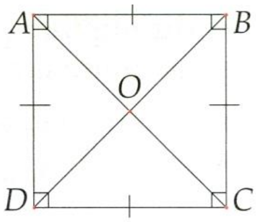
BÀI 12: HÌNH VUÔNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau



$\lozenge ABCD$ là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D} \\ AB=BC=CD=DA \end{cases}$

Nhận xét: Từ định nghĩa hình vuông ta suy ra

Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau

Hình vuông là hình thoi có 4 góc vuông

$\Rightarrow$ Hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi

2. Tính chất: Hình vuông có tất cả các tính chất của hình bình thoi và hình chữ nhật

Tính chất về cạnh:

+) Có bốn cạnh bằng nhau

+) Các cạnh đối song song

Tính chất về góc: Bốn góc bằng nhau

Tính chất về đường chéo:

+) Hai đường chéo bằng nhau

+) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

+) Hai đường chéo vuông góc với nhau

+)Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi

3. Dấu hiệu nhận biết

Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông

Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông

Hình chữ nhật có 1 đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông

Hình thoi có một góc vuông là hình vuông

Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông

4. Nhận xét: Một tứ giác vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông

5. Tính chất đối xứng của hình vuông

Hình vuông có 1 tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo

Hình vuông có bốn chục đối xứng:

+) 2 đường chéo của hình vuông

+) 2 đường thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của hình vuông

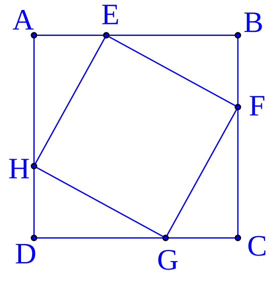
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh 1 tứ giác là hình vuông

Phương pháp giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh 1 tứ giác là hình vuông

Bài 1: . Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB, BC, CD, DA, lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = DH. Chứng minh EFGH là hình vuông.

HD:



Dễ thấy AH = BE = CF = DG. Từ đó suy ra:

$$\Delta AEH = \Delta BFE = \Delta CGF = \Delta DHG$$ (c-g-c).

Do đó EH = FE = GF = HG (1).

Mặt khác, vì $\Delta AEH = \Delta BFE \Rightarrow BEF = AHE$

Suy ra $AEH + BEF = 90^0 \Rightarrow FEH = 90^0$(2).

Từ (1), (2) suy ra EFGH là hình vuông.

Bài 2:. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác ADFE là hình gì? Vì sao?

b) Tứ giác EMFN là hình gì? Vì sao?

HD:

a)E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD nên ta có EF // AD // BC,

Do đó dễ thấy ADFE là hình chữ nhật.

Mặt khác $AD = AE = \frac{1}{2}AB$. Vậy ADFE là hình vuông.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có BCFE cũng là hình vuông.

Do đó hai tam giác MEF và NEF là hai tam giác vuông cân tại M, N.

Từ đó suy ra EMFN là hình vuông.

Bài 3:Cho tam giác ABC vuông tại A. Phân giác trong AD của góc A (D · BC). Vẽ DF · AC, DE · AB. Chứng minh tứ giác AEDF là hình vuông.

HD:

AEDF là hình chữ nhật mà AD là phân giác góc A nên AEDF là hình vuông.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = DH. Chứng minh tứ giác EFGH là hình vuông.

HD:

$\Delta BEF = \Delta CFG$ (2cgv) nên EF=FG và $BEF = CFG$

Mà $BEF + CFG = 90^0$ nên $BFE + CFG = 90^0$ hay $EFG = 90^0$.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh BC. Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và F.

a) Tứ giác AFME là hình gì?

b) Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình vuông.

HD:

a) AFME là hình chữ nhật.

b) Vì AFME là hcn, để AFME là hình vuông thì AM phải là phân giác góc A .

Vậy M là chân đường phân giác kẻ từ đỉnh A.

Bài 6: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác ADFE là hình gì?

b) Tứ giác EMFN là hình gì?

HD:

a) ADFE là hình vuông.

b) ME=MF=FN=NE nên MFNE là hình thoi mà $EMF = 90^0$ nên EMFN là hình vuông.

Bài 7: Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABC’D và ACEF. Gọi Q, N lần lượt là giao điểm các đường chéo của ABC’D và ACEF; M, P lần lượt là trung điểm BC và DF. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

HD:

ΔABF=ΔADC (c.g.c) nên DC=BF và DC vuông góc BF (1)

MN, QP là đường trung bình của ΔBFC và ΔBFD

Nên QP//MN//BF và 2QP=2MN=BF (2)

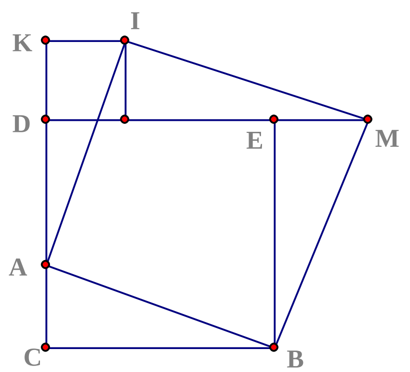
MQ, BN là đường trung bình của ΔBDC và ΔFDC

Nên QM//PN//DC và 2QM=2PN=DC (3)

Từ (1)(2)(3) suy ra PNMQ là hình vuông.

Bài 8:Cho hình vuông DEBC. Trên cạnh CD lấy điểm A, trên tia đối của tia DC lấy điểm K, trên tia đối của tia ED lấy điểm M sao cho CA = DK = EM. Vẽ hình vuông DKIH (H thuộc DE). Chứng minh rằng tứ giác ABMI là hình vuông

HD:

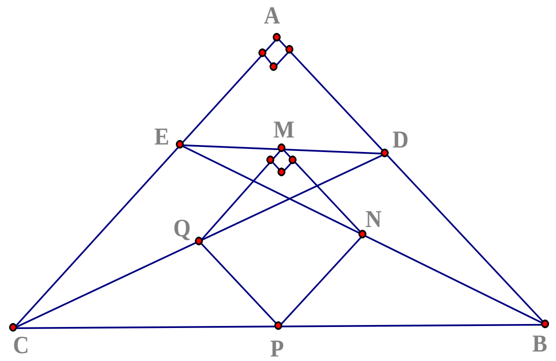


Ta có: $\Delta ABC = \Delta BEM = \Delta HIM = \Delta AKI \Rightarrow AI = MI = AB = BM$

$\Delta ACB = \Delta BEM \Rightarrow A\hat{B}C = E\hat{B}M \Rightarrow A\hat{B}E + E\hat{B}M = 90^0 \Rightarrow \lozenge ABMI$

Là hình vuông (dấu hiệu nhận biết)

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AB, AC theo thứ tự lấy các điểm D và E sao cho BD = CE. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của DE, EB, BC, CD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông



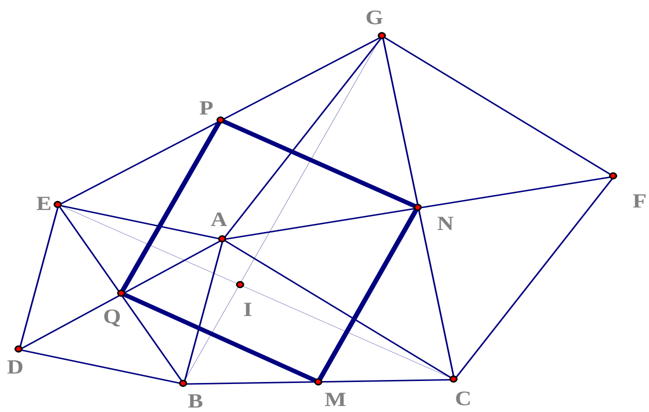
HD:

