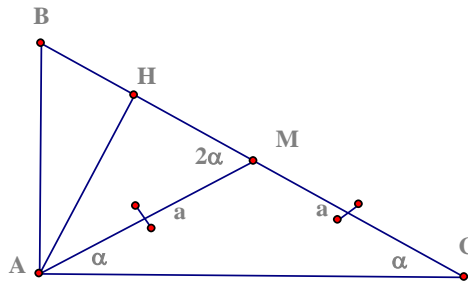
Bài 6: [Khó]

Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, đường trung tuyến AM, đường cao AH, $MA = MB = MC = a$. Chứng minh rằng:

a. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

b. $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

c. $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$



HD:

a, Ta có: $\widehat{AMH} = 2\alpha; \sin 2\alpha = \frac{AH}{AM} = \frac{2AH}{2AM} = \frac{2AH}{BC} = 2 \cdot \frac{AB \cdot AC}{BC^2} = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

b. $1 + \cos 2\alpha = 1 + \frac{HM}{AM} = \frac{HC}{AM} = \frac{2HC}{BC} = 2 \cdot \frac{AC^2}{BC^2} = 2 \cdot \cos^2\alpha$

c. $1 - \cos 2\alpha = 1 - \frac{HM}{AM} = \frac{HB}{AM} = \frac{2HB}{BC} = 2 \cdot \frac{AB^2}{BC^2} = 2 \cdot \sin^2\alpha$