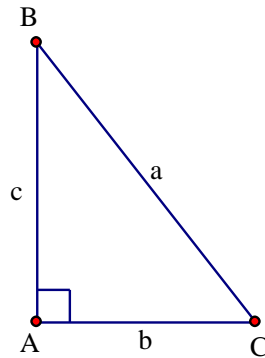


BÀI 4: MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Cho tam giác ABC vuông tại A: có $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Ta có:



$$\sin B = \frac{b}{a} \rightarrow b = a \cdot \sin B; a = \frac{b}{\sin B}$$

$$\cos B = \frac{c}{a} \rightarrow c = a \cdot \cos B; a = \frac{c}{\cos B}$$

$$\tan B = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot \tan B; c = \frac{b}{\tan B}$$

$$\cot B = \frac{c}{b} \rightarrow c = b \cdot \cot B; b = \frac{c}{\cot B}$$

2. Trong một tam giác vuông

Cạnh góc vuông = cạnh huyền nhân sin góc đối = cạnh huyền nhân cosin góc kề

Cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông còn lại nhân tan góc đối hoặc cot góc kề

Giải tam giác là tính độ dài các cạnh và số đo các góc dựa vào dữ kiện cho trước của bài toán.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Giải tam giác vuông

Phương pháp giải: Để giải tam giác vuông ta dùng hệ thức giữa cạnh và các góc trong tam giác vuông

Chú ý: Các bài toán về giải tam giác vuông bao gồm:

+) Giải tam giác vuông khi biết độ dài 1 cạnh và số đo 1 góc nhọn

+) Giải tam giác vuông khi biết độ dài 2 cạnh

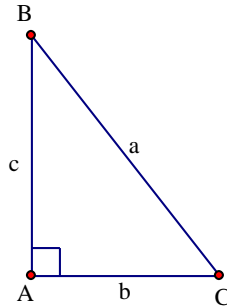
Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi BC = a, AC = b, AB = c. Giải tam giác ABC, biết:

a) $b = 10(\text{cm}), \hat{C} = 30^\circ$

b) $a = 20(\text{cm}), \hat{B} = 35^\circ$

c) $a = 15\text{cm}, b = 10\text{cm}$

d) $b = 12\text{cm}, c = 7\text{cm}$



HD:

a) Sử dụng tỉ số $\cos C, \sin C \Rightarrow a = \frac{20\sqrt{3}}{3}(\text{cm}); c = \frac{10\sqrt{3}}{3}(\text{cm}); \hat{B} = 60^\circ$

b) $b = 20 \cdot \sin 35^\circ \approx 11,47(\text{cm}); c = 20 \cdot \cos 35^\circ \approx 16,38(\text{cm})$

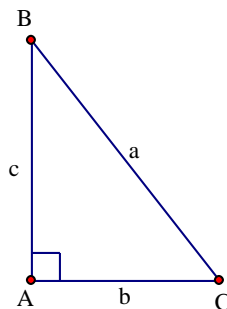
c) $c = 5\sqrt{5}(\text{cm}); \sin \hat{B} = \frac{10}{15} \Rightarrow \hat{B} \approx 41,8^\circ, \hat{C} = 48,2^\circ$

d) $a = \sqrt{193}(\text{cm}), \tan \hat{B} = \frac{12}{7} \Rightarrow \hat{B} \approx 59,7^\circ, \hat{C} \approx 30,3^\circ$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi BC = a, AC = b, AB = c. Giải tam giác ABC, biết:

a) $c = 3,8(\text{cm}), \hat{B} = 51^\circ$

b) $a = 11(\text{cm}), \hat{C} = 60^\circ$



HD:

a) Xét tam giác ABC vuông tại A. Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \cos 51^\circ = \frac{3,8}{BC} \Rightarrow BC = 6(\text{cm}) \Rightarrow AC = 4,6(\text{cm})$$

b) Ta có: $\widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ \Rightarrow AB = \sin 60^\circ \cdot 11 = 8,6(\text{cm}); AC = 4,3(\text{cm})$

Bài 3: Giải tam giác vuông ABC biết rằng $\widehat{A} = 90^\circ$ và :

a) $b = 10 \text{ cm}, C = 30^\circ$;

b) $c = 10 \text{ cm}, C = 45^\circ$;

c) $a = 20 \text{ cm}, B = 35^\circ$;

d) $c = 21 \text{ cm}, b = 18 \text{ cm}$;

HD:

a) $b = 10 \text{ cm}; C = 30^\circ$

$$AB = AC \cdot \tan 30^\circ = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}; \quad BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 20 \text{ cm}$$

b) $AB = AC = 10 \text{ cm}$

$$B = C = 45^\circ; \quad BC = 10\sqrt{2}$$

c) $AB = BC \cdot \sin C \approx 16,38 \text{ cm}; \quad AC = BC \cdot \sin B \approx 11,47 \text{ cm}$

$$d) BC = 3\sqrt{85} \text{ cm}; \quad \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{\sqrt{85}} \Rightarrow B \approx 41^\circ \Rightarrow C \approx 48^\circ$$

Dạng 2: Tính cạnh và góc của tam giác

Phương pháp giải: Làm xuất hiện tam giác vuông để áp dụng các hệ thức trên bằng cách kẻ thêm đường cao.

Bài 1: Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH. Biết $HB = 2 \text{ cm}, HC = 64 \text{ cm}$. Tính B, C.