Ta có: $MN = PQ = NP = MQ = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}BD(1)$

$\begin{cases} MN // AB \\ MQ // AC \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ(AB \perp AC)(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \lozenge MNPQ$ là hình vuông

Bài 10: Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và ACFG. Gọi Q, N lần lượt là giao điểm các đường chéo của hình vuông ABDE và hình vuông ACFG. Gọi M, P lần lượt là trung điểm BC và EG. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông



HD:

Ta có: $\begin{cases} QM = PN = \frac{1}{2}EC, QM // PN // EC \\ QP = MN = \frac{1}{2}BG, QP // MN // BG \end{cases}$ (1)

$\Delta AEC = \Delta ABG(cgc) \Rightarrow EC = BG(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow QM = PN = QP = MN \Rightarrow \lozenge MNPQ$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

Gọi I là giao điểm của EC và BG,

Ta có: $I\hat{C}G + I\hat{G}C = A\hat{C}G + A\hat{C}E + I\hat{G}C = A\hat{C}G + A\hat{G}B + I\hat{G}C$

(Do $A\hat{C}E, A\hat{G}B$ là cặp góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau)

$I\hat{C}G + I\hat{G}C = A\hat{C}G + A\hat{C}E + I\hat{G}C = A\hat{C}G + A\hat{G}B + I\hat{G}C = A\hat{C}G + A\hat{G}C = 90^0 \Rightarrow EC \perp BG(4)$

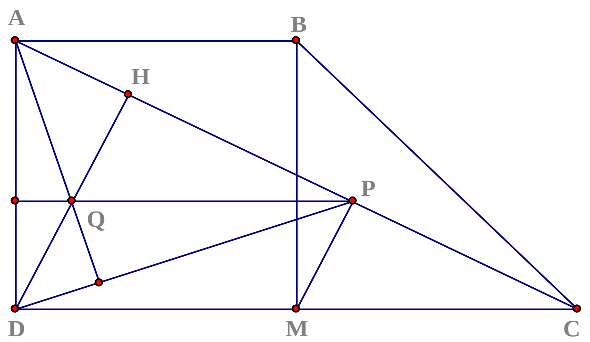
Từ (1)(4) $\Rightarrow QM \perp QP \Rightarrow \lozenge MNPQ$ là hình vuông (hình thoi có 1 góc vuông là hình vuông)

Bài 11: Cho hình thang ABCD, có: $\hat{A} = \hat{D} = 90^0, CD = 2AB = 2AD$. Gọi H là hình chiếu của D lên AC. M, N, P lần lượt là trung điểm của CD, HC, HD

a) Chứng minh tứ giác ABMD là hình vuông, tam giác BDC vuông cân

b). Chứng minh tứ giác DMNP là hình bình hành

c). $AQ \perp DP$



HD:

a) Ta có: $AB // DM, AB = \frac{1}{2}DC = DM \Rightarrow \lozenge ABMD$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Lại có: AB = AD $\Rightarrow \Diamond ABMD$ là hình thoi

Mà $\hat{A} = 90^0 \Rightarrow \Diamond ABMD$ là hình vuông.

Xét ΔBCD, có BM = DM $= \frac{1}{2}DC \Rightarrow \Delta BDC$ vuông cân ($B\hat{D}C = 45^0$)

b). Xét ΔDHC,

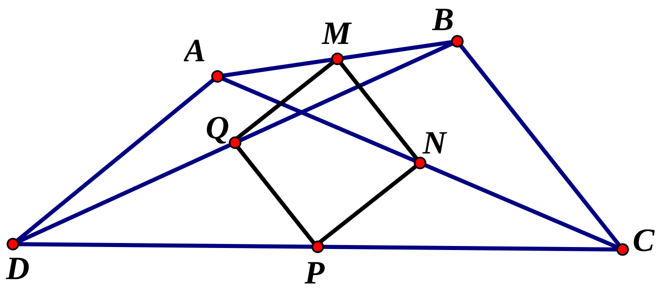
Có: $PQ // DM, PQ = \frac{1}{2}DM \Rightarrow \Diamond DMPQ$ là hình bình hành

c). $PQ // DM, DM \perp AD \Rightarrow PQ \perp AD$.

Ta có tam giác ADP có Q là trực tâm $\Rightarrow AQ \perp DP$

Bài 12:. Cho tứ giác ABCD có ADC + BCD = 90° và AD = BC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

HD:



Trong tam giác ABC, MN là đường trung bình nên MN = $\frac{1}{2}$ BC.

Lập luận tương tự, ta có PQ = $\frac{1}{2}$ BC, MQ = $\frac{1}{2}$ AD, NP = $\frac{1}{2}$ AD.

Theo giả thiết, AD = BC suy ra MN = QP = MQ = NP. Vậy MNPQ là hình thoi (1).

Mặt khác ta có:

DPQ = DCB, NPC = ADC (góc đồng vị).

Theo giả thiết $DCB + ADC = 90^0$,

Suy ra $DPQ + NPC = 90^0$.

Do vậy ta được góc $QPN = 90^0$ (2).

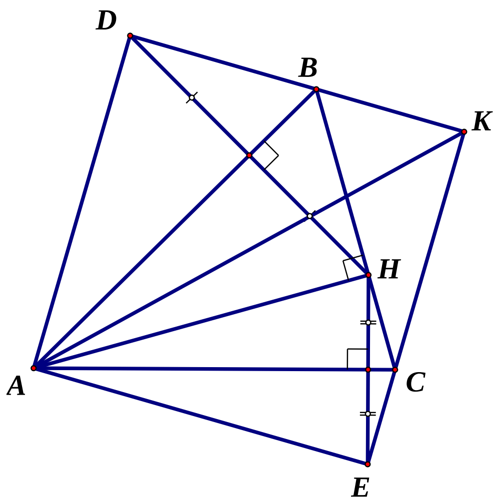
Từ (1) và (2) cho ta MNPQ là hình vuông.

Bài 13:. Cho tam giác ABC nhọn có $A = 45^0$, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng của H qua AB, E là điểm đối xứng của H qua AC, K là giao điểm của DB và EC.

a) Chứng minh tứ giác ADKE là hình vuông.

b) ΔABC có thêm điều kiện gì thì A, H, K thẳng hàng.

HD:



a) Vì tam giác ABC nhọn nên H thuộc cạnh BC.

Vì D và E lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC nên ta có:

$BAH = BAD;\ CAH = CAE$.

Do đó : $DAE = 2\left(BAH + CAH\right) = 2BAC = 90^0$.

Mặt khác $ADB = AHB = 90^0,\ AEC = AHC = 90^0$.

Tứ giác ADKE có ba góc vuông nên ADKE là hình chữ nhật.

Lại có AD = AE = AH.

Vậy ADKE là hình vuông.

b) Vì ADKE là hình vuông nên AK là đường phân giác của góc BAC.

A, H, K thẳng hành khi và chỉ khi AH là đường phân giác góc BAC, hay $DAH = EAH$.

