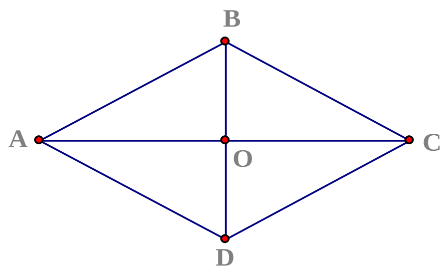
BÀI 11: HÌNH THOI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau



$\Diamond ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow \begin{cases} \Diamond ABCD \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$

2. Tính chất: Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành

Tính chất về cạnh:

+) Có bốn cạnh bằng nhau

+) Các cạnh đối song song

Tính chất về góc: Các góc đối bằng nhau

Tính chất về đường chéo:

+) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

+) Hai đường chéo vuông góc với nhau

+)Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi

3. Dấu hiệu nhận biết

Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi

Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi

Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi

Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh là hình thoi

4. Chú ý:

Hình thoi có 1 tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo

Hình thoi có hai trục đối xứng là các đường chéo của hình thoi

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh 1 tứ giác là hình thoi

Phương pháp giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh 1 tứ giác là hình thoi

Bài 1: Hình bình hành ABCD có hai đường cao AH, AK bằng nhau. CMR: ABCD là hình thoi

HD :

Xét tam giác vuông AHB và AKD có:

AH = AK (gt)

$B = D$ (t/c hình bình hành)

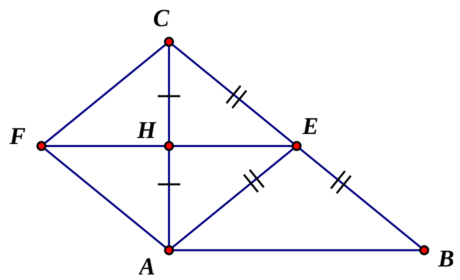
$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AKD$ (cạnh góc vuông- góc nhọn kÌ)

Vậy AB = AD (2 cạnh tương ứng)

Hình bình hành ABCD có 2 cạnh kì bằng nhau nên là hình thoi.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, Gọi H là trung điểm AC, E là trung điểm của BC. F điểm đối xứng với E qua H. Chứng minh tứ giác $AECF$ Là hình thoi.

HD



Xét tứ giác $AECF$, có: H là trung điểm AB (giả thiết)

H là trung điểm EF (F đối xứng với E qua H)

$\Rightarrow$Tứ giác $AECF$ là hình bình hành (1).

Mặt khác: ΔABC có HE là đường trung bình tam giác

$\Rightarrow HE \parallel AB$.

Mà $AB \perp AC$ (do ΔABC vuông tại A)

$\Rightarrow HE \perp AC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $AECF$ là hình thoi.

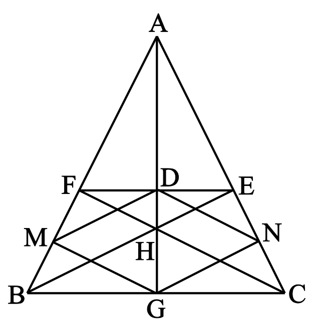
Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt EF tại D, cắt BC tại G. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của G trên AB và AC. Chứng minh rằng tứ giác DNGM là hình thoi.

HD:

Tìm cách giải

Dùng định lí đường trung bình của tam giác ta chứng minh được tứ giác DNGM là hình bình hành. Sau đó chứng minh hai cạnh kề bằng nhau.

Trình bày lời giải



ΔABE = ΔACF (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow$ AE = AF và BE = CF.

Vì H là trực tâm của ΔABC nên AH là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến,

Từ đó GB = GC và DE = DF.

Xét ΔEBC có GN // BE (cùng vuông góc với AC) và

GB = GC nên NE = NC.

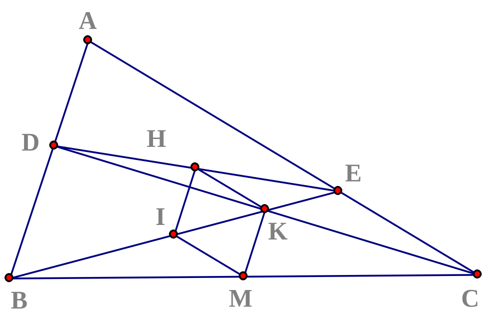
Chứng minh tương tự ta được MF = MB.

Dùng định lí đường trung bình của tam giác ta chứng minh được DM // GN và

DM = GN nên tứ giác DNGM là hình bình hành.

Mặt khác, DM = DN (cùng bằng $\frac{1}{2}$ của hai cạnh bằng nhau) nên DNGM là hình thoi.

Bài 4: Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho BD = CE. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, BC, DE. CMR: tứ giác MNIK là hình thoi



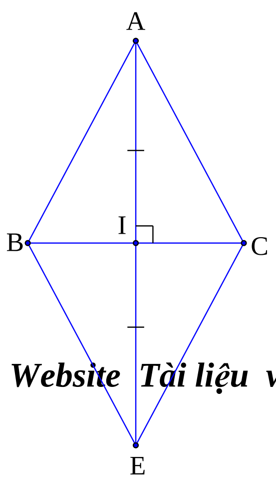
HD:

Ta có: $KN = NI = IM = MK = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CE \Rightarrow \lozenge MNIK$

Là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

Bài 5:. Cho tam giác ABC (AB = AC). Gọi E là điểm đối xứng với A qua cạnh BC. Chứng minh rằng ABEC là hình thoi.

HD:



Gọi I là trung điểm của AE, thì I thuộc BC và AI$\perp$BC.

Theo giả thiết, tam giác ABC cân tại A nên I là trung điểm của BC.

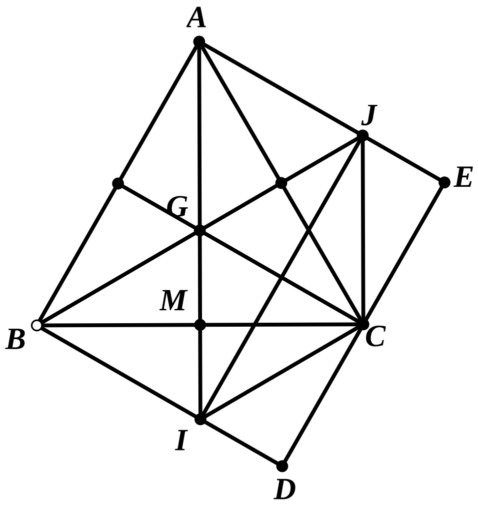
Tứ giác ABEC có hai đường chéo AI và BC vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đoạn nên tứ giác ABEC là hình thoi.

Bài 6:. Cho tam giác ABC đều có trọng tâm G. Vẽ hình chữ nhật ABDE sao cho C thuộc đoạn thẳng DE. Tia AG cắt BD tại I, tia AE cắt BG tại J. Chứng minh rằng:

a) I và J đối xứng nhau qua CG

b) Các tứ giác CGBI, GICJ, CJAG là hình thoi.

HD:



a) Dễ thấy hai tam giác ABJ là BAI bằng nhau (g-c-g), nên AI = BJ.

Do đó ABIJ là hình thang cân có hai đáy AJ và BI.

Vì hình thang cân ABIJ có một góc vuông nên suy ra ABIJ là hình chữ nhật, tâm G.

Mặt khác, $GC \perp AB$ nên GC là đường trung trực cạnh IJ.

Vậy IJ đối xứng nhau qua đường thẳng CG.

b) Ta có $ABI = 90^0 \Rightarrow GBC = IBC = 30^0$

Gọi M là trung điểm của BC, trong tam giác BGI, BM là đường cao và là đường phân giác nên M là trung điểm của GI.

Tứ giác CGBI có hai đường chéo BC và GI vuông góc nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, do đó CGBI là hình thoi.

Chứng minh tương tự như trên, ta có CGAI là hình thoi.

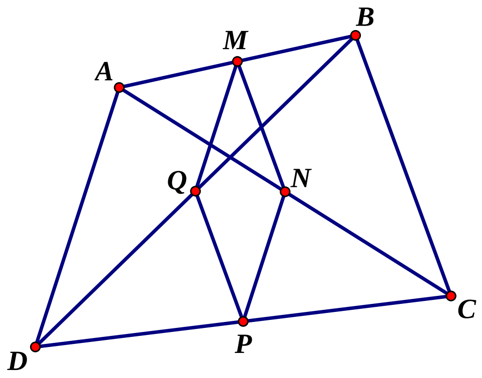
Vì I, J đối xứng nhau qua đường thẳng CG nên CI = CJ và GI = GJ (1).

Dễ thấy tam giác BGI là tam giác đều, suy ra CI = BG = GI (2).

Từ: (1) và (2) suy ra tứ giác GICJ có bốn cạnh bằng nhau, vậy GICJ là hình thoi.

Bài 7: Cho tứ giác ABCD có AD = BC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình thoi

HD:



Trong tam giác ABD, MQ là đường trung bình nên $MQ = \frac{1}{2}$ AD và MQ // AD (1).

Trong tam giác ACD, NP là đường trung bình nên NP = $\frac{1}{2}$ AD và NP // AD (1).

Từ (1) và (2) suy ra MQ = NP và MQ // NP. Do đó MNPQ là hình bình hành.