HD:

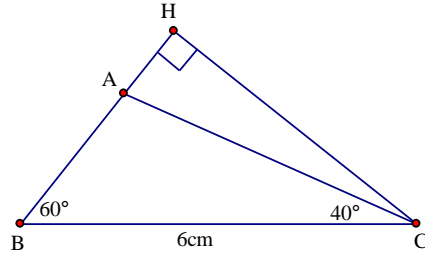
$$AH^2 = HB \cdot HC \Rightarrow AH = 8\sqrt{2}$$

$$\tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow B \approx 80^\circ$$

$$\Rightarrow C \approx 90^\circ - 80^\circ \approx 10^\circ$$

Bài 2: Cho tam giác ABC có $BC = 6 \text{ cm}, \widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính

- a) Chiều cao CH và cạnh AC
- b) Diện tích tam giác ABC



HD:

- a) Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông HCB ta có:

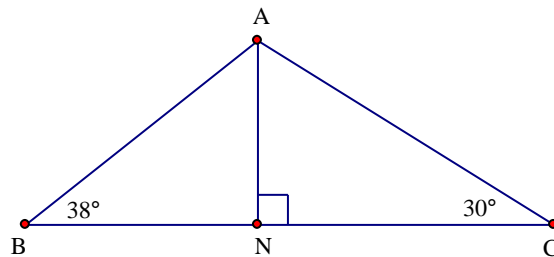
$$CH = 3\sqrt{3}cm, \frac{AC}{\sin 80^\circ} \approx 5,28 \Rightarrow AC$$

- b) Áp dụng định lý pytago hoặc hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta tính được:

$$AB, BH \Rightarrow AB = 3,93cm. S = \frac{1}{2} 3\sqrt{3}.3.93 \approx 10,21cm^2$$

Bài 3: Cho tam giác ABC có BC = 11cm, $\hat{A}BC = 38^\circ, \hat{A}CB = 30^\circ$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính

- a) Độ dài đoạn thẳng AN
- b) Độ dài đoạn thẳng AC



HD:

- a) Cách 1: Sử dụng các tỉ số lượng giác trong các tam giác vuông NAB và NAC, ta có:

$$BN \cdot \tan B = NC \cdot \tan C$$

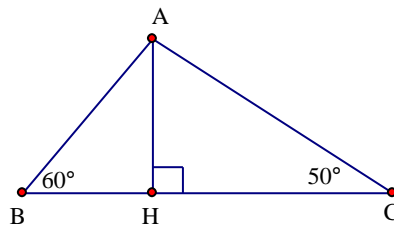
Chú ý: BN + NC = BC

$$\Rightarrow BN \approx 4,67cm \Rightarrow AN \approx 3,65cm$$

Cách 2: Gọi ý: Kẻ $CH \perp AB = H$

b) Xét tam giác ANC vuông, có: $AC = \frac{AN}{\sin C} \Rightarrow AC \approx 7,3cm$

Bài 4: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ; \widehat{C} = 50^\circ, AC = 35cm$. Tính diện tích tam giác ABC



HD:

Xét tam giác ABC, có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 70^\circ$

Vẽ đường cao AH (H thuộc BC)

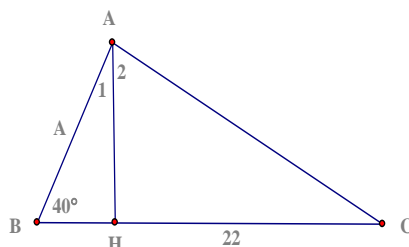
Ta có: $\sin \widehat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \sin \widehat{C} \cdot AC = \sin 50^\circ \cdot AC = 26,8(cm)$

$$\sin \widehat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{26,8}{\sin 60^\circ} = 38,5(cm)$$

Xét tam giác ABH vuông tại H, có: $BH = 15,8(cm) \Rightarrow CH = 22,7(cm) \Rightarrow BC \approx 38,5(cm)$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 26,8 \cdot 38,5 = 510(cm^2)$$

Bài 5: Cho tam giác ABC, đường cao AH (H thuộc BC), $\widehat{B} = 42^\circ, AB = 12cm, BC = 22cm$. Tính các cạnh và các góc của tam giác ABC.



HD:

Xét tam giác ABH vuông tại H, có: $\widehat{B} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = 48^\circ$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

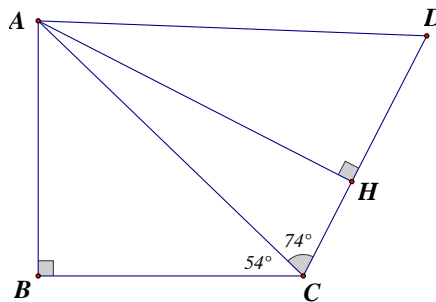
$$AH = AB \cdot \sin \widehat{B} = 12 \cdot \sin 40^\circ = 8(\text{cm}); BH = AB \cdot \cos \widehat{B} = 8,916(\text{cm}) \Rightarrow HC = 13(\text{cm}) \text{ Ta lại có:}$$

$$\tan \widehat{C} = \frac{AH}{HC} = 0,614 \Rightarrow \widehat{C} = 31^\circ 30' \Rightarrow \widehat{A}_2 = 58^\circ 30' \Rightarrow \widehat{BAC} = 106^\circ 30'$$

$$AH = AC \cdot \sin \widehat{C} \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin \widehat{C}} = 15,350(\text{cm})$$

Bài 6: Cho ΔABC vuông tại B, dựng tam giác ACD (B và D nằm khác phía đối với AC). Biết $\angle ACB = 54^\circ$, $\angle ACD = 74^\circ$, $AC = 8\text{cm}$, $AD = 9,6\text{ cm}$. Hãy tính: AB và ADC.