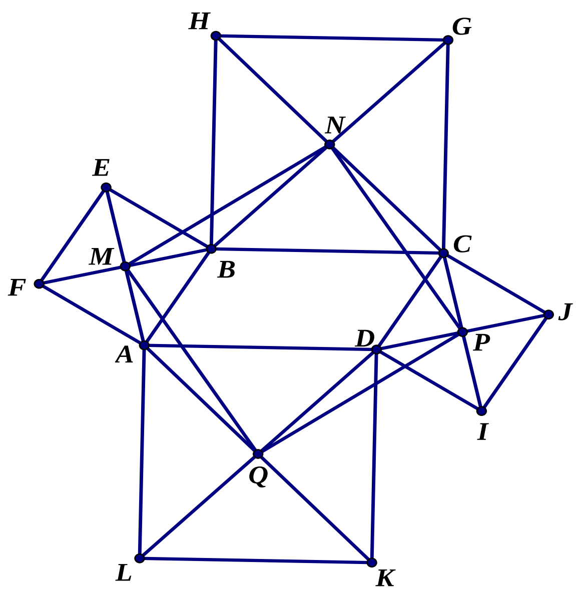
Theo trên, $BAH = BAD;\ CAH = CAE$, do đó $BAH = CAH$.

Như vậy A, H, K thẳng hàng khi AH là đường phân giác BAC

Hay tam giác ABC cân tại A.

Bài 14: Cho hình bình hành ABCD. Bên ngoài hình bình hành dựng các hình vuông ABEF, BCGH, CDIJ, ADKL. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm của 4 hình vuông đó. Chứng minh rằng MNPQ là hình vuông.

HD:



Dễ dàng nhận thấy CP = BM = AM = DP và CN = BN = AQ = DQ (1)

Trong bình hành ABCD, đặt $BAD = BCD = x$

Ta có: $PCN = PCD + DCB + BCN = 45^0 + x + 45^0 = x + 90^0$.

Chứng minh tương tự, ta được:

$$PCN = MBN = MAQ = PDQ = x + 90^0 \ (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $\Delta PCN = \Delta MBN = \Delta MAQ = \Delta PDQ$

Suy ra $PN = MN = MQ = PQ$, hay tứ giác MNPQ là hình thoi.

Lại có: $\begin{cases} BMN = AMQ \\ BMQ + AMQ = 90^0 \end{cases} \Rightarrow BMN + BMQ = 90^0 \Rightarrow NMQ = 90^0$.

Vậy MNPQ là hình vuông.

Bài 15: Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho AM = BN = CP. Qua N vẽ một đường thẳng vuông góc với MP cắt AD tại Q. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

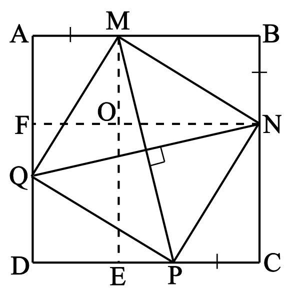
HD:

Tìm cách giải

Từ giả thiết ta nghĩ đến việc chứng minh các tam giác bằng nhau để suy ra bốn cạnh của tứ giác MNPQ bằng nhau, ta được tứ giác này là hình thoi.

Sau đó chứng minh hai đường chéo bằng nhau để được hình vuông.

Trình bày lời giải



Vẽ $ME \perp CD$, $NF \perp AD$.

Gọi O là giao điểm của ME và NF.

Ta có AB = BC = CD = DA mà AM = BN = CP nên BM = CN = DP.

Dễ thấy tứ giác AMOF là hình vuông.

ΔEMP và ΔFNQ có:

$E = F = 90^{o}$; ME = NF (bằng cạnh hình vuông);

$EMP = FNQ$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow$ ΔEMP = ΔFNQ (g.c.g) $\Rightarrow$ MP = NQ và EP = FQ.

Ta có DE = AM = AF $\Rightarrow$ DP = AQ do đó DQ = CP.

Các tam giác BNM, CPN, DQP và AMQ bằng nhau suy ra MN = NP = PQ = QM.

Do đó tứ giác MNPQ là hình thoi.

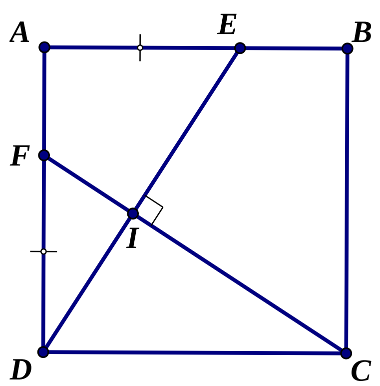
Hình thoi này có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình vuông để chứng minh các tính chất hình học

Cách giải: Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc, đường chéo của hình vuông.

Bài 1:. Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F lần lượt trên cạnh AB, AD sao cho AE = DF. Chứng minh rằng DE = CF và DE $\perp$ CF.

HD:



Gọi I là giao điểm của DE và CF.

Xét hai tam giác ADE và DCF có:

AD = DC (vì ABCD là hình vuông).

$EAD = FDC = 90^0$.

AE = DF (theo giả thiết)

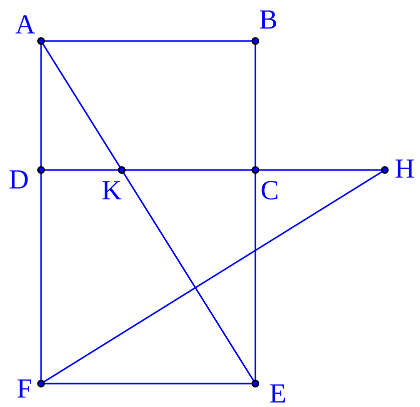
Vậy hai tam giác ADE và DCF bằng nhau, khi đó ta có:

DE = CF và $ADE = DCF$.

Mặt khác $DCF + DFC = 90^0$, suy ra $ADE + DFC = 90^0 \Rightarrow DIF = 90^0$. Vậy $DE \perp CF$.

Bài 2: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia CB và DA lấy lần lượt hai điểm E và F sao cho CE = DF = CD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho CH = CB. Chứng minh AE vuông góc với FH.

HD:



Tứ giác CDFE có DF = CE = CD, DF // CE, $D = 90^0$ nên CDFE là hình vuông.

Ta có: $AF = HD$, $HDF = AFE = 90^0$, $FE = DF$.

Do vậy $\Delta AFE = \Delta HDF \Rightarrow EAF = FHD$.

Gọi K là giao điểm của AE và CD.

$AKD = HKE$, $AKD + FAE = 90^0$

$\Rightarrow HKE + FAE = 90^0$

Mà $EAF = FHD$ nên $HKE + FHD = 90^0$.

Vậy AE vuông góc HF.

Bài 3: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh các AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho AE = DF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, BF.

a) Chứng minh các tam giác ADF và BAE bằng nhau.

b) Chứng minh MN vuông góc với AF.

HD:

a, ΔADF=ΔBAE (2cgv)

b, $EBA = FAD$ mà $EBA + AEB = 90^0$

Nên $FAD + AEB = 90^0$ suy ra EB vuông góc AF.(1)

Vì MN là đường trung bình của tam giác FEB nên MN//EM (2).

Từ (1)(2) suy ra: MN vuông góc AF.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho AE = CF.

a) Chứng minh tam giác EDF vuông cân.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh BI = DI.

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh O, C, I thẳng hàng.

HD:

a)ΔAED=ΔCFD (2cgv)

Nên DE=DF và $ADE = CDF$

Mà $ADE + EDC = 90^0$

Nên $CDF + EDC = 90^0$

Suy ra: $EDF = 90^0$.

b) BI = DI = EF:2 (tính chất trung tuyến tam giác vuông).

c) Ta có: OC vuông góc DB (1),

ΔBDI cân tại I nên IO vuông góc OB (2).