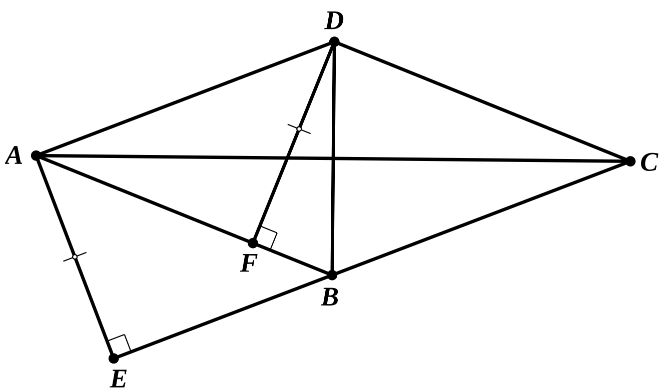
Lại có: trong tam giác ABC, MN là đường trung bình, ta có MN = $\frac{1}{2}$BC.

Theo giả thiết, AD = BC nên MN = $\frac{1}{2}$BC=$\frac{1}{2}$AD = MQ.

Tứ giác MNPQ là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên MNPQ là hình thoi.

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD. Vẽ AE $\perp$BC tại E, DF $\perp$ AB tại F. Biết AE = DF. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình thoi.

HD:



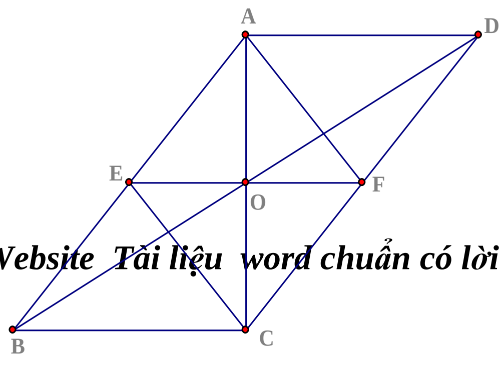
Xét hai tam giác EAB và FDA có:

$E = F = 90^0$, EA = FD (theo giả thiết), $EBA = FAD$ (so le trong)

Do đó hai tam giác EAB và FDA bằng nhau, suy ra AB = DA.

ABCD là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên ABCD là hình thoi.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD có AC vuông góc với AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh tứ giác AECF là hình thoi.



HD:

Cách 1: Ta có tứ giác AECF là hình hành có hai đường chéo vuông góc $\Rightarrow \lozenge AECF$ là hình thoi (dấu hiệu)

Cách 2: $AE = EC = CF = FA \Rightarrow \lozenge AECF$ là hình thoi (dấu hiệu)

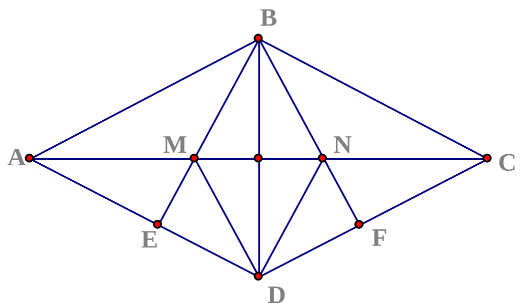
Bài 10: Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^0$. Từ đỉnh góc tù B kẻ các đường vuông góc BE, BF đến AD và DC, cắt AC theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng

a). AE = CF

b). Tam giác BEF đều

c). Tứ giác BMND là hình thoi

d). Cho AC = 16cm, tính chu vi tam giác BEF



HD:

b). $\hat{A} = 60^0 \Rightarrow \Delta BCD, \Delta ABD$ là các tam giác đều

$\Rightarrow E\hat{B}D = F\hat{B}D = 30^0 \Rightarrow \Delta BEF$ đều (tam giác cân có 1 góc bằng 60^0)

c). Ta đi chứng minh MB = BN = ND = DM

+) AC là đường trung trực của BD $\Rightarrow MB = MD (1)$

+) AC là đường trung trực của BD $\Rightarrow NB = ND(2)$

+) $\Delta ABE = \Delta CBF(ch-gn) \Rightarrow A\hat{B}E = C\hat{B}F \Rightarrow \Delta ABM = \Delta CBN$

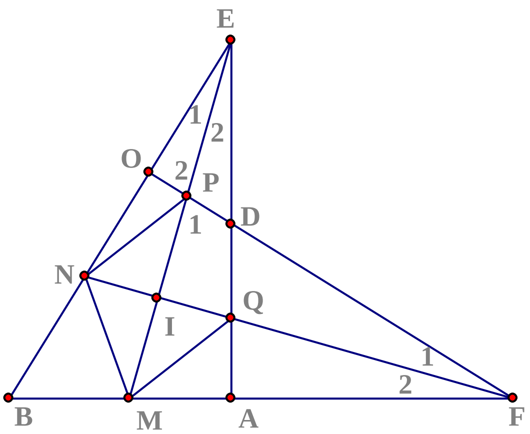
$\Rightarrow MB = NB(3) \Rightarrow MB = BN = ND = DM \Rightarrow \lozenge BMDN$

d). Ta có EF là đường trung bình của tam giác ADC $\Rightarrow EF = \frac{1}{2}AC = 8cm \Rightarrow P_{BEF} = 24(cm)$

Bài 11: Cho tam giác ABE vuông tại A. Từ điểm O trên cạnh BE kẻ đường vuông góc với BE cắt tia đối của tia AB tại F, cắt AE ở D. Tia phân giác của góc E cắt AB, OD lần lượt tại M và P, tia phân giác của góc F cắt BO, DA ở N và Q. Chứng minh rằng

a). $EM \perp FN$ b). $\lozenge MNPQ$ là hình thoi

HD :



a). Gọi I là giao điểm của MP và NQ

+) $\hat{E} = \hat{F}$ (cùng phụ với $\hat{B}$)

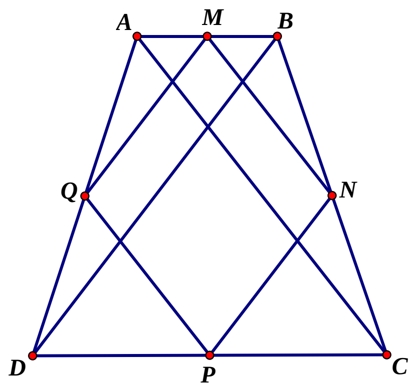
+) $\Delta FIP, \Delta OEP$ $(\hat{P}_1 = \hat{P}_2, \hat{E}_1 = \hat{F}_1) \Rightarrow \hat{O} = \hat{I} = 90^0 \Rightarrow EM \perp FN$

b). Ta có ΔPFM cân tịa F $\Rightarrow PI = IM$, ΔENQ cân tịa E $\Rightarrow NI = IQ$

Tứ giác MNPQ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau nên là hình thoi

Bài 12: Cho hình thang cân ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình thoi.

HD:



Trong tam giác ABC, MN là đường trung bình nên ta có MN = $\frac{1}{2}$ AC và MN // AC (1).

Tương tự trong tam giác ACD, PQ = $\frac{1}{2}$ AC và PQ // AC (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN = PQ và MN // PQ, do vậy MNPQ là hình bình hành (3).

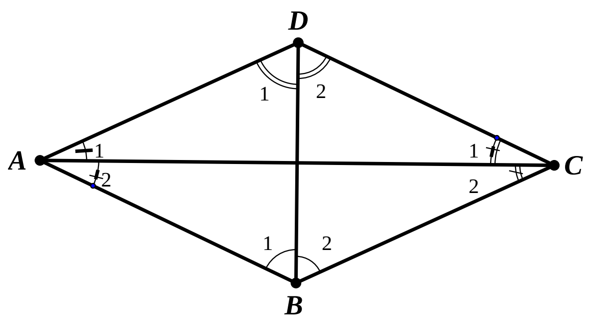
Lại xét tam giác ABD, MQ là đường trung bình, suy ra MQ= $\frac{1}{2}$ BD.

Vì ABCD là hình thang cân nên AC = BD, từ đó suy ra MN = MQ (2).

Từ (1) và (2) suy ra MNPQ là thoi.

Bài 13:. Cho tứ giác ABCD. Biết AC là đường phân giác của A và C; BD là đường phân giác của B và D. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình thoi.

HD:



Ta có: $A + B + C + D = 360^0$.

Từ giả thuyết suy ra: $A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 180^0$ (1) và

Mặt khác trong tam giác ACD, ta có: $A_1 + C_1 + D_1 + D_2 = 180^0$(2).

Từ (1) và (2) suy ra $B_1 = D_2$ Suy ra: AB // CD (so le trong)

$B_1 = B_2$; $D_1 = D_2$ suy ra $B_2 = D_1 \Rightarrow$ AD // BC (so le trong)

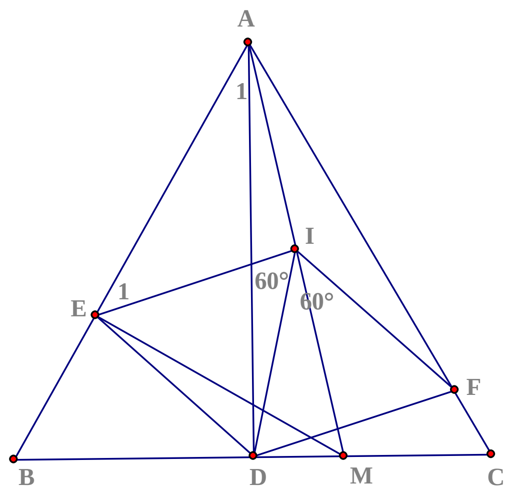
Suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành

ABCD có đường chéo là phân giác một góc nên ABCD là hình thoi.