HD:



Kẻ $AH \perp DC$ tại H

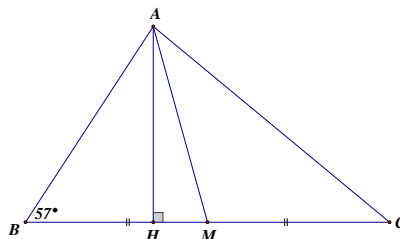
$$AB = AC \cdot \sin \angle BCA = 8 \cdot \sin 54^\circ \approx 6,47$$

$$AH = AC \cdot \sin \angle ACD \approx 7,69$$

$$\sin \angle ADH = \frac{AH}{AD} \approx \frac{7,69}{9,6} \Rightarrow \angle ADH = \angle ADC \approx 53^\circ 23'$$

Bài 7: Cho ΔABC nhọn có đường cao AH và đường trung tuyến AM. Biết $\angle B = 57^\circ$, $AB = 9\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$. Giải tam giác ABC và tính AM.

HD:



$$BAH = 33^\circ$$

$$AH = AB \cdot \sin 57^\circ \approx 7,5 \text{ cm} ; BH = AB \cdot \sin 33^\circ \approx 4,9 \text{ cm}$$

$$HC^2 = AC^2 - HA^2 \Rightarrow HC \approx 9,4 \text{ cm}$$

$$BC = BH + CH \approx 14,3 \text{ cm}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow C \approx 39^\circ$$

$$BAC = 180^\circ - (B + C) = 84^\circ$$

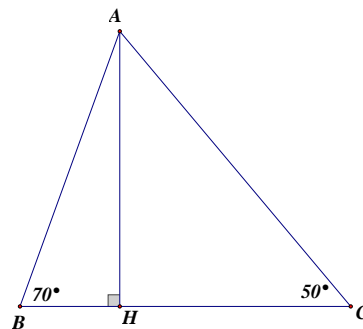
$$MB = MC = \frac{BC}{2} \approx 7,15$$

$$HM = MB - BH \approx 2,25$$

$$AM^2 = HM^2 + AH^2 \Rightarrow AM \approx 7,8 \text{ cm}$$

Bài 8: Cho ΔABC có đường cao AH . Biết $AB = 25 \text{ cm}$, $B = 70^\circ$, $C = 50^\circ$. Tính độ dài AH và BC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

HD:



$$AH = AB \cdot \sin B \approx 23,49 \text{ cm}$$

$$HC = AH \cdot \cot C \approx 19,71 \text{ cm}$$

$$BH = AB \cdot \cos B \approx 8,55 \text{ cm}$$

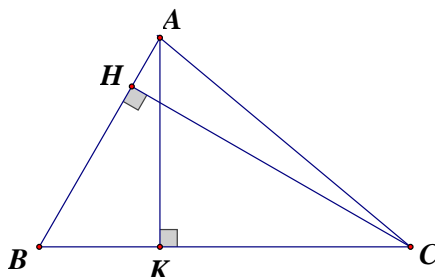
$$BC = HB + HC \approx 28,26 \text{ cm}$$

Bài 9: Cho ΔABC có $BC = 12 \text{ cm}$, $B = 60^\circ$, $C = 40^\circ$.

a) Tính chiều cao CH và AC .

b) Tính $S_{\Delta ABC}$.

HD:



a)

$$HC = BC \sin B = 6\sqrt{3}$$

$$A = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$$

$$AC = \frac{HC}{\sin A} \approx 10,55$$

b) Gọi K là hình chiếu của điểm A trên BC

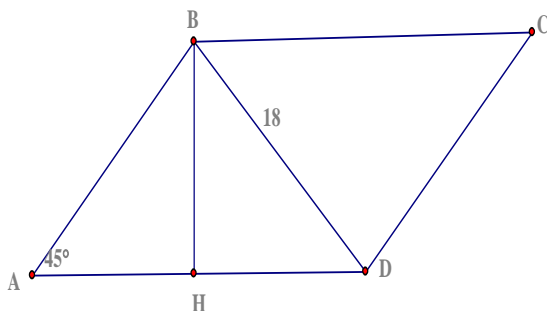
$$AK = AC \cdot \sin C \approx 6,78$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC \approx \frac{1}{2} \cdot 6,78 \cdot 12 \approx 40,68 \text{ cm}^2$$

Bài 10: Cho hình bình hành $ABCD$, có: $\hat{A} = 45^\circ, AB = BD = 18(\text{cm})$

a. Tính AB

b. Tính S_{ABCD}



HD:

a. Xét tam giác ABD , có: $AB=BD$ nên tam giác ABD cân tại B

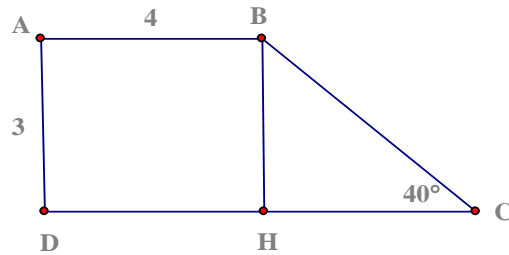
kẻ BH vuông góc $AD \Rightarrow H$ là trung điểm của AD