Từ (1)(2) suy ra O,C,I thẳng hàng.

Bài 5: Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABC'D và ACEF. Vẽ đường cao AH kéo dài HA gặp DF tại I. Chứng minh rằng DI = IF.

HD:

Dựng hình bình hành AFGD.

Xét ΔGDA và ΔCAB có :

AC=AF=DG; AB=DA,

$GDA = CAB$ (cùng bù với góc DAF)

Nên ΔGDA = ΔCAB (c.g.c)

Suy ra $DAG = ABC$ (hai góc tương ứng)

Mà $ABC + HAB = 90^0$

Nên $DAG + HAB = 90^0$

Hay G, A, H thẳng hàng, mà AFGD là hình bình hành nên AG cắt DF tại trung điểm I của DF.

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD. Vẽ về phía ngoài hình bình hành, hai hình vuông ABEF và ADGH. Chứng minh:

a) AC = FH và AC ⊥ FH.

b) Tam giác CEG là tam giác vuông cân.

HD:

a, Xét ΔAFH và ΔBAC có:

HA=BC; AF=AB; $B = HAF$ (cùng bù với góc DAB)

Nên ΔAFH = ΔBAC (c.g.c) nên HF=AC.

Kéo dài AC giao HF tại P.

Ta có: $PHA = BCA$ (cmt) ;

$CAD = BCA$ (sole trong)

Suy ra $CAD = PHA$

Mà $HAD = 90^0$ nên $PAH + PHA = 90^0$ hay $HPA = 90^0$.

b) ΔGDC=ΔCBE nên GC=CE.

$ECG = ECB + BCG$.

Mà $ECB = CGD$ nên $ECB + BCG = CGD + BCG = 90^0$ (Vì CD vuông góc AD mà AD//BC nên GD vuông góc BC).

Bài 7: Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB, các hình vuông AMCD, BMEF.

a) Chứng minh AE vuông góc với BC.

b) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.

c) Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB.

HD:

c) DF đi qua K (K = AF ▪ AC).

Bài 8: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy điểm M. Tia phân giác của góc $\widehat{ABM}$ cắt AD ở I. Chứng minh rằng: BI ≤ 2 MI.

HD:

Trên tia đối của tia CD lấy điểm J sao cho CJ = AI.

Qua M vẽ đường thẳng song song với BI cắt BJ tại N

Tam giác vuông ABI = Tam giác vuông CBJ => BI = BJ

Mặt khác dễ cm BI vuông góc BJ => MN vuông góc BJ

$$\mathrm{MBJ} = 90^0 - MBI \Rightarrow 90^0 - \mathrm{ABI} = 90^0 - \mathrm{CBJ} = \mathrm{MJB}$$

=> tam giác MBJ cân tại M => N là trung điểm của BJ

Ta có MI $\geq$ BN = BJ/2 = BI/2 (vì BIMN là hình thang vuông tại B và N)

Hay BI $\leq$ 2MI (đpcm)

Bài 9: Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E thuộc đường chéo AC. Kẻ EF $\perp$ AD, EG $\perp$ CD.

a) Chứng minh rằng: EB = FG và EB $\perp$ FG.

b) Chứng minh rằng: Các đường thẳng BE, AG, CF đồng quy.

HD:

a)ΔEBD cân tại E nên EB=ED.

Vì EFDG là hcn nên DE=FG suy ra EB=FG.

Gọi AB giao EG tại H, EB giao FG tại P

ΔHBE=ΔFEG (2cgv) nên $\mathrm{HBE} = \mathrm{EGF}$.

Mà $\mathrm{HBE} + \mathrm{HEB} = 90^0$

Nên $\mathrm{EGF} + \mathrm{PEG} = 90^0$

Hay $\mathrm{EPG} = 90^0$

Bài 10: Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC, các hình vuông ABDE và ACFG. Vẽ hình bình hành EAGH. Chứng minh rằng:

a) AH = BC và AH $\perp$ BC.

b) Các đường thẳng HA, BF, CD đồng quy.

HD:

a)Xét ΔHEA và ΔCAB có :

AC=AG=EH; AB=EA;

$HEA = CAB$ (cùng bù với góc EAG)

Nên ∆HEA = ∆CAB (c.g.c)

Suy ra AH=BC (hai cạnh tương ứng).

b) Gọi AH giao BC tại M.

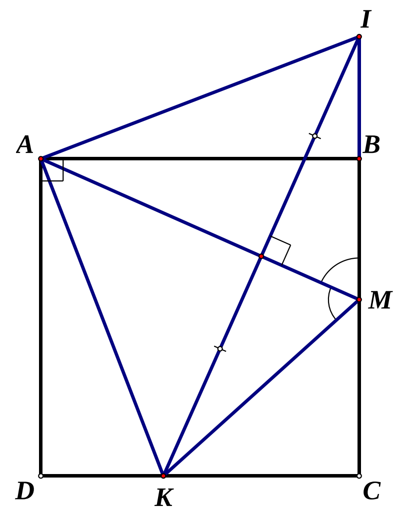
Ta có: $EAH = ABM$ (cmt) mà $EAH + BAM = 90^0$

Nên $ABM + BAM = 90^0$ hay AM vuông góc BC.

DC, BF, AH là ba đường cao của tam giác HBC nên DC, BF, AH đồng quy.

Bài 11:. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC. Từ M, vẽ một đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho: $AMB = AMK$. Chứng minh $KAM = 45^0$.

HD:



MA là phân giác góc BMK nên MA là trục đối xứng của hai đường thẳng MK và MB.

Gọi I là điểm đối xứng của K qua MA, suy ra I thuộc đường thẳng BC.

Ta có AI = AK, AB = AD.

Hai tam giác vuông ABI và ADK có hai cạnh bằng nhau nên $\Delta ABI = \Delta ADK$.

Từ đó ta có $IAB = KAD$.

$$IAK = IAB + BAK = KAD + BAK = 90^0.$$

Vậy ta có: $MAK = \frac{1}{2}IAK = 45^0$.

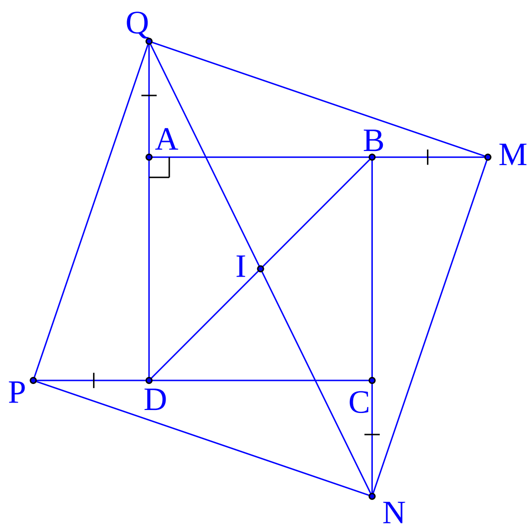
Bài 12:. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA ta lấy một điểm M, trên tia đối của tia CB ta lấy điểm N, trên tia đối của tia DC ta lấy một điểm P và trên tia đối của tia AD ta lấy điểm Q sao cho AQ = BM = CN = DP. Chứng minh:

a) Các tam giác vuông AQM, BMN, CNP, DPQ bằng nhau.

b) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình vuông.

c) Hai hình vuông MNPQ là ABCD có chung một tâm đối xứng.