Bài 14: Cho tam giác đều ABC. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC, E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Gọi I là trung điểm của AM, D là trung điểm của BC

a). Tính số đo các góc $D\hat{I}E, D\hat{I}F$

b). Chứng minh rằng tứ giác DEIF là hình thoi



HD :

a). $D\hat{I}E = M\hat{I}E - M\hat{I}D = \hat{A}_1 + \hat{E}_1 - (D\hat{A}I + A\hat{D}I) = 2\hat{A}_1 - 2D\hat{A}I = 2(E\hat{A}I - D\hat{A}I) = 2.30^0 = 60^0$

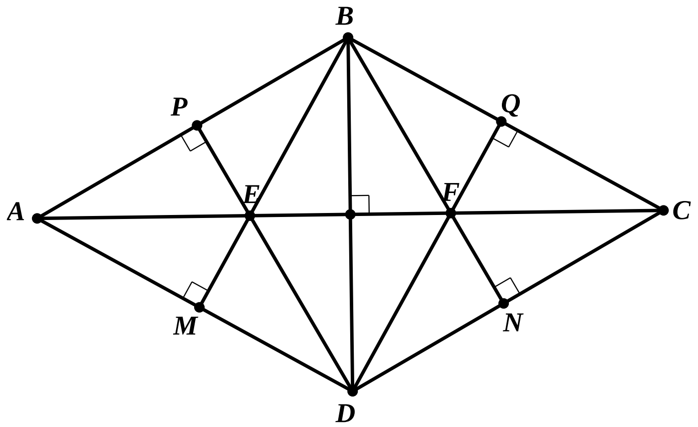
Tương tự ta có:

$$D\hat{I}F = 2\,(F\hat{A}I + D\hat{A}I) = B\hat{A}C = 60^0 = D\hat{I}M + M\hat{I}F$$

b). Ta có $\Delta DEI, \Delta DFI$ là các tam giác đều $\Rightarrow EI = IF = FD = DE \Rightarrow \lozenge DEIF$ là hình thoi (dấu hiệu)

Bài 15: Cho hình thoi ABCD có $B > 90^o$. Vẽ BM vuông góc AD tại M, BN vuông góc CD tại N, DP vuông góc AB tại P, DQ vuông góc BC tại Q; BM cắt DP tại E, BN cắt DQ tại F. Chứng minh rằng BFDE là hình thoi.

HD:



Theo giả thiết: $BF \perp CD$, $DE \perp AB$, vì AB // CD nên BF // DE.

Chứng minh tương tự ta có BE // DF. Do đó tứ giác BFED là hình bình hành.

Ta chứng minh $EF \perp BD$. Thật vậy,

Trong tam giác ABD, BE và DE là đường cao nên AE cũng là đường cao,

Suy ra $AE \perp BD$.

Tương tự, $CE \perp BD$.

Vì $AC \perp BD$ suy ra bốn điểm A, C, E, F thẳng hàng và $EF \perp BC$.

Tứ giác BFDE là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc, suy ra BFDE là hình thoi.

Bài 16:. Cho tam giác ABC cân tại A có BC = 6cm. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

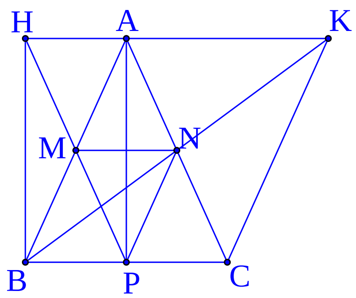
a) Tính độ dài MN? Chứng minh MBNC là hình thang cân.

b) Gọi K là điểm đối xứng của B qua N. Chứng minh tứ giác ABCK là hình bình hành.

c) Gọi H là điểm đối xứng của P qua M. Chứng minh AHBP là hình chữ nhật.

d) Chứng minh AMPN là hình thoi.

HD:



a) MN là đường trung bình trong tam giác ABC. Ta có MN // BC và MN = $\frac{1}{2}$BC.

Từ đó ta có MN = 3cm và BMNC là hình thang.

Ta giác ABC cân tại A nên $B = C$.

Ta được BMNC là hình thang cân.

b) Theo đề thì N là trung điểm của AC và BK. Tứ giác ABCK có hai đường chéo AC và BK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn nên ABCK là hình bình hành.

c) M là trung điểm của AB và HP nên AHBP là hình bình hành.

Lại có tam giác ABC cân tại A và P là trung điểm của BC nên AP$\perp$BC.

Hình bình hành AHBP có một góc vuông nên AHBP là hình chữ nhật.

d) MP là đường trung bình trong tam giác ABC nên MP // AC và MP = $\frac{1}{2}$AC.

Suy ra MP = AN và MP // AN. Như vậy AMPN là hình bình hành.

Mặt khác, AM = $\frac{1}{2}$AB, AN = $\frac{1}{2}$AC và AB = AC nên AM = AN.

Hình bình hành AMPN có hai cạnh kề AM và AN bằng nhau nên AMPN là hình thoi.

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

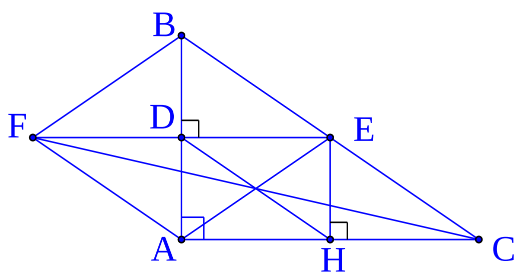
a) Chứng minh tứ giác ACED là hình thang vuông.

b) Gọi F là điểm đối xứng của E qua D. Chứng minh ACEF là hình bình hành.

c) Chứng minh AEBF là hình thoi.

d) Gọi H là hình chiếu của điểm E trên AC. C/minh ba đường thẳng AE, CF, DH đồng qui.

HD:



a)DE là đường trung bình trong tam giác ABC nên DE // AC, do đó tứ giác ACED là hình thang.

Mặt khác tứ giác ACED có $A = 90^0$ nên ACED là hình thang vuông.

b) Ta có EF // AC (1).

F là điểm đối xứng của E qua D lên D là trung điểm của EF, do đó EF = 2ED.

Mặt khác, theo trên thì ED = $\frac{1}{2}$AC. Do đó ta có EF = AC (2).

Từ: (1) và (2) suy ra ACEF là hình bình hành.

c) Theo giả thiết thì D là trung điểm của AB và EF.

Tứ giác AEBF có hai đường chéo AB và EF vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đoạn, nên AEBF là hình thoi.

d) Theo trên, ACEF là hình bình hành nên AE cắt CF tại trung điểm mỗi đoạn.

Tứ giác ADEH có $A = D = H = 90^0$ nên ADEH là hình chữ nhật, do đó AE và DH cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Từ đó ta có AE, CF, DH đồng qui tại trung điểm của mỗi đoạn.

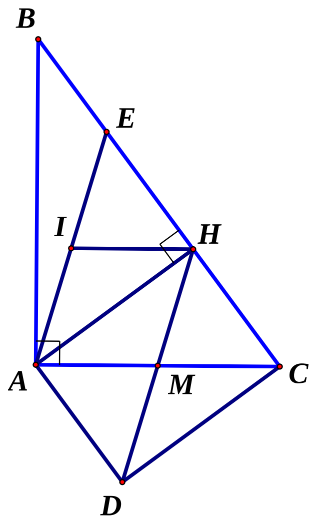
Bài 18:. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC). Kẻ đường cao AH ($H \in BC$), gọi M là trung điểm của AC. Lấy điểm D đối xứng với H qua M.

a) Chứng minh tứ giác ADCH là hình chữ nhật.

b) Trên tia đối của tia HC lấy điểm E sao cho HE = HC. Chứng minh ADHE là hình bình hành.

c) Gọi I là trung điểm của AE. Chứng minh AIHM là hình thoi.

HD:



a) Ta có M là trung điểm của AC và HD.

Tứ giác ADCH có hai đường chéo AC và HD cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đoạn nên ADCH là hình bình hành.

Lại có $AHC = 90^0$ nên ADCH là hình chữ nhật.

b) Theo trên ta suy ra AD // BC hay AD // HE, và AD = HC = HE.

Từ đó suy ra ADHE là hình bình hành.

c) Theo giả thiết thì H, I lần lượt là trung điểm của EC và EA.

Trong ΔEAC có HI là đường trung bình nên HI // AC và HI = $\frac{1}{2}$AC.

Suy ra HI // AM và HI = AM. Do vậy AIHM là hình bình hành.

Mặt khác, vì ADCH là hình chữ nhật có tâm M nên MA = MH.

Hình bình hành AIHM có hai cạnh kề bằng nhau nên AIHM là hình thoi.

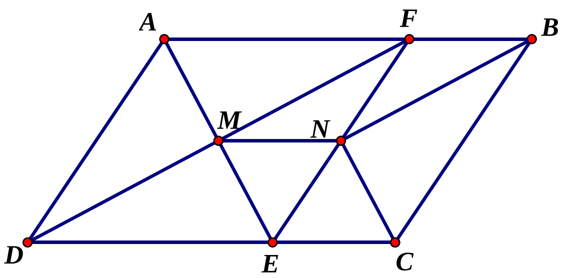
Bài 19: Cho hình bình hành ABCD, AB = $\frac{3}{2}$AD. Đường phân giác góc A cắt CD tại E, đường phân giác góc D cắt AB tại F; hai đường phân giác đó cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng ADEF là hình thoi.

b) Gọi N là giao điểm của phân giác góc ABC và phân giác góc BCD. Chứng minh rằng N là trung điểm của EF.

c) Giả sử $A = 120^0$. Chứng minh rằng lúc này, tứ giác MNCE là hình thoi.

HD:



a) $MAD + MDA = \frac{1}{2}\left(FAD + EDA\right) = 90^0 \Rightarrow$ AM $\perp$ DF.

Từ đó ta được tam giác ADF cân tại A, suy ra M là trung điểm của DF.

Chứng minh tương tự, M là trung điểm của AE.

Tứ giác ADEF có hai đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm mỗi đường,

Do vậy ADEF là hình thoi.

b) Dễ dàng chứng minh $BNC = 90^0$.