Xét tam giác AHB vuông tại H . Áp dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$\begin{cases} BH = AB \cdot \sin \hat{A} = 9\sqrt{2}(\text{cm}) \\ AH = AB \cdot \cos \hat{A} = 9\sqrt{2}(\text{cm}) \end{cases} \Rightarrow AD = 2AH = 18\sqrt{2}(\text{cm})$$

b. $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH = 324(\text{cm}^2)$

Bài 11: Cho tứ giác $ABCD$, có: $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, \hat{C} = 40^\circ, AB = 4\text{cm}, AD = 3\text{cm}. S_{ABCD} = ?$



HD:

Kẻ BH vuông góc với CD, ta có tứ giác ABHD là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông)

$$\Rightarrow BH = 3cm, DH = 4cm$$

Xét tam giác BHC vuông tại H, có:

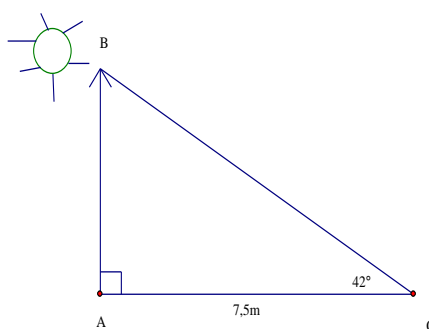
$$\tan \widehat{C} = \tan 40^\circ = \frac{BH}{HC} \Rightarrow HC = \frac{BH}{\tan 40^\circ} = \frac{3}{0,839} = 3,58(cm)$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(4 + 7,58) \cdot 3}{2} = 17,37(cm^2)$$

Dạng 3: Toán ứng dụng thực tế

Phương pháp giải: Dùng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải quyết tình huống trong thực tế

Bài 1: Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,5m. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ 42°. Tính chiều cao của cột đèn?



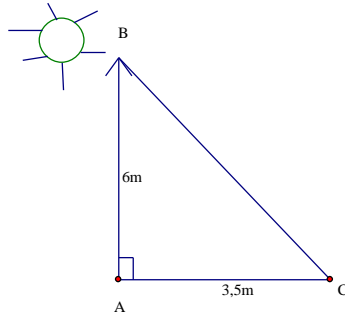
HD:

Gọi chiều cao của cột đèn là AB, bóng của cột đèn trên mặt đất là AC

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác ABC vuông tại A, ta tính được:

$$AB \approx 6,75\text{m}$$

Bài 2: Một cột đèn điện AB cao 6m có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5m. Hãy tính \widehat{BCA} (Làm tròn đến phút) mà tia nắng mặt trời tạo với mặt đất



HD:

Áp dụng hệ thức giữa
ABC, ta có:

cạnh và góc trong tam giác vuông

$$\tan C = \frac{6}{3,5} \Rightarrow \widehat{C} = \dots$$

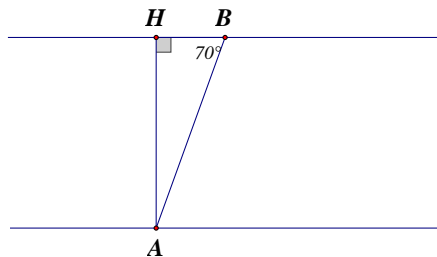
Bài 3: Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° và có độ cao là 2,1m. Tính độ dài của mặt cầu trượt (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

HD:

$$\text{Ta có độ dài cầu trượt là: } \frac{2,1}{\sin 28^\circ} \approx 4,5\text{m}$$

Bài 4: Một con thuyền với vận tốc thực 2km/h vượt qua một khúc sông nước chảy mạnh mất 5 phút. Biết rằng đường đi của con thuyền tạo với bờ một góc 70° . Từ đó đã có thể tính được chiều rộng của khúc sông? Nếu có thể hãy tính chính xác đến mét.

HD:



$$2\text{km} / h \approx 33,33\text{m} / \text{phut}$$

$$\text{Quãng đường } AB \text{ thuyền đi là } S = v.t \approx 33,33.5 = 166,65 \text{ (m/phút)}$$

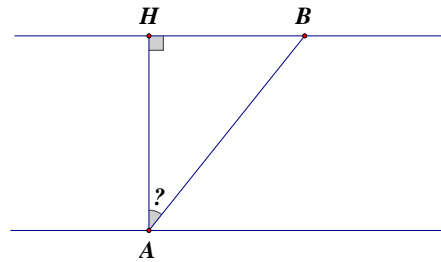
AH là chiều rộng của sông

HBA là góc tạo bởi đường đi của thuyền và bờ sông

$$AH = AB \cdot \sin HBA \approx 166,65 \cdot \sin 70^\circ \approx 156,6(m)$$

Bài 5: Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một chiếc đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu ?

HD:



Gọi khoảng cách hai bờ sông là AH .