HD:



a)Dễ thấy AM = BN = CP = DQ,

Do đó các tam giác vuông AQM, BMN, CNP, DPQ bằng nhau (c-g-c).

b) $\Delta AQM = \Delta BMN = \Delta CNP = \Delta DPQ$

Suy ra QM = MN = NP = PQ (1).

Mặt khác $\Delta AQM = \Delta BMN \Rightarrow AMQ = BNM$.

Và $BNM + BMN = 90^0$,

Do đó ta có $AMQ + BMN = 90^0$, hay $QMN = 90^0$ (2).

Từ (1), (2) suy ra MNPQ là hình vuông.

c) Xét tứ giác BNDQ có BN // DQ và BN = DQ nên BNDQ là hình bình hành.

Gọi I là giao điểm của BD và NQ, thì I là trung điểm của BD và NQ.

Do đó I là tâm của hai hình vuông ABCD và MNPQ.

Vậy hai hình vuông ABCD và MNPQ có chung tâm đối xứng I.

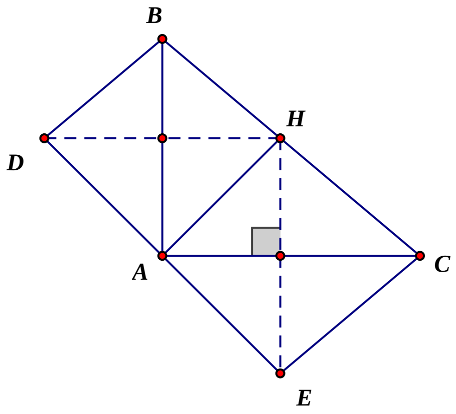
Bài 13: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với H qua AB, gọi E là điểm đối xứng với H qua AC.

a) Chứng minh rằng D đối xứng với E qua A.

b) Tam giác DHE là tam giác gì? Vì sao?

c) Tứ giác $BDEC$ là hình gì? Vì sao?

d) Chứng minh rằng $BC = BD + CE$



HD:

a) Vì D đối xứng với H qua AB nên: $AH = AD$ và $BAD = BAH \Leftrightarrow HAD = 2HAB$.

Vì E đối xứng với H qua AC nên: $AH = AE$ và $HAC = EAC \Leftrightarrow HAE = 2HAC$.

$\Rightarrow AD = AE$

và: $HAD + HAE = 2\left(HAB + HAC\right) = 2.BAC = 2.90^\circ = 180^\circ$

$\Leftrightarrow D, A, E$ thẳng hàng và $AD = AE$

$\Rightarrow$D đối xứng với E qua A.

b) Xét tam giác DHE có: $AH = AD = AE \Leftrightarrow HA = \frac{1}{2}DE$

Tam giác DHE có đường trung tuyến HA bằng nửa cạnh đối diện DE nên DHE là tam giác vuông tại H.

c) Dễ dàng chứng minh được $\Delta ABD = \Delta ABH\left(c.c.c\right)$

$\Rightarrow \angle ADB = \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow BD \perp DE\left(1\right)$

Tường tự ta có: $CE \perp DE\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $BD \parallel CE \Rightarrow BDEC$ là hình thang vuông.

d) $BD = BH, CE = CH \Rightarrow BD + CE = BH + CH = BC$.

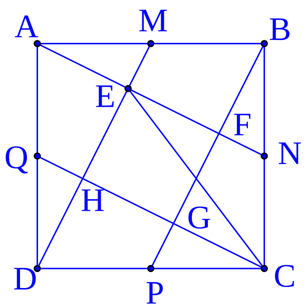
Bài 14: . Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh AN = DM và AN $\perp$ DM.

b) Chứng minh rằng các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành một hình vuông.

c) Gọi E là giao điểm của DM và AN. Chứng minh CE = CD.

HD:



a)Xét hai tam giác ABN và DAM vuông tại B và A, có AB = AD và BN = AM,

Do đó $\Delta ABN = \Delta DAM$

Suy ra AN = DM và $BAN = ADM$.

Mà $BAN + DAN = 90^0$, do đó $ADM + DAN = 90^0$, hay $AED = 90^0$.

Vậy ta có AN = DM và AN $\perp$ DM.

b) Giả sử các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành tứ giác EFGH.

MB // DP và MB = DP $\Rightarrow$ MBPD là hình bình hành.

Suy ra BP // DM $\Rightarrow$ AN$\perp$BP.

Tương tự ta cũng có CQ$\perp$DM.

Như vậy tứ giác EFGH có $E = F = H = 90^0$.

Ta chứng minh EF = EH:

Dễ thấy EM là đường trung bình trong tam giác ABF, E là trung điểm của AF.

Tương tự H là trung điểm của DE.

Xét hai tam giác ABF và DAE vuông tại F là E, có:

AB = DA; $BAF = ADE$ (vì $\Delta ABN = \Delta DAM$).

Suy ra $\Delta ABF = \Delta DAE \Rightarrow$ AF = DE.

Từ đó ta có EF = EH. Vậy EFGH là hình vuông.

c) H là trung điểm của DE và CH$\perp$DE,

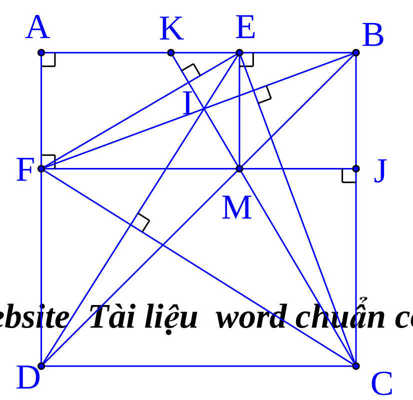
Do đó ta suy ra ΔCDE cân tại C, hay là CE = CD.

Bài 15:. Cho hình vuông ABCD. Từ điểm M thuộc đường chéo BD kẻ ME$\perp$AB và MF$\perp$AD. Chứng minh rằng:

a) CF = DE và CF$\perp$DE.

b) Ba đường thẳng CM, BF và FE đồng qui.

HD:



a)Tứ giác MEAF có $A = E = F = 90^0$ nên MEAF là hình chữ nhật.

Mặt khác, dễ thấy ΔMEB vuông cân tại E.

Do đó AF = EM = EB $\Rightarrow$ DF = AE.

Từ đó ta có $\Delta DAE = \Delta CDF$ (c-g-c).

$\Rightarrow$ CF = DE và $FCD = EDA$.

Vì $FCD + CFD = 90^0$ nên $EDA + CFD = 90^0$.

Hay CF $\perp$ DE.

b) Chứng minh tương tự như trên, ta có:

$\Delta ABF = \Delta CBE$, suy ra BF $\perp$ CE.

Ta chứng minh CM $\perp$ EF:

Giả sử FM cắt BC tại J; CM cắt EF, AB lần lượt tại I, K.

Ta có $MJC = 90^0$.

Dễ thấy BEMJ là hình vuông nên MJ = FA và CJ = EA.

Suy ra $\Delta CJM = \Delta EAF$ (c-g-c)$\Rightarrow JCM = AEF$.

Vì $JCM + EKI = 90^0$ nên $AEF + EKI = 90^0$, hay $KIE = 90^0$.

Xét tam giác EFC có ED $\perp$ FC, FB $\perp$ CE, CM $\perp$ EF,

Do đó ED, FB, CM là ba đường cao trong tam giác EFC.

Vậy ED, FB, CM đồng qui.