EF // AD // BC $\Rightarrow AFE = ABC \Rightarrow MFE = NBC$.

Lại có EF // BC. Từ đó ta có hai tam giác vuông MEF và NCB bằng nhau.

$\Rightarrow$MF = NB. Mặt khác $AFD = ABN \Rightarrow$ MF // BN.

Vậy MFBN là hình bình hành. Suy ra MN // BF // DE.

Vì M là trung điểm của DF nên N là trung điểm của EF.

c) Theo chứng minh trên ta có ME = NC. Dễ dàng chứng minh ME // NC.

Do đó MNCE là hình bình hành.

$MEN = DAM = 60^0;\ NEC = ADE = 60^0 \Rightarrow$ EN là phân giác của góc MEC.

Tứ giác MNCE là hình bình hành có đường chéo là đường phân giác của một góc nên MNCE là hình thoi.

Bài 20: Cho ΔABC cân tại A, AH là đường cao. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC. Biết AH = 16cm và BC = 12cm.

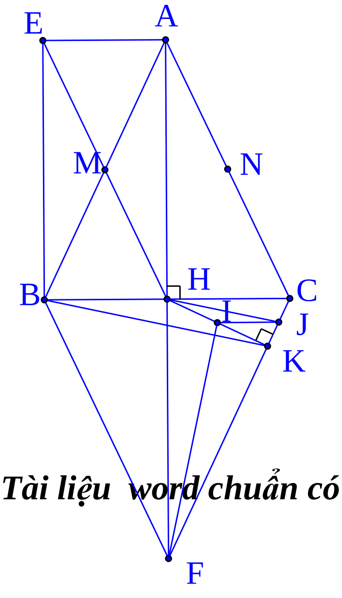
a) Tính diện tích tam giác ABC và độ dài cạnh MN.

b) Gọi E là điểm đối xứng của H qua M. Chứng minh tứ giác AHBE là hình chữ nhật.

c) Gọi F là điểm đối xứng của A qua H. Chứng minh tứ giác ABFC là hình thoi.

d) Gọi K là hình chiếu của H lên cạnh FC. Gọi I là trung điểm của HK. Chứng minh BK vuông góc IF.

HD:



a) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}16.\ 12 = 96\ (cm^2)$.

b) Theo giả thiết, M là trung điểm của AB và HE,

Do đó tứ giác AHBE là hình bình hành (vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Lại có $AH \perp BC$. Hình bình hành AHBE có một góc vuông nên AHBE là hình chữ nhật.

c) Vì ΔABC cân tại A nên H là trung điểm của BC, và H là trung điểm của AF.

Tứ giác ABFC có hai đường chéo BC và AF vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đoạn nên ABFC là hình thoi.

d) Gọi J là trung điểm của CK, tam giác CHK có IJ là đường trung bình nên IJ // CH,

Do đó $IJ \perp FH$.

Trong tam giác HFJ, HI và JI là hai đường cao nên I là trực tâm của ΔHFJ,

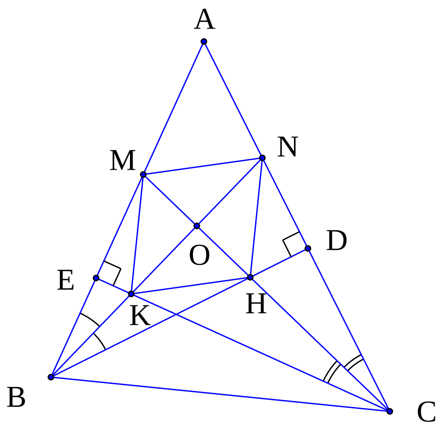
Suy ra $FI \perp HJ$ (1).

Xét tam giác BCK, HJ là đường trung bình nên HJ // BK (2).

Từ (1) và (2) suy ra $FI \perp BK$.

Bài 21: Cho ΔABC nhọn, các đường cao BD, CE. Tia phân giác của góc ABD và ACE cắt nhau tại O, cắt AC và AB lần lượt tại N và M. Tia BN cắt CE tại K, tia CM cắt BD tại H. Chứng minh MNHK là hình thoi.

HD:



Ta có $ABD + BAC = 90^0$ và $ACE + BAC = 90^0$.

Suy ra $\frac{1}{2}\left(ABD + BAC\right) + \frac{1}{2}\left(ACE + BAC\right) = 90^0$

$\Rightarrow ABN + BAC + ACM = 90^0$ (1)

Xét tam giác ABN có $ABN + BAC = BNC$ (góc ngoài của tam giác) (2).

Từ: (1), (2) suy ra $NCO + CNO = 90^0$

Do đó $CO \perp NK$.

Lại có CO là phân giác góc NCK từ đó ta có O là trung điểm NK.

Chứng minh tương tự, O là trung điểm của MH.

Tứ giác MNHK có hai đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm mỗi đường nên MNHK là hình thoi.

Bài 22:Các đường chéo AC và BD của tứ giác $ABCD$ cắt nhau tại O. Biết rằng các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA có chu vi bằng nhau. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

HD:

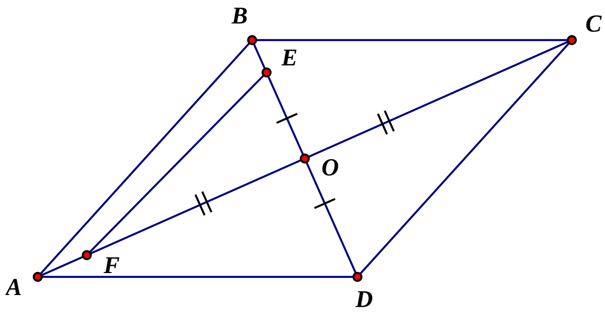
Không mất tính tổng quát giả sử:

$$OB \geq OD, OA \geq OC$$

Trên cạnh OB lấy điểm E sao cho: $OE = OD$.

Trên cạnh OA lấy điểm F sao cho: $OF = OC$.

$$\Rightarrow \Delta EOF = \Delta DOC\,(c.g.c) \Rightarrow P_{\Delta DOC} = P_{\Delta EOF}$$



Mà $P_{\Delta OAB} = P_{\Delta DOC}$ (giả thiết) suy ra: $P_{\Delta OAB} = P_{\Delta EOF} \Rightarrow BE + AB + AF = FE$

Mà: $AB + BE \geq AE$ (bất đẳng thức trong tam giác)

$$\Rightarrow AB + BE + AF \geq AE + AF \geq FE$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv B, F \equiv A \Leftrightarrow ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow OB = OD$.

Mà: $P_{\Delta OAB} = P_{\Delta DOA}$ (giả thiết) $\Rightarrow AB = AD \Leftrightarrow ABCD$ là hình thoi.

Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình thoi để chứng minh qua hệ bằng nhau, song song, vuông góc, tính độ dài các đoạn thẳng

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc, đường chéo của hình thoi

Bài 1: a. Cho hình thoi ABCD, kẻ đường cao AH, AK. CMR: AH = AK

HD :

Xét ΔAHB và Δ AKD có:

AB = AD (vì ABCD là hình thoi)

$B = D$ (t/c hình thoi)

$\Rightarrow \Delta$AHB = ΔAKD (cạnh huyền góc nhọn)

$\Rightarrow$AH = AK (2 cạnh tương ứng)

Bài 2: Hình thoi ABCD có $A = 60^0$. Kẻ hai đường cao BE, BF. Tam giác BEF là tam giác gì? Vì sao?

HD :

Xét ΔAEB và ΔCFB có:

AB = CB (t/c hình thoi)

$A = C$ (t/c hình thoi)

Suy ra: $\Delta AEB = \Delta CFB$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Rightarrow$ BE = BF

Vậy tam giác BEF cân

Lại có: $B = \dfrac{360^0 - 120^0}{2} = 120^0$

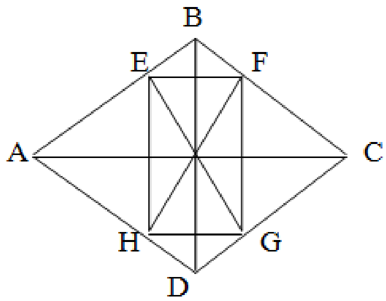
Mà $B_1 = B_2 = 30^0$

$\Rightarrow B_3 = 60^0$

Vậy tam giác BEF đều.

Bài 3: Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là chân các đường góc kẻ từ O đến AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?

HD :



Ta có; OF $\perp$ AB, OG $\perp$ CD

Mà AB // CD (t/c hình thoi)

$\Rightarrow$ E, O, G thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có 3 điểm F, O, H thẳng hàng.

Điểm O thuộc tia phân giác của góc B nên cách đều 2 cạnh của góc do đó: OE = OF

Tương tự ta cũng có: OF = OG, OG = OH

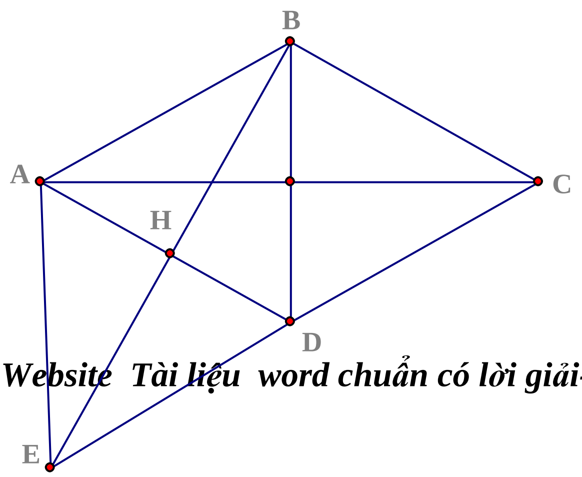
Vậy tứ giác EFGH có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình chữ nhật.