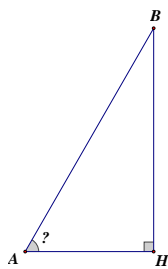
Đoạn đường chiếc đò bị nước đẩy xiên là AB

Dòng nước đẩy chiếc đò lệch một góc là HAB

$$\cos HAB = \frac{AH}{AB} = \frac{25}{32} \Rightarrow HAB \approx 38^\circ 6'$$

Bài 6: Một cây cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc của tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

HD:

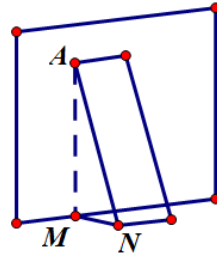


Giả sử BH là chiều cao cột đèn, AH là bóng cột đèn trên mặt đất

Tia sáng chiếu xuống là BA và góc tạo bởi tia sáng với mặt đất là BAH

$$\tan BAH = \frac{BH}{AH} = \frac{7}{4} \Rightarrow BAH \approx 60^\circ 3'$$

Bài 7: Anh An đặt cầu thang tiếp xúc với tường và thang tạo với tường 1 góc $M\hat{A}N = 30^\circ$. Chân cái thang thì cách chân tường 1 khoảng là 1,5m. Tính chiều dài của thang.



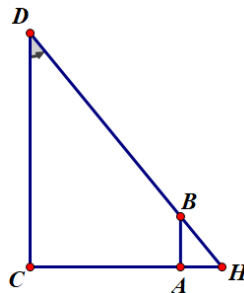
HD:

Chân thang cách chân tường 1,5m: $MN = 1,5m$

$\triangle MAN$ vuông tại M: $\sin MAN = \frac{MN}{AN}$

$$\Rightarrow l_{thang} = \frac{MN}{\sin MAN} = \frac{1,5}{1:2} = 3(m). \text{ Vậy thang dài } 3m$$

Bài 8: Cho chiều cao của cột đèn bằng đoạn thẳng CD, chiều cao của bạn An bằng đoạn thẳng AB = 1,6m. Bạn An đứng cách cột đèn 6m, cột đèn tạo với đoạn nối điểm cao nhất của cột đèn và điểm cao nhất của bạn An một góc là $BDC = 60^\circ$. Tính chiều cao của cột đèn (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



HD:

$$\triangle CDH : \begin{cases} AB // CD (\perp AC) \\ A \in CH; B \in DH \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AH}{CH} \text{ (Talet)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{CD}{CH} = \frac{CD - AB}{AC}$$

$$\text{Ngoài ra } \cot BDC = \frac{CD}{CH} \text{ nên } \frac{CD - 1,6}{6} = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CD = 2\sqrt{3} + 1,6 \approx 5,1(m)$$

Vậy chiều cao cột đèn xấp xỉ 5,1m.

Bài 9: Ở độ cao 920 mét, từ một máy bay trực thăng người ta nhìn 2 điểm D, C của 2 đầu cầu so với đường vuông góc với mặt đất các góc lần lượt là $a = 40^\circ$, $b = 30^\circ$. tính chiều dài cây cầu CD.

HD:

Đưa bài toán về dữ kiện hình học: gọi A là điểm biểu diễn chiếc máy bay, H là hình chiếu của máy bay trên mặt đất, suy ra AH là độ cao của máy bay so với mặt đất: $AH = 920m$; từ máy bay nhìn ra 2 điểm D,C lần lượt tạo với các đường vuông góc mặt đất các góc 40° và 30° , suy ra AD, AC lần lượt tạo với mặt đất các góc 50° và 60° : $ADB = 50^\circ, ACB = 60^\circ$.

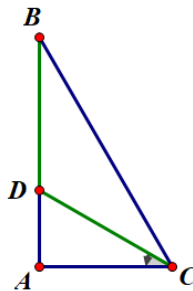
Tính chiều dài CD của cây cầu.

Áp dụng công thức lượng giác trong các tam giác AHD, ABC vuông tại H:

$$\begin{aligned} \cot ADH &= \frac{DH}{AH} = \cot 50^\circ; \cot ACH = \frac{CH}{AH} = \cot 60^\circ \\ \Rightarrow \frac{DC}{AH} &= \frac{DH - CH}{HA} = \cot 50^\circ - \cot 60^\circ \Rightarrow DC = AH(\cot 50^\circ - \cot 60^\circ) \approx 240,81(m) \end{aligned}$$

Vậy chiều dài cây cầu CD bằng $240,81(m)$

Bài 10: Giông bão thổi mạnh, một cây tre gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với mặt đất một góc 30° . Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây tre là $8,5m$. Giả sử cây tre mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây tre đó? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



HD:

Đưa bài toán về dữ kiện hình học: cho cây tre AB vuông góc mặt đất, đoạn tre BD bị gãy tại D và ngọn cây chạm đất tại C; phần bị gãy CD tạo với mặt đất CA một góc 30° ; người ta đo được AC bằng $8,5m$. Tính chiều cao cây tre.

Tam giác ACD vuông tại A có $AC = 8,5m, ACD = 30^\circ$: áp dụng công thức lượng giác:

$$\frac{AC}{CD} = \sin DCA = \sin 30^\circ \rightarrow CD = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{8,5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{17}{\sqrt{3}}(m)$$

$$\frac{AD}{CD} = \cos DCA = \cos 30^\circ \rightarrow AD = CD \cdot \cos 30^\circ = \frac{17}{2\sqrt{3}} = \frac{8,5}{\sqrt{3}}(m)$$

Suy ra $AB = BD + AD = AD + CD = \frac{8,5+17}{\sqrt{3}} \approx 14,72(m)$

Vậy cây tre cao $14,72(m)$

Bài 11: Một chiếc máy bay lên cao cách mặt đất 10km trong khoảng thời gian 2,4 phút. Tính vận tốc của máy bay, biết rằng đường bay lên của máy bay nhân tạo với phương nằm ngang một góc 30 phút.