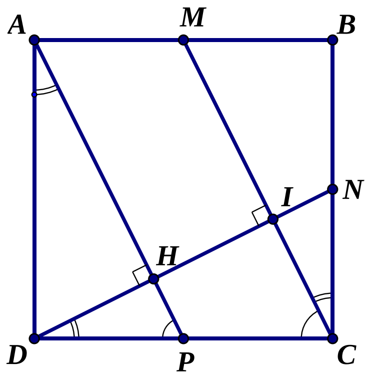
Bài 16:. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

a) Chứng minh rằng CM = DN và CM $\perp$ DN.

b) Vẽ AH $\perp$ DN tại H, AH cắt CD tại P. Chứng minh rằng P là trung điểm của CD

c) CM cắt DN tại I. Chứng minh rằng AI = AB.

HD:



a)Dễ dàng nhận thấy hai tam giác BCM và CDN bằng nhau (c-g-c),

Suy ra CM = DN và $BCM = CDN$.

Mặt khác: $CND + CDN = 90^0$

Suy ra $BCM + CND = 90^0$.

Vậy $CM \perp DN$.

b) AP // MC suy ra $APD = DCM$ (đồng vị)

Suy ra $DAP = BCM$ (cùng phụ với góc APD).

Do đó hai tam giác ADP và CBM bằng nhau (g-c-g) $\Rightarrow DP = BM = \frac{1}{2}AB$.

Vì P thuộc đoạn CD, do vậy P là trung điểm của CD.

c) Trong tam giác CDI, PH // CI và P là trung điểm của CD,

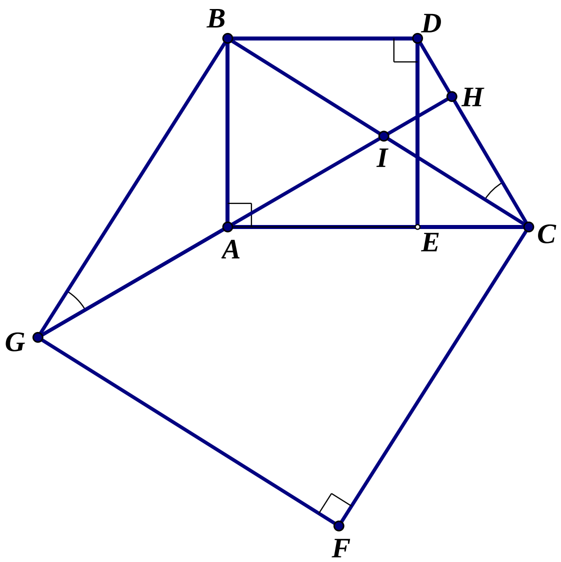
Suy ra H là trung điểm của DI.

Tam giác ADI có AH là đường cao và là trung tuyến,

Suy ra tam giác ADI cân tại A. Vậy AI = AD = AB (chứng minh xong).

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ các hình vuông ABDE, BCFG sao cho C, D ở cùng một phía của cạnh AB; A, G ở cùng một phía của cạnh BC. Chứng minh AG = CD và AG $\perp$ CD.

HD:



Vì A và G nằm cùng phía so với đường thẳng BC,

CBA nhọn nên tia BA nằm trong góc CBG.

Tương tự tia BC nằm trong góc ABD.

Ta có $ABG = DBC$ (cùng phụ với góc ABC).

Xét hai tam giác ABG và DBC có:

AB = DB, $ABG = DBC$, BG = BC

Suy ra hai tam giác ABG và DBC bằng nhau (c-g-c).

Do đó, AG = CD và $BGA = BCD$.

Đường thẳng GA cắt BC tại I, cắt CD tại H.

Ta có: $BIG = HIC$ (góc đối đỉnh)

$BGI + BIG = 90^0$.

Kết hợp $BGA = BCD$ cho ta $HIC + BCD = 90^0$.

Do đó $GHC = 90^0$.

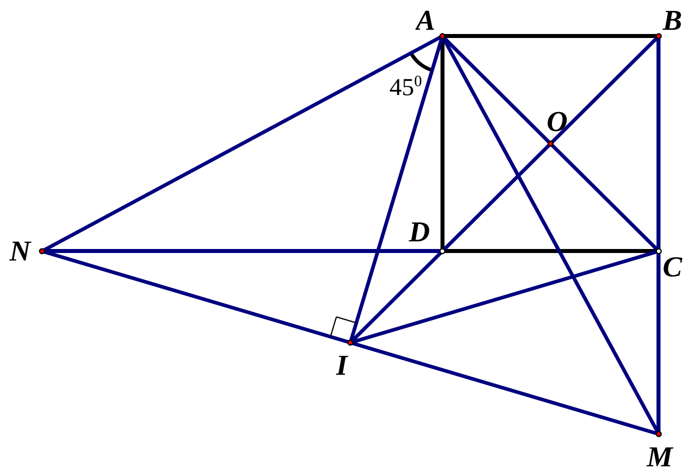
Tóm lại ta có: AG = CD và AG $\perp$ CD.

Bài 18: a) Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho DN = BM. Vẽ tia AI sao cho $NAI = 45^0$ (I $\in$ NM). Gọi O là trung điểm của AC.

a)Chứng minh B, O, D, I thẳng hàng.

b) Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E bất kì trên cạnh AB. Tia phân giác của CDE cắt cạnh BC tại K. Chứng minh rằng AE + KC = DE.

HD:



a) Xét hai tam giác ABM và ADN có:

AB = AD;

$ABM = AND = 90^0$

BM = DN (giả thiết).

Suy ra $\Delta ABM = \Delta ADN$ (c-g-c) $\Rightarrow$ AN = AM và $BAM = DAN$.

$$MAN = MAD + DAN = MAD + BAM = 90^0.$$

Như vậy tam giác MAN vuông cân tại A.

Do đó AI là đường cao và trung tuyến trong tam giác MAN. Ta được AI = $\frac{1}{2}$MN.

Trong tam giác MCN vuông tại C, CI là trung tuyến, do đó CI = $\frac{1}{2}$MN.

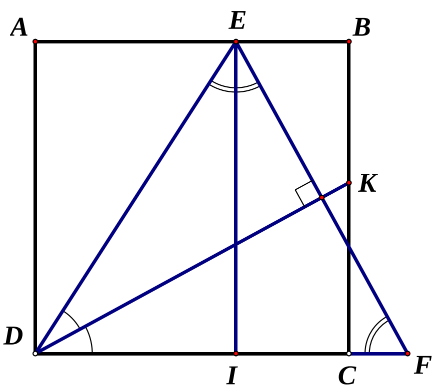
Từ đó ta có tam giác IAC cân tại I.

Vì O là trung điểm AC nên IO $\perp$ AC.

Mặt khác DB vuông góc AC tại O.

Vậy bốn điểm I, O, D, B thẳng hàng.

b) Gọi F là điểm đối xứng của E qua đường thẳng DK.



Vì DK là đường phân giác góc CDE nên DK là trục đối xứng của hai đường thẳng DE và DC,

Do đó F thuộc đường thẳng CD.

Ta có DE = DF.

Gọi I là hình chiếu của E lên CD, AEID là hình chữ nhật nên AE = DI.

Vậy ta sẽ chứng minh CK = IF.

$CDK + DFE = 90^0$, $IEF + IFE = 90^0$

$\Rightarrow CDK = IEF$.