Bài 4: Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^0$, vẽ BH vuông góc với AD rồi kéo dài một đoạn HE = HB. Nối E với A, E với D

a). Chứng minh rằng tứ giác ABDE là hình thoi

b). E, D, C thẳng hàng

c). EB = AC



HD :

a). Ta có $\hat{A} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ đều $\Rightarrow AH = HD$

Tứ giác ABDE có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau nên là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

b). Có ABCD là hình thoi $\Rightarrow CD // AB$

Có ABDE là hình thoi $\Rightarrow DE // AB \Rightarrow E, D, C$ thẳng hàng

c). Xét $\lozenge ABCE$ có AB // CE $\Rightarrow \lozenge ABEC$ là hình thang

Lại có AE = AB = BC $\Rightarrow$ là hình thang có hai cạnh kề bằng nhau

$\hat{C} = \hat{E} = 60^0 \Rightarrow ABCE$ là hình thang cân $\Rightarrow AC = BE$

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD có $\hat{A} = 60^0, AD = 2AB$. Gọi M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC. Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với MN ở E cắt AB ở F. Chứng minh rằng

a). Tứ giác MNCD là hình thoi

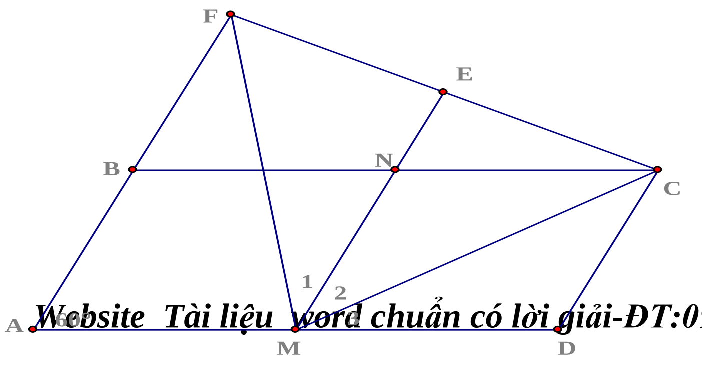
b). E là trung điểm của CF

c). Tam giác MCF đều

d). F, N, D thẳng hàng

e). $B\hat{A}D = 2.A\hat{F}M$

HD :



a). $\lozenge MNCD$ có: $\begin{cases} NC = MD = \dfrac{1}{2}BC \\ NC // MD \end{cases} \Rightarrow \lozenge MNCD$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Ta lại có $MD = DC = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow \lozenge MNCD$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

b). Xét ΔBCF có: N là trung điểm của BC, NE // BF $\Rightarrow E$ là trung điểm của FC

c). Xét ΔMCF có: ME là đường cao, đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta MCF$ cân tại M $\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Mặt khác ta lại có MNCD là hình thoi $\Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{M}_3$

$\Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{M}_2 + \hat{M}_3 = 60^0 (dvi B\hat{A}C) \Rightarrow F\hat{M}C = 60^0 \Rightarrow \Delta MFC$ là tam giác đều

d). Xét ΔMFC có: FM = FC $\Rightarrow F$ thuộc đường trung trực của MC

Mặt khác DM = DC $\Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của MC

Vậy FD là đường trung trực của MC (1)

$\lozenge MNCD$ là hình thoi $\Rightarrow ND$ là đường trung trực của MC (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow FD \equiv ND \Rightarrow F, N, D$ thẳng hàng

e). $\begin{cases} B\hat{A}D = N\hat{M}D \\ N\hat{M}D = \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 2\hat{M}_3 \Rightarrow B\hat{A}D = 2.A\hat{F}M \\ \hat{M}_3 = A\hat{F}M (slt) \end{cases}$

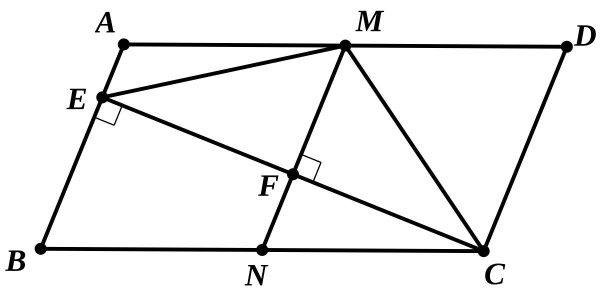
Bài 6:. Cho hình bình hành ABCD có AD = 2AB. Gọi M là trung điểm của AD, CE $\perp$ AB tại E, MF $\perp$ CE tại F, MF cắt BC tại N. Chứng minh rằng

a) MNCD là hình thoi

b) Tam giác EMC cân

c) $BAD = 2AEM$

HD:



a) MF $\perp$CE, AE $\perp$ CE do đó MN // // AE // CD (1)

Lại có MD // NC và MD $= \frac{1}{2}$ AD= CD (2)

Từ (1) và (2) suy ra MNCD là hình thoi.

b) Ta có ADCE là hình thang với hai đáy AE và CD.

Vì M là trung điểm AD nên MF là đường trung bình của hình thang ADCE,

Suy ra F là trung điểm của CE.

Tam giác EMC có MF là đường cao và là trung tuyến nên EHC cân tại M.

c) MNCD là hình thoi nên $NMD = 2NMC$

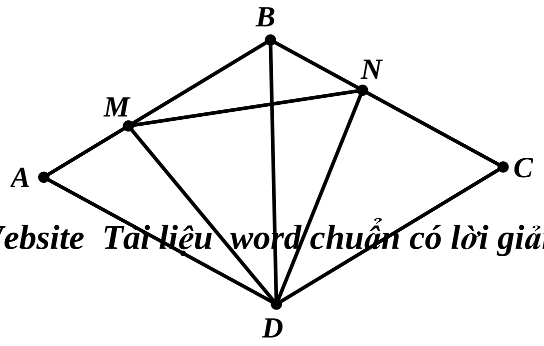
Ta có: $BAD = NMD = 2NMC = 2EMF$ (1).

Lại có $AEM = EMF$ (2) (vì cùng phụ với góc MEF).

(1) và (2) suy ra $BAD = 2AEM$.

Bài 7: Cho hình thoi ABCD cạnh a có $A = 60^o$. Đường thẳng d cắt 2 cạnh AB, BC lần lượt tại M, N sao cho MB + NB = CD. Chứng minh rằng tam giác DMN đều.

HD:



Theo đề: MB + NB = CD = AB suy ra MA = NB.

$\widehat{A} = 60^0$ suy ra: $\widehat{ABC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{NBD} = 60^0$

Tam giác ABD đều nên AD = BD

Xét hai tam giác MAD và NBD, có:

MA = NB, $\widehat{MAD} = \widehat{NBD} = 60^0$, AD = BD

Do đó $\Delta MAD = \Delta NBD$ (c-g-c).

Từ đó: MD = ND và $\widehat{ADM} = \widehat{BDN}$.

$\widehat{MDN} = \widehat{MDB} + \widehat{BDN} = \widehat{MDB} + \widehat{ADM} = \widehat{ADB} = 60^0$ (Vì tam giác ABD đều)

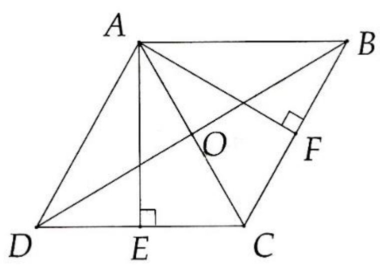
Tam giác MND có MD = ND và góc D bằng 60^0. Vậy tam giác MND đều.

Bài 8: Cho hình thoi ABCD có B = 60°. Kẻ AE ⊥ DC, AF⊥BC.

a) Chứng minh AE = AF.

b) Chứng minh tam giác AEFđều.

c) Biết BD = 16 cm, tính chu vi tam giác AEF



HD:

a) Do AC là phân giác của góc DBC nên AE = FA

b) Có $B = 60^0$ nên ΔABC và ΔADC là các tam giác đều $\Rightarrow EAC = FAC = 30^0$.

Vậy ΔAFE cân và có $FAE = 60^0$ nên ΔFAE đều.

c) EF là đường trung bình của tam giác BCD. Vậy $FE = \frac{1}{2}DB = 8cm;$

Chu vi ΔFAE là 24cm

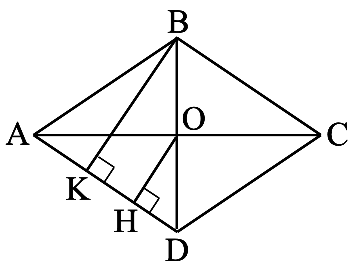
Bài 9: Cho hình thoi ABCD, độ dài mỗi cạnh là 13cm. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ OH ⊥ AD. Biết OH = 6cm, tính tỉ số của hai đường chéo BD và AC.

HD:

Tìm cách giải

Vẽ thêm BK ⊥ AD để dùng định lí đường trung bình của tam giác, định lí Py-ta-go tính bình phương độ dài của mỗi đường chéo.

Trình bày lời giải



Vẽ BK ⊥ AD.

Xét ΔBKD có OH // BK (vì cùng vuông góc với AD) và OB = OD nên KH = HD.

Vậy OH là đường trung bình của ΔBKD.

Suy ra $\mathrm{OH} = \frac{1}{2}\mathrm{BK},$ do đó BK = 12cm.

Xét ΔABK vuông tại K có $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow AK = 5cm$

Do đó KD = 8cm.

Xét ΔBKD vuông tại K có $BD^2 = BK^2 + KD^2 = 12^2 + 8^2 = 208$.