HD:



Đưa bài toán về dữ kiện hình học, ta có BC là quãng đường bay của máy bay trong 2,4 phút:

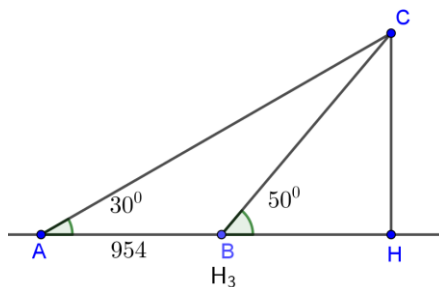
$$\frac{AC}{BC} = \sin 30' \Rightarrow BC = \frac{AC}{\sin 30'} \approx 1145,93(km)$$

Đổi đơn vị 2,4 phút = 0,04 giờ = 144 giây

$$\text{Vận tốc máy bay: } v = \frac{s}{t} = \frac{1145,93}{0,04} \approx 28648,25(km / h) = \frac{28648,25(km)}{3600(s)} = 7,958(km / s)$$

Bài 12: Trong hè năm 2017 anh Phương có dịp tham quan Hà Nội, Hạ Long, Sa Pa. Và chính đợt đi tham quan hè này anh Phương đã được đến với núi Yên Tử hùng vĩ. Khi tiến gần đến chân núi anh dùng dụng cụ đo góc đo được từ mặt đất nơi anh đứng đến đỉnh núi 1 góc 30° , sau đó anh tiếp tục di chuyển thêm $954m$ về phía chân núi theo đường thẳng, tại đây anh đo được 1 góc bằng 50° . Em hãy cho biết độ cao của núi Yên Tử là bao nhiêu mét?

HD :



Xét sơ đồ như hình vẽ với A là điểm đầu tiên người đó đo góc từ mặt đất nơi anh đứng đến đỉnh núi 1 góc 30° và B là điểm khi người đo di chuyển thêm $954m$ về phía chân núi theo đường thẳng, tại đây anh đo được 1 góc bằng 50° , C là đỉnh núi và CH là đường cao của đỉnh núi yên tử.

Gọi $x(m)$ là chiều cao của đỉnh núi yên tử $x > 0$

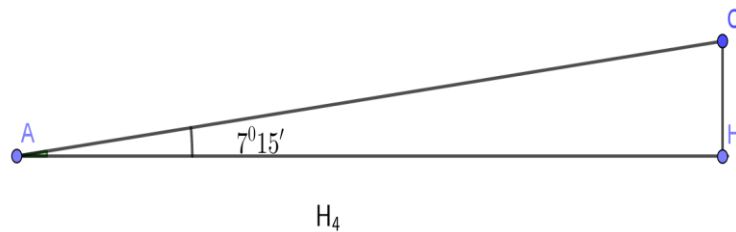
Xét tam giác vuông AHC ta có : $\tan 30^{\circ} = \frac{CH}{HA} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan 30^{\circ}} = x\sqrt{3}$

Xét tam giác vuông BHC ta có : $\tan 50^{\circ} = \frac{CH}{HB} \Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan 50^{\circ}} = \frac{x}{\tan 50^{\circ}}$

Vì theo giả thiết ta có : $AB = AH - HB = x\sqrt{3} - \frac{x}{\tan 50^{\circ}} = 954 (m) \Rightarrow x = 1068,37(m)$.

Bài 13: Từ đỉnh của 1 ngọn đèo hải đăng cao 150m so với mặt nước biển, A Phương nhìn thấy một hòn đảo dưới góc $7^{\circ}15'$ so với đường nằm ngang chân đèo. A Phương dự định khám phá hòn đảo với quãng đường ngắn nhất biết rằng trên tàu còn lại 42l dầu, cứ đi 10m thì tàu tiêu hao 0,4l dầu. Hỏi thuyền có ra được đảo với số lượng dầu trên hay không?

HD:



Xét sơ đồ như hình vẽ với A là vị trí hoàn đèo , H là chân ngọn hải đăng , C đỉnh ngọn hải đăng với $CH = 150(m)$.

Xét tam giác vuông AHC ta có : $\tan 7^{\circ}15' = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan 7^{\circ}15'} = \frac{150}{\tan 7^{\circ}15'} \approx 1179,1(m)$

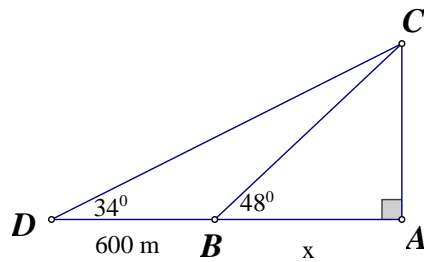
Vì trên tàu A Phương còn lại 42l dầu, cứ đi 10m thì tàu tiêu hao 0,4l dầu vậy quãng đường mà tàu A Phương đi được xa nhất là : $\frac{42}{0,4} \cdot 10 = 1050(m)$.

Vậy thuyền A Phương không thể ra được đảo với số lượng dầu trên .

Bài 14: Tính chiều cao của một ngọn núi, biết rằng tại hai điểm cách nhau 600m trên mặt đất người ta nhìn thấy đỉnh núi với góc nâng lần lượt là 48° và 34° .