Xét hai tam giác vuông CDK và IEF, có:

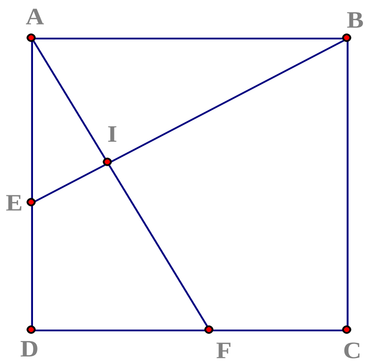
CD = IE, $CDK = IEF$.

Do đó ta suy ra được $\Delta CDK = \Delta IEF$ (g-c-g)

Vậy: AE + KC = DI + IF = DF = DE.

Bài 19: Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho AE = DF. Chứng minh

a) $\Delta ADF = \Delta BAE$ b) $BE \perp AF$



HD:

a) Ta có $\Delta ADF = \Delta BAE (cgc) \Rightarrow A\hat{E}I = D\hat{F}A$

b) Gọi I là giao điểm của AF và BE

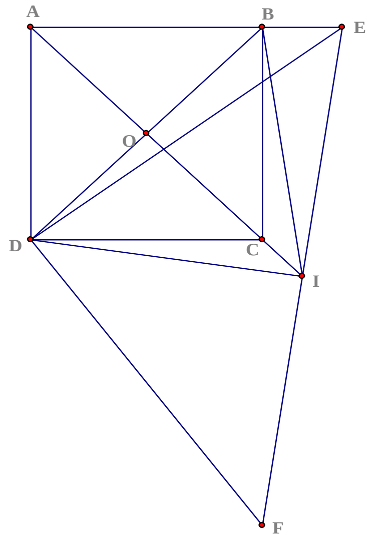
Có: $E\hat{A}I + A\hat{E}I = E\hat{A}I + D\hat{F}A = 90^0 (dpcm)$

Bài 20: Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho AE = CF

a). Chứng minh ΔEDF vuông cân

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh BI = DI

c). Chứng minh A, C, I thẳng hàng



HD:

a). $\Delta AED = \Delta CFD (cgc) \Rightarrow DE = DF, A\hat{D}E = C\hat{D}F$

$$\Rightarrow E\hat{D}F = E\hat{D}C + C\hat{D}F = E\hat{D}C + A\hat{D}E = 90^0$$

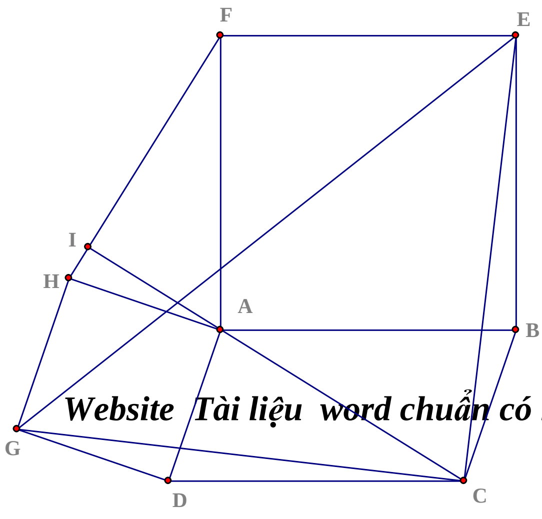
b). Ta có $IB = ID = \frac{1}{2}\text{EF}$

c) Do IB = ID nên I thuộc đường trung trực của BD $\Rightarrow I \in AC$

Bài 21: Cho hình bình hành ABCD. Vẽ về phía ngoài hình bình hành hai hình vuông ABEF và ADGH. Chứng minh

a) AC = FH và $AC \perp FH$

b) ΔCEG vuông cân



HD:

a) $\Delta AFH = \Delta BAC$ (cgc) $\Rightarrow$ FH = AC

Gọi I là giao điểm của FH và AC

Do $A\hat{F}H = B\hat{A}C \Rightarrow I\hat{A}F + A\hat{F}H = I\hat{A}F + B\hat{A}C = 90^0 \Rightarrow FH \perp AC$

b) $\Delta GCD = \Delta CEB(cgc) \Rightarrow GC = CE$

Ta có: $180^0 = E\hat{C}B + C\hat{B}E + B\hat{E}C = E\hat{C}B + C\hat{B}A + 90^0 + B\hat{E}C \Rightarrow E\hat{C}B + C\hat{B}A + B\hat{E}C = 90^0$

mà $B\hat{E}C = G\hat{C}D \Rightarrow E\hat{C}B + C\hat{B}A + G\hat{C}D = 90^0 (1)$

Mặt khác do ABCD là hình bình hành,

$$D\hat{C}B + C\hat{B}A = 90^0 \Leftrightarrow E\hat{C}B + G\hat{C}E + G\hat{C}D + C\hat{B}A = 180^0 (2)$$

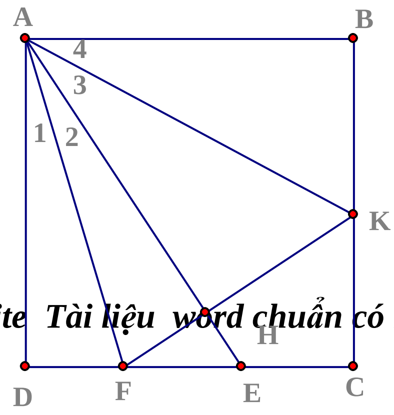
Từ (1)(2) $\Rightarrow G\hat{C}E = 90^0$

Bài 22: Cho hình vuông ABCD cạnh 6cm, điểm E thuộc cạnh CD, tia phân giác của góc DAE cắt CD ở F. Gọi H là hình chiếu của F trên AC, K là giao điểm của FH và BC

a). Tính độ dài AH

b) Chứng minh rằng AK là phân giác của góc BAE

c) Tính chu vi tam giác CFK



HD:

a) Ta có $\Delta ADF = \Delta AHF(cgc) \Rightarrow AH = HD = 6cm$

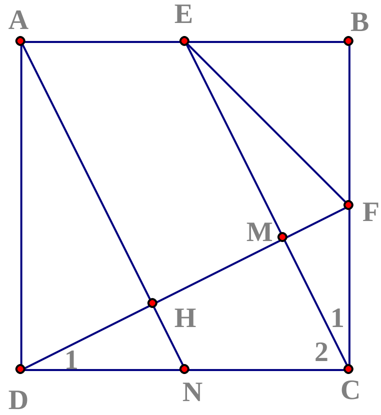
b) $\Delta AHK = \Delta ABK(ch-cgvc) \Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{A}_4 \Rightarrow AK$ là phân giác của $B\hat{A}E$

c) Chu vi $\Delta CFK = CF + FK + KC = CF + FH + HK + CK = CF + FD + KB + KC = 12(cm)$

Bài 23: Cho hình vuông ABCD và E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC

a) Chứng minh rằng $CE \perp DF$

b) Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh AM = MB (Gợi ý có thể gọi N là trung điểm của CD)



HD:

a) Ta có: $\hat{M} = 90^0 \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{C}_2 = 90^0 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \Delta DCF = \Delta CBE(cgc)$

b) Gọi N là trung điểm của CD

+) $\lozenge AECN$ là hình bình hành $\Rightarrow AN // EC \Rightarrow DF \perp AN = H$

+) ΔDMC có: $\begin{cases} ND = NC \\ NH // MC(AN // EC) \end{cases} \Rightarrow$ H là trung điểm của MD