Xét ΔAOH vuông tại H có $OA^2 = OH^2 + AH^2 = 6^2 + 9^2 = 117$.

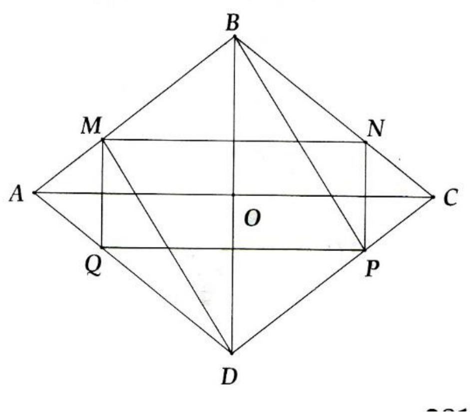
$$\Rightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = 117 \Rightarrow AC^2 = 468.$$

Do đó $\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{208}{468} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{2}{3}$.

Bài 10: Cho hình thoi ABCD, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên cạnh AB, BC, CD, DAlấy theo thứ tự các điểm M, N, P, Q sao cho AM = CN = CP = AQ. Chứng minh:

a) M, O, P thẳng hàng và N, O, Q thẳng hàng

b) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.



HD:

a) Chứng minh được MBPD và BNDQ đều là hình bình hành $\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Áp dụng định lý Talet đảo cho ΔABD và ΔBAC ta có MQ // BD và MN // AC.

Mà ABCD là hình thoi nên $AC \perp BD \Rightarrow MQ \perp MN$

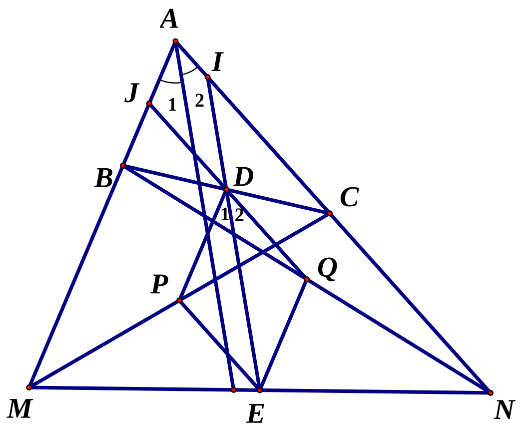
MNPQ là hình chữ nhật vì có các góc ở đỉnh là góc vuông

Bài 11: Cho tam giác ABC (AB < AC). Trên tia đối của tia BA lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho BM = CN. Gọi D, E, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, MN, MC, NB.

a) DQ cắt AM tại J. Chứng minh rằng $PEQ = MJQ$

b) DE cắt AN tại I. Chứng minh rằng DE song song với đường phân giác của BAC

HD:



a) Tam giác BNM có QE là đường trung bình nên ta có: QE // BM .

Tương tự DP // BM, QD // CN, PE //CN.

Từ đó QE // DP và PE // DQ, suy ra DPEQ là hình bình hành.

$\Rightarrow PEQ = PDQ$.

Mặt khác $PDQ = MJQ$ (so le trong)

Vậy $PEQ = MJQ$.

b) Gọi Ax là đường phân giác BAC.

Ta có: DP = $\frac{1}{2}$BM và PE = $\frac{1}{2}$CN.

Theo giả thiết, BM = CN $\Rightarrow$ DP = PE.

Do đó DPEQ là hình thoi, suy ra DE là tia phân giác góc PDQ đồng thời

$PDQ = PEQ = MJQ = BAC$ (góc đồng vị).

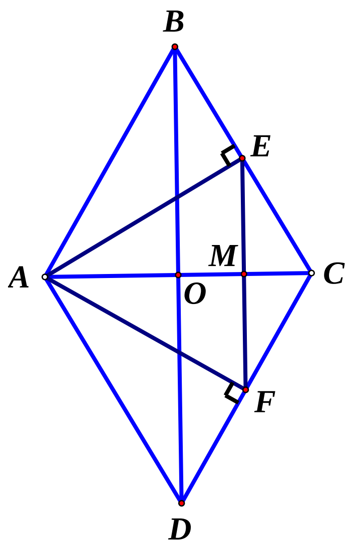
Từ đó suy ra $A_2 = D_2 = DIC$ (góc đồng vị) $\Rightarrow$DE // Ax (hai góc đồng vị bằng nhau).

Bài 12:. Cho hình thoi ABCD, 2 đường chéo cắt nhau tại O. Vẽ AE vuông góc BC tại E, AF vuông góc CD tại F. Biết EF = $\frac{1}{2}$BD

a) Chứng minh rằng EF là đường trung bình của tam giác BCD

b) Tính các góc của hình thoi ABCD.

HD:



a)Ta có hai tam giác ABC và ADC bằng nhau và AE, AF lần lượt là đường cao,

Do đó AE = AF.

Gọi M là giao điểm của EF và AC. Ta có:

$$\begin{cases} BAE + ABE = 90^0 \\ DAF + ADF = 90^0 \Rightarrow BAE = DAF \\ ABE = ADF \end{cases}$$

Từ đó suy ra $EAM = FAM$.

Tam giác cân AEF có AM là đường phân giác nên AM là đường cao. Vậy EF // BD.

Mặt khác, $EF = \frac{1}{2}BD = DO$,

Suy ra EFDO là hình bình hành $\Rightarrow$OE // DF // AB $\Rightarrow$ E là trung điểm của BC.

Vậy EF là đường trung bình trong tam giác BCD.

b) E là trung điểm của BC nên tam giác ABC cân tại A.

Vì ABCD là hình thoi nên suy ra tam giác ABC đều, từ đó ta được góc $B = 60^0$.

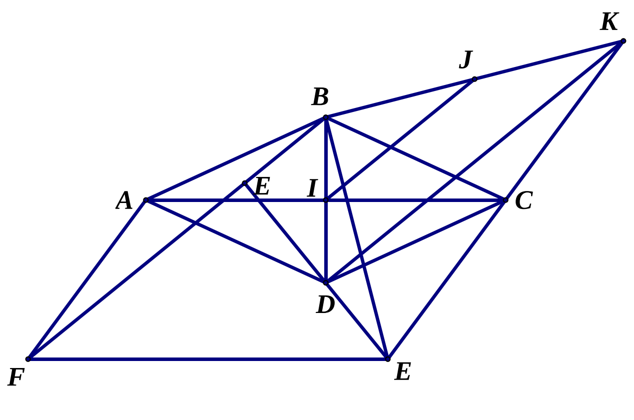
Vậy ta có: $A = C = 120^0,\ B = D = 60^0$.

Bài 13:. Cho hình thoi ABCD. Vẽ hình bình hành ACEF có CE = AD. Gọi K là điểm đối xứng của E qua C (K không trùng với D). Chứng minh rằng:

a) FK, BD, AC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b) Một trong bốn điểm B, D, E, F là trực tâm của tam giác có ba đỉnh là ba điểm còn lại.

HD:



a) Gọi I là giao điểm của AC và BD, suy ra I là trung điểm của AC và BC.

Ta có AF // CE // CK và AF = CE = CK nên AFCK là hình bình hành.

Do đó trung điểm I của AC cũng là trung điểm của KF.

Vậy ba đường đoạn thẳng FK, BD, AC đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

b) Giả sử E, F nằm cùng phía với D so với đường thẳng AC.

Ta chứng minh D là trực tam tam giác BEF.

Vì BD $\perp$ AC và EF // AC nên BD $\perp$ EF (1).

Gọi J là trung điểm của BK. IJ là đường trung bình trong tam giác BFK nên IJ // BF.

Mặt khác IJ là đường trung bình trong tam giác BDK nên IJ // DK.

Như vậy DK // BF (a).

Trong tam giác DKE, có DC là trung tuyến, đồng thời DC = CE = CK nên tam giác DKE vuông tại D, suy ra DE $\perp$DK(b)

Từ (a) và (b) suy ra ED$\perp$BF (2).

Từ (1) và (2) suy ra D là trực tâm tam giác BEF.

Trường hợp nằm khác phía so với đường thẳng AC, ta chúng minh được B là trực tâm tam giác DEF.

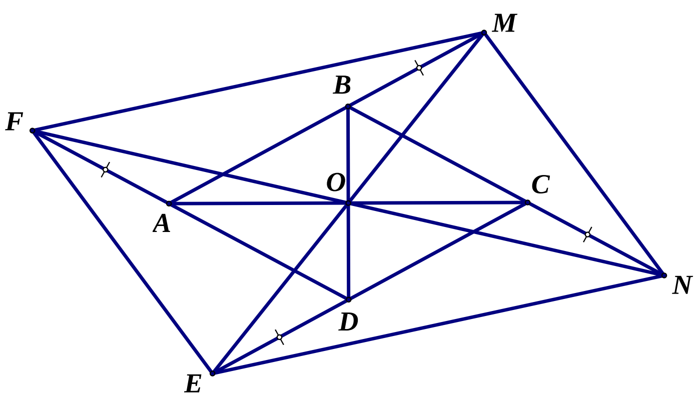
Bài 14:. Cho hình thoi ABCD. Trên các tía đối của tia BA, CB, DC, AD lấy các điểm M, N, E, F sao cho BM = CN = DE = AF. Chứng minh rằng:

a) $\Delta FAM = \Delta NCE$.

b) MNEF là hình bình hành.

c) AC, BD, ME, NF đồng quy.

HD:



a) $FAM + BAD = 180^0$, $NCE + DCB \ = 180^0$.

Mặt khác $BAD = DCB$ nên $FAM = NCE$

Lại có: FA = NC và MA = MB + BA = ED + DC = EC.

Do đó $\Delta FAM = \Delta NCE$ (c-g-c).

b) Theo trên ta có FM = NE (1).