HD:

Dựa vào đề bài ta có hình vẽ:



Khi đó chiều cao của ngọn núi là x:

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có:

$$\tan CBA = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan 48^\circ = \frac{AC}{x} \Rightarrow AC = x \tan 48^\circ \quad (1)$$

Xét $\triangle ACD$ vuông tại A, ta có:

$$\tan CDA = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \tan 32^\circ = \frac{AC}{600+x} \Rightarrow AC = (600+x) \tan 32^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $x \tan 48^\circ = (600+x) \tan 32^\circ \Rightarrow x \approx 771,8515$

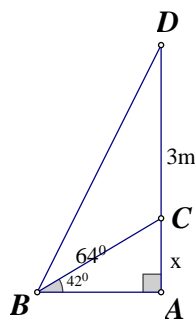
Vậy $AC = x \tan 48^\circ \approx 771,8515 \cdot \tan 48^\circ \approx 857,23$

Chiều cao ngọn núi xấp xỉ 857,23 m.

Bài 15: Một bức tượng cao 3m được đặt trên một cái bệ. Tại một điểm trên mặt đất người ta nhìn thấy nóc tượng và nóc bệ với các góc nâng lần lượt là 64° và 42° . Tính chiều cao của cái bệ.

Theo đề bài, ta có hình vẽ

HD:



Khi đó chiều cao của cái bệ là AC

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có:

$$\tan CBA = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan 42^\circ = \frac{x}{AB} \Rightarrow AB = \frac{x}{\tan 42^\circ} \quad (1)$$

Xét tam giác ABD vuông tại A, ta có:

$$\tan DBA = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan 64^\circ = \frac{3+x}{AB} \Rightarrow AB = \frac{3+x}{\tan 64^\circ} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $\frac{x}{\tan 42^\circ} = \frac{3+x}{\tan 64^\circ} \Rightarrow x \approx 2,35$

Vậy chiều cao của cái bệ là 2,35m

Dạng 4: Toán tổng hợp

Phương pháp giải: Vận dụng linh hoạt một số hệ thức giữa cạnh và góc trong một tam giác vuông để giải toán.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, có: $AC > AB$ và đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC

a. Chứng minh rằng $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ và tam giác ABC đồng dạng tam giác AED.

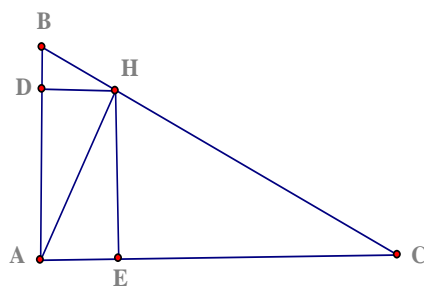
b. Cho $BH = 2\text{cm}$, $HC = 4,5\text{cm}$

- Tính độ dài đoạn thẳng DE

- Tính số đo góc ABC (làm tròn đến độ)

- Tính diện

tích tam giác ADE



HD:

a. Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông AHC và AHB, ta có:

$$AE \cdot AC = AH^2 = AD \cdot AB \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AED(c.g.c)$$

b. Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AH = 3\text{cm} \Rightarrow DE = 3\text{cm}$$

+) Xét tam giác AHB vuông tại H, có:

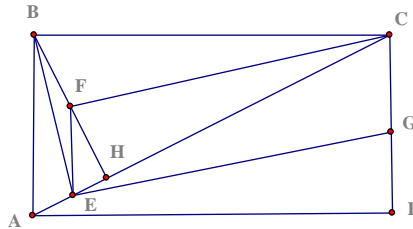
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 56^\circ \Rightarrow S_{ADE} = \frac{27}{13} (cm^2)$$

Bài 2: Cho hình chữ nhật ABCD. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC tại H. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của AH, BH, CD

a. Chứng minh tứ giác EF CG là hình bình hành

b. Chứng minh $\widehat{BEG} = 90^\circ$

c. Cho biết $BH = 4cm$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính S_{ABCD}, S_{EFCG}



HD:

a) Xét tam giác ABH, có: EF là đường trung bình của tam giác

$$\Rightarrow EF // AB \Rightarrow EF // CG \Rightarrow \diamond EFCG \text{ là hình bình hành.}$$

b. Xét tam giác BEC, có: $BH \perp EC$; $EF \perp BC \Rightarrow F$ là trực tâm của tam giác BEC

$$CF \Rightarrow \perp BE \Rightarrow EG \perp BE \Rightarrow \widehat{BEG} = 90^\circ$$

c. Xét tam giác vuông ABH vuông tại H, có:

$$\sin \widehat{A} = \frac{BH}{BA} = \frac{4}{BA} \Rightarrow BA = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8(cm); \tan \widehat{A} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{BH}{\tan 30^\circ} = 6,9(cm)$$

+) Xét tam giác vuông ABC vuông tại B, có: $\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = 8 \cdot \tan 30^\circ = 4,6(cm)$

+) $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 8 \cdot 4,6 = 36,8(cm^2)$

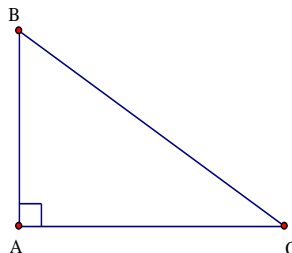
BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Hãy giải tam giác ABC, biết

a) $b = 5,4cm, \hat{C} = 30^\circ$

b) $c = 10cm, \hat{C} = 45^\circ$

HD:



a) Xét tam giác ABC vuông tại A, có:

$$\tan C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{AB}{5} \Rightarrow AB \Rightarrow BC \Rightarrow \hat{B}$$