Chứng minh tương tự câu a, hai tam giác MBN và EDF bằng nhau.

Suy ra MN = EF(2).

Từ (1), (2) suy ra MNEF là hình bình hành.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có O là trung điểm của AC và BD.

ED // MB và ED = MB nên MBED là hình bình hành, suy ra O là trung điểm của ME.

Chứng minh tương tự, NCFA là hình bình hành, do đó O cũng là trung điểm của NF.

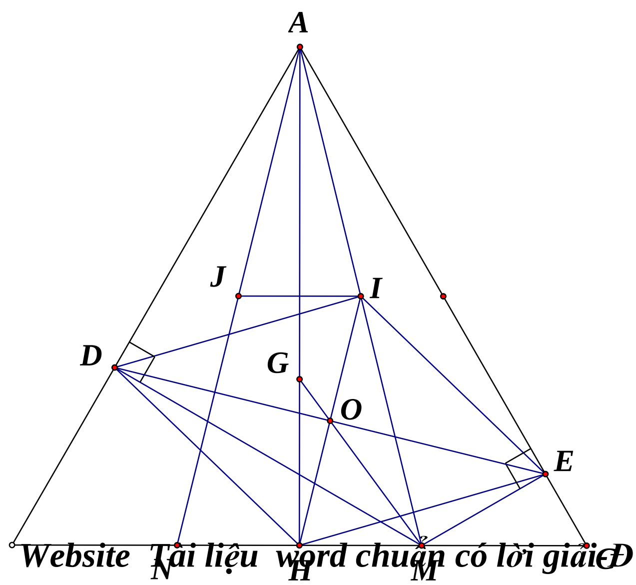
Vậy bốn đoạn thẳng AC, BD, ME, NF đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài 15:. Cho Δ ABC đều có G là trọng tâm, đường cao AH. Lấy điểm M bất kì trên cạnh BC, I là trung điểm của AM. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB và AC.

a) Tứ giác DIEH là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng IH, DE, MG đồng quy.

HD:



a) Giả sử M nằm giữa C và H.

Tam giác AHM vuông tại H, HI là trung tuyến nên HI = IM = IA.

Tam giác AME vuông tại E có EI là trung tuyến nên EI = IM = IA.

$\Rightarrow$ HI = EI (a).

Tam giác AHI cân tại I nên: $AHI = HAI$

$$HIM = AHI + HAI = 2HAM.$$

Tương tự ta có $EIM = 2CAM$

Suy ra:

$$HIE = HIM + EIM = 2\left(HAM + CAM\right) = 60^0 \text{ (b)}$$

Từ: (a), (b) suy ra tam giác IEH đều (1).

Tam giác DMA vuông tại D, có DI là trung tuyến nên DI = IA = IM = IH (c).

Tương tự như trên ta cũng có $DIM = 2DAM$

$$DIH = DIM - HIM = 2\left(DAM - HAM\right) = 2DAH = 60^0 \text{ (d)}.$$

Từ: (c), (d) suy ra ta giác DIH đều (2).

Từ: (1), (2) suy ra tứ giác DIEH là hình thoi.

b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua H và J là trung điểm của AN.

Trong tam giác AMN, IJ là đường trung bình, nên IJ // MH và IJ = MH.

Từ đó suy ra IJHM là hình bình hành.

Gọi O là trung điểm của IH thì O cũng là trung điểm của JM.

Mặt khác, H là trung điểm của MN và AG = $\frac{2}{3}$AM nên G là trọng tâm tam giác AMN.

Do đó M, J, G thẳng hàng.

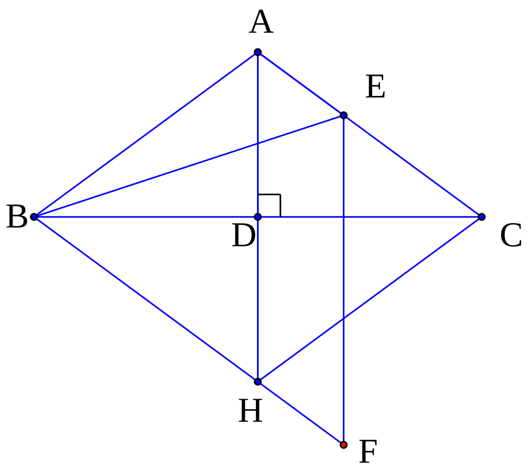
Vì DIEH là hình thoi nên O cũng là trng điểm của DE.

Vậy ba đường thẳng DE, IH, MG đồng quy tại O.

Bài 16:. Cho ΔABC cân tại A có hai đường trung phân giác AD và BE thỏa mãn BE = 2. AD. Tính

BAC.

HD:



Ta có D là trung điểm của BC và $AD \perp BC$

Gọi H là điểm đối xứng của A qua D, dễ dàng chứng minh được ABHC là hình thoi.

Dựng hình bình hành EAHF.

HF // AE, BH // AC $\Rightarrow$ B, H, F thẳng hàng.

Đồng thời ta có EF = AH = 2AD = BE.

Suy ra tam giác BEF cân tại E $\Rightarrow EFB = EBF$

Vì ABHC là hình thoi nên $HBC = ABC$.

Ta có: $EAD = EFH = EBH = EBC + HBC = \frac{1}{2}ABC + ABC = \frac{3}{2}ABC$

Suy ra $CAB = 3ABC = 3ACB$.

Lại có: $CAB + ABC + ACB = 180^0 \Rightarrow CAB + \frac{1}{3}CAB + \frac{1}{3}CAB = 180^0$

$\Rightarrow \frac{5}{3}CAB = 180^0 \Rightarrow CAB = 108^0$.

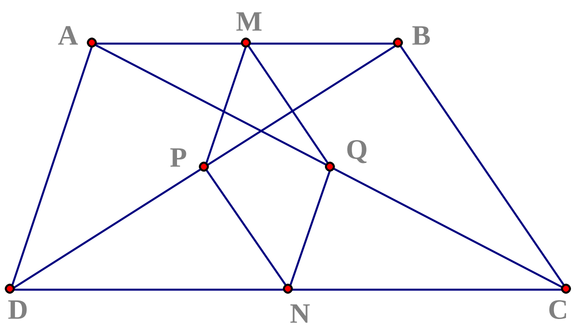
Dạng 3: Tìm điều kiện để tứ giác là hình thoi

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình thoi

Bài 1: Cho hình thang ABCD gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của hai đáy và hai đường chéo của hình thang

a). Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành

b). Hình thang ABCD phải có thêm điều kiện gì để tứ giác MNPQ là hình thoi



HD:

a). Áp dụng tính chất đường trung bình của tam giác cho tam giác ABC và DBC, ta có:

$$MQ // PN // BC; MQ = PN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \lozenge MNPQ$$

Là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

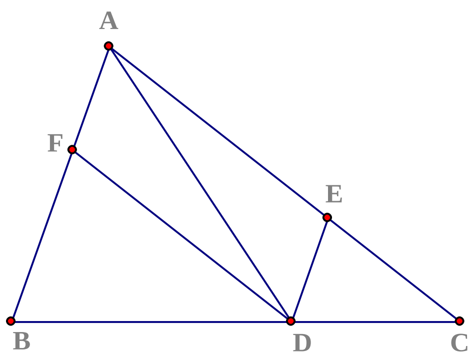
b). Tương tự câu a ta có: $QN // MP // AD; QN = MP = \frac{1}{2}AD$

Để MNPQ là hình thoi thì $MN \perp PQ \Rightarrow MN \perp CD \Rightarrow MN$ là trục đối xứng của hình thang ABCD hay hình thang ABCD phải là hình thang cân

Bài 2: Cho tam giác ABC,qua điểm D thuộc cạnh BC, kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F

a). Tứ giác AEDF là hình gì?

b). Điểm D ở vị trí nào trên BC thì AEDF là hình thoi



HD:

a). Ta có tứ giác AEDF là hình bình hành (các cạnh đối song song)

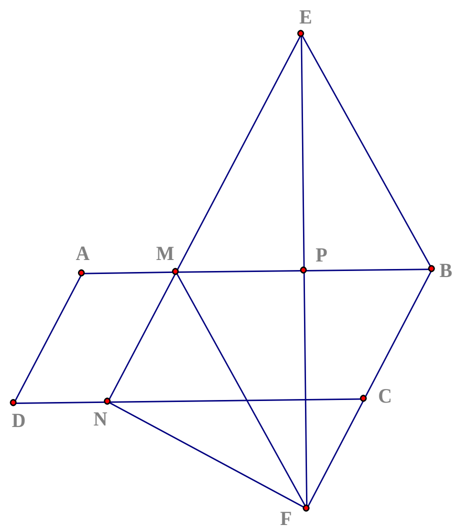
b). Để AEDF trở thành hình thoi thì AD là phân giác của $F\hat{A}E$

$\Rightarrow AD$ là phân giác $B\hat{A}C$. Vậy D là giao điểm của đường phân giác của góc A và cạnh BC.