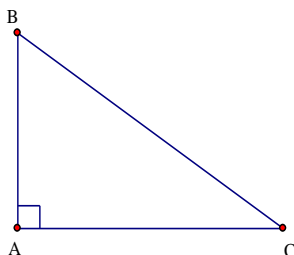
b) Xét tam giác ABC vuông tại A, có:

$$\tan C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC \Rightarrow AB \Rightarrow \hat{B}$$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Hãy giải tam giác ABC, biết

a) $a = 15cm, b = 10cm$

b) $b = 12cm, c = 7cm$

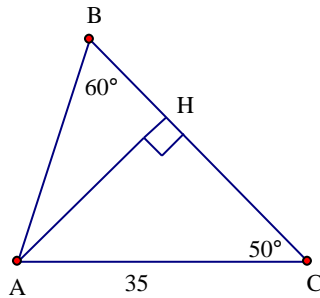


HD:

a) Dùng định lý pytago tính được $AB \Rightarrow \hat{B} \Rightarrow \hat{C}$

b) Dùng định lý pytago tính được $BC \Rightarrow \hat{B} \Rightarrow \hat{C}$

Bài 3: Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 50^\circ, AC = 35cm$. Tính S_{ABC}

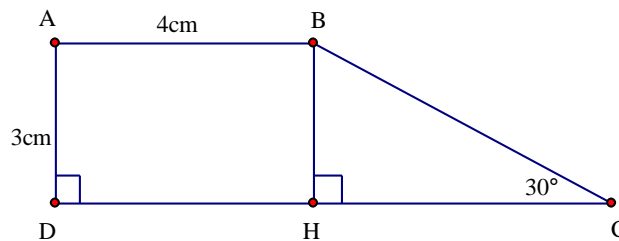


HD:

Kẻ đường cao AH ($H \in BC$)

$$\Rightarrow S_{ABC} = 509,08cm^2$$

Bài 4: Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, \hat{C} = 30^\circ, AB = 4cm, AD = 3cm$. Tính S_{ABCD}



HD:

Kẻ $BH \perp DC$ tại H.

Chú ý diện tích ABCD bằng tổng diện tích của ABHD và BHC.

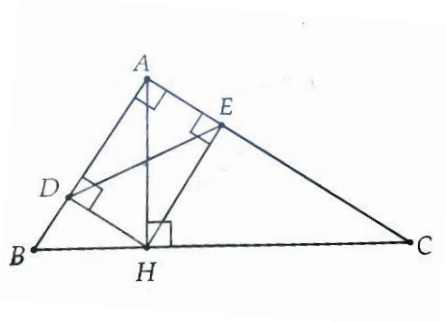
Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH, $HB = 9cm, HC = 16cm$

a) Tính AB, AC, AH

b) Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Tứ giác ADHE là hình gì?

c) Tính chu vi và diện tích của tứ giác ADHE

d) Tính chu vi và diện tích tứ giác BDEC



HD:

a) $HB = 9, HC = 16 \Rightarrow AH \Rightarrow AB \Rightarrow AC$

b) Tứ giác ADHE là hình chữ nhật vì có ba góc vuông

c) Tính AD dựa vào tam giác AHD vuông tại D

Tính HD dựa vào tam giác vuông AHD

+) $P_{ADHE} = (AD + DH) \cdot 2$

+) $S_{ADHE} = AD \cdot DH$

d) $P_{BDEC} = BD + DE + EC + BC; S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE}$

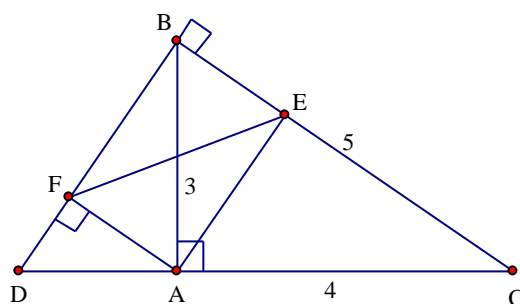
Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3\text{cm}, BC = 5\text{cm}$

a) Giải tam giác ABC (Số đo góc làm tròn đến độ)

b) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BC, đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D.

Tính độ dài các đoạn thẳng AD, BD

c) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên BC và BD. Chứng minh $\triangle BEF \sim \triangle BDC$



HD:

a) Dùng định lý Pytago tính được $AC = 4\text{cm}$

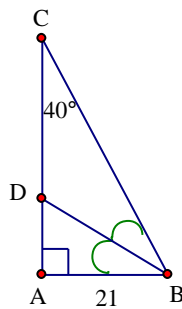
\Rightarrow các góc của tam giác ABC

b) Xét tam giác vuông BCD vuông tại B, tính được AD

- Dùng định lý Pytago vào tam giác vuông ABD tính được BD

c) Chứng minh được $\triangle BEF \sim \triangle BDC$ (cgc)

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 21\text{cm}$, $\hat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đường phân giác BD của \hat{A} , với D nằm trên cạnh AC



HD:

$\angle ABD = 25^\circ$. Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông ABD ta có:

$$BD = \frac{21}{\cos 25^\circ} \approx 21,19\text{cm}$$