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = DN. Đường trung trực của BM lần lượt cắt các đường thẳng MN và BC tại E và F.

a). Chứng minh E và F đối xứng với nhau qua AB b). Chứng minh tứ giác MEBF là hình thoi

c). Hình bình hành ABCD có thêm điều kiện gì để tứ giác BCNE là hình thang cân



HD:

a). Ta có AM = DN $\Rightarrow \Diamond MADN$ là hình bình hành

$\Rightarrow \hat{D} = A\hat{M}N = E\hat{M}B = M\hat{B}C$

$\Delta MPE = \Delta BPE \Rightarrow EP = FP \Rightarrow \Diamond MEBF$ là hình bình hành và 2 điểm E, F đối xứng nhau qua AB

b). Tứ giác MEBF có MB giao EF tại P. Lại có P là trung điểm của EF, $MB \perp \text{EF} \Rightarrow \Diamond \text{MEBF}$ là hình thoi

c). Để BNCE là hình thang cân thì $C\hat{N}E = B\hat{E}N$

mà $C\hat{N}E = \hat{D} = M\hat{B}C = E\hat{M}B = E\hat{B}M$ nên tam giác MEB có 3 góc bằng nhau, vậy điều kiện là: $A\hat{B}C = 60^0$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

HD:

MN//=PQ ; NP//=MQ ; MN=NP (vì AC=BD)

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $C = 40^0$; $D = 80^0$, AD=BC. Gọi E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC, DB, AC.

a) Chứng minh tứ giác EMFN là hình thoi.

b) Tính MFN

HD:

b) $MFN = 60^0$

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi E, F, G, H lần lượt là các giao điểm của các phân giác trong của các tam giác OAB, OBC, ODC, ODA.

a) Chứng minh: ba điểm E, O, G thẳng hàng, ba điểm H, O, F thẳng hàng.

b) Chứng minh các tam giác AEB và CGD bằng nhau.

c) Chứng minh tứ giác EFGH là hình thoi.

HD:

a)Vì AOB và COD là hai góc đối đỉnh mà OE là phân giác góc AOB

OG là phân giác góc COD

Nên E,O,G thẳng hàng.

Chứng minh tương tự: H, O, F thẳng hàng.

b) ΔAEB=ΔCGD (g.c.g)

c) ΔOEB=ΔOGD (c.g.c) nên OE=OG,

Tương tự OF=OH nên EFGH là hình bình hành

Mà EG vuông góc HF (phân giác hai góc kề bù) nên EFGH là hình thoi.

Bài 4. Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc cạnh BC. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở E và đường thẳng song song với AC, cắt AB ở F.

a) Chứng minh tứ giác AFME là hình bình hành.

b) Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình thoi.

HD:

b) M là chân đường phân giác góc A của ΔABC.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD có AB = 2AD , $D = 70^0$. Vẽ BH ⊥ AD (H ∈ AD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB.

a) Chứng minh tứ giác ANMD là hình thoi.

b) Tính HMC

HD:

b) $HAB = 70^0$

Vì ΔHNA cân tại N (tính chất trung tuyến) nên $HNA = 40^0$

Mà $ANM = 70^0$ nên $HNM = 110^0$

Δ HNM cân tại N (vì HN=NM=AN) nên $NMH = 35^0$

Mà $NMC = 70^0$

Suy ra $HMC = 105^0$.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác, AD là đường cao. Trên cạnh BC lấy điểm M. Từ M vẽ ME ⊥ AB (E ∈ AB) và MF ⊥ AC (F ∈ AC). Gọi I là trung điểm của AM.

a) Chứng minh tứ giác DEIF là hình thoi.

b) Chứng minh các đường thẳng MH, ID, EF đồng quy.

HD:

a) Ta có: EI=ID=IF =AM:2 (tính chất trung tuyến)

$EIM = 2EAM$

$MID = 2MAD$

Nên $EID = 2EAD = 60^0$

Nên ΔIED đều

Chứng minh tương tự ΔIDF đều nên IFDE là hình thoi.

b) EF giao ID tại trung điểm của ID (tính chất hình thoi) (1)

Gọi K là trung điểm AH, IK là đường trung bình của tam giác AMH nên IK//MH

Xét ΔIKD có MH // IK mà H là trung điểm KD nên MH đi qua trung điểm ID (2).

Từ (1)(2) suy ra MH,ID,EF đồng quy.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo cắt nhau ở O. Hai đường thẳng d_1 và d_2 cùng đi qua O và vuông góc với nhau. Đường thẳng d_1 cắt các cạnh AB và CD ở M và P. Đường thẳng d_2 cắt các cạnh BC và AD ở N và Q. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

HD:

MNPQ là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Mà MP vuông góc NQ nên MNPQ là hình thoi.

Bài 8: Cho hình thoi ABCD có AC = 8cm, BD = 10cm. Tính độ dài của cạnh hình thoi.

HD: $AB = \sqrt{41}\ (cm)$.

Bài 9: Cho hình thoi ABCD có $A = 60^0$. Trên các cạnh AB, BC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho BM = CN. Chứng minh tam giác MDN là tam giác đều.

HD:

ΔABD đều nên AB=BD=DA, ΔMBD=ΔNCD (c.g.c) nên MD=ND và $MDN = 60^0$.

Bài 10: Cho hình thoi ABCD có $A = 60^0$. Trên AD và CD lấy các điểm M, N sao cho AM + CN = AD. Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC, MP cắt BC tại Q. Tứ giác MDCQ là hình gì ?

HD:

Bài 11: Cho P là một điểm chuyển động trong tam giác ABC sao cho $PBA = PCA$. Hạ PM ⊥ AB; PN ⊥ AC (M ∈ AB; N ∈ AC). Gọi K, S là hai đỉnh khác của hình thoi KMSN. Chứng minh KS đi qua một điểm cố định.

HD:

Gọi Q, I, R lần lượt là trung điểm BP, BC, PC. Ta có: MQ=IR (cùng bằng BP:2)

QI=NR (cùng bằng PC:2)

ΔBQM cân tại Q nên $2QBM = MQN$; ΔNRC cân tại R nên $2RCN = NRM$ (1)

$NQI = QBI + QIB$

$MRI = MCI + CIR$; mà $QBI = CIR$; $QIB = MCI$ (đồng vị) (2)

Mà $QBM = RCN$ (3).

Từ (1)(2)(3) suy ra $MQI = IRN$.

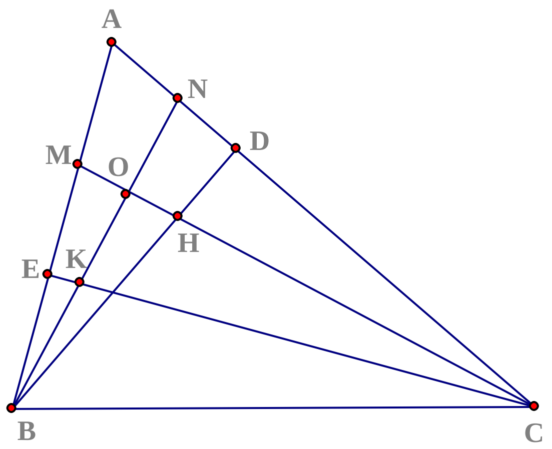
Suy ra ΔMQI=ΔIRN (c.g.c) nên MI=IN hay I nằm trên trung trực MN.

Vậy KS đi qua trung điểm I của BC.

Bài 12: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD, CE. Tia phân giác của các góc ABD và ACE cắt nhau tại O, và lần lượt cắt AC, AB tại N, M. Tia BN cắt CE tại K, tia CM cắt BD tại H. Chứng minh rằng

a). $BN \perp CM$

b). Tứ giác MNHK là hình thoi



HD:

a). Ta có $A\hat{B}D = A\hat{C}E \Rightarrow N\hat{B}D = M\hat{C}A$

Xét ΔBDN, có: $N\hat{B}D + B\hat{N}D = 90^0 (BD \perp AC) \Rightarrow B\hat{N}D + A\hat{C}M = 90^0$

Gọi O là giao điểm của CM và BN $\Rightarrow CM \perp BN \equiv O(1)$

b). Xét ΔCNK, có $CO \perp KN \Rightarrow CO \perp BN$, CO là phân giác của $A\hat{C}E \Rightarrow \Delta CNK$ cân tại C $\Rightarrow O$ Là trung điểm của KN (2)

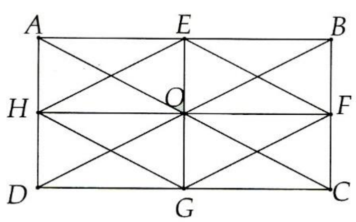
Tương tự chứng minh được O là trung điểm của MH (3)

Từ (1)(2)(3) suy ra MNHK là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

Bài 13: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) EFGH là hình gì, vì sao

b) Chứng minh AC, BD, EG, FH đồng qui.



HD:

a)Áp dụng tính chất đường trung bình cho ΔBAC và ΔADC

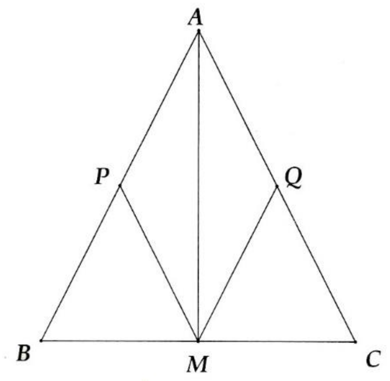
Ta có: EF//HG; EF = HG = $\frac{1}{2}$AC và HE//HG; HE = FG = $\frac{1}{2}$BD

Mà ABCD là hình chữ nhật nên AB = BD $\Rightarrow$ EFGH là hình thoi.

b) Gọi O = AC $\cap$ BD $\Rightarrow$ O là trung điểm của AC và BD. Chứng minh EBGD và BFDH là hình bình hành suy ra AC, BD,EG, FH đồng quy tại trung điểm mỗi đường (điểm O)

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại P và đường thẳng song song với AB cắt AC tại Q.

a) Tứ giác APMQ là hình gì ? Vì sao? b) Chứng minh PQ//BC.



HD:

a) Vận dụng đinh lý 1 về đường trung bình của tam giác suy ra APMQ là hình thoi do có 4 cạnh bằng nhau

b) Vì PQ $\perp$ AM mà AM $\perp$ BC (tính chất tam giác cân) nên PQ// BC