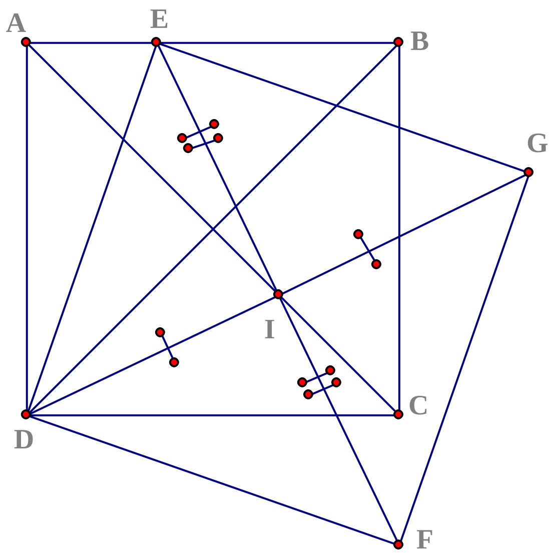
+) ΔADM có AH là đường cao, H là trung điểm của MD $\Rightarrow AM = AD = AB(dpcm)$

Bài 24: Cho hình vuông ABCD và 1 điểm E bất kỳ nằm giữa hai điểm A và B. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho CF = AE

a) Tính $E\hat{D}F$

b) Gọi G là điểm đối xứng với D qua trung điểm I của EF. Tứ giác DEGF là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh ba đường thẳng AC, DG, EF đồng quy tại 1 điểm



HD:

a) $E\hat{D}F = E\hat{D}C + C\hat{D}F = E\hat{D}C + E\hat{D}A = 90^0 (C\hat{D}F = E\hat{D}A)$

b) Xét $\Diamond DEGF$ có: $EI = IF, DI = IG \Rightarrow \Diamond DEGF$ là hình bình hành ,

Lại có $\hat{D} = 90^0 \Rightarrow \Diamond DEGF$ là hình chữ nhật

Mà $\Delta ADE = CDF \Rightarrow ED = FD \Rightarrow \Diamond DEGF$ là hình vuông (dấu hiệu nhận biết)

c) Ta có EF giao DG tại I, ta đi chứng minh I thuộc đường trực của AC

Có: $IB = ID = \frac{1}{2}\text{EF} \Rightarrow \text{I}$ thuộc đường trung trực của BD

$\Rightarrow I \in AC$ (AC là đường trung trực của BD)

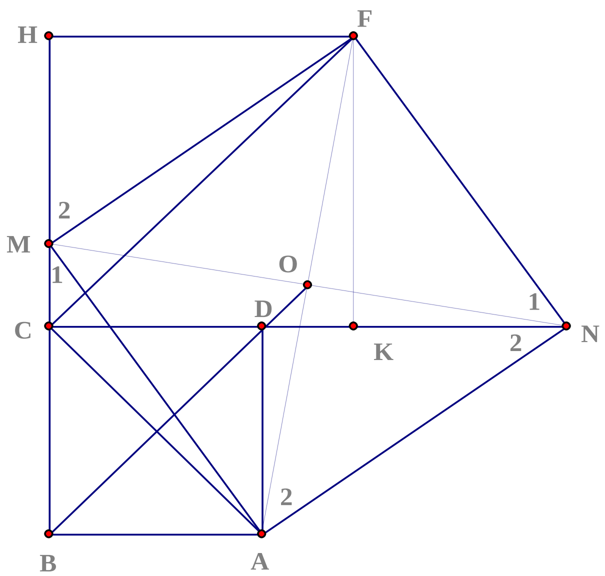
Bài 25: Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho BM = DN. Vẽ hình bình hành AFMN. Chứng minh rằng

a). $\Delta ABM = \Delta ADN$

b) Tứ giác AMFN là hình vuông

c) Kẻ $FH \perp BM, FK \perp CN$, chứng minh rằng : $A\hat{C}F = 90^0$

d) B, D, O thẳng hàng (O là trung điểm của FA)



HD:

a) $\Delta ABM = \Delta ADN (cgc) \Rightarrow AM = AN \Rightarrow D\hat{A}N = B\hat{A}M$

b) Hình bình hành AMFN, có: AM = AN

$\Rightarrow \lozenge AMFN$ là hình thoi.

Lại có $MAN = MAD + DAN = MAD + MAB = 90^0 \Rightarrow \lozenge \text{AMFN}$ là hình vuông

c) $A\hat{C}F = A\hat{C}D + D\hat{C}F = 45^0 + D\hat{C}F$

Ta đi chứng minh $D\hat{C}F = 45^0 \Rightarrow \lozenge CHFK$ là hình vuông

Có: $\begin{array}{l} \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 90^0 \Rightarrow \hat{N}_2 + \hat{M}_2 = 90^0, \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 90^0 \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{N}_1 \\ \Rightarrow \Delta MHF = \Delta NKF (ch - gn) \Rightarrow FH = FK \end{array}$

$\Rightarrow \lozenge CHFK$ là hình vuông $DC\hat{F} = 45^0 \Rightarrow A\hat{C}F = 90^0$ (đpcm)

d) Ta đi chứng minh 3 điểm B, D, O nằm trên đường trung trực của AC

Ta có: ABCD là hình vuông $\Rightarrow$ B, D nằm trên đường trung trực của AC

O là trung điểm của AF $\Rightarrow$ O là trung điểm của MN $\Rightarrow OA = OM$

Lại có $OC = OM = \dfrac{1}{2} AC \Rightarrow OM = OC \Rightarrow OA = OC \Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực của AC

$\Rightarrow B, D, O$ thẳng hàng.

Bài 26: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH và trung tuyến AM

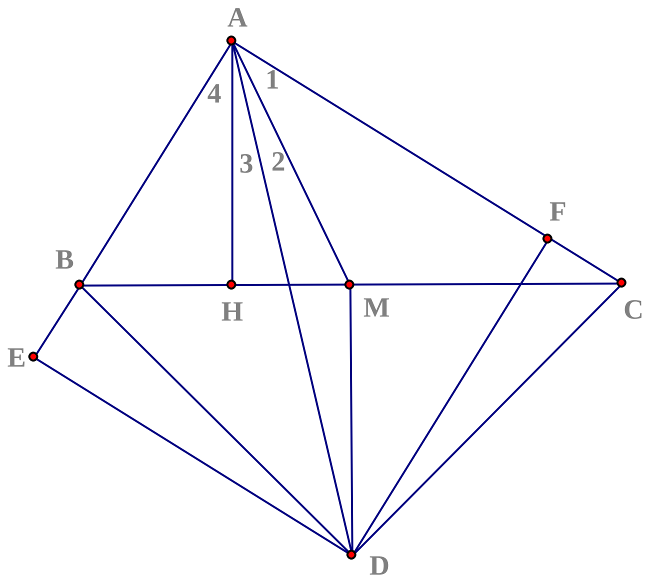
a) Chứng minh rằng $M\hat{A}C = B\hat{A}H$

b) Kẻ trung trực của BC và trên đó lấy điểm D sao cho MD = MA (D và A nằm trong hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ là đường thẳng BC).

Chứng minh AD là phân giác của 2 góc $M\hat{A}H, \hat{A}$

c) Kẻ $DE \perp AB, DF \perp AC$. Tứ giác AEDF là hình gì?

d) Chứng minh: $\Delta DBE = \Delta DCF$



HD:

a) $\Delta ABC(\hat{A}=90^0) \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta AMC$ cân tại M $\rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$,

Mà $\hat{C}_1 + \hat{B} = 90^0 = \hat{A}_4 + \hat{B} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_4$

b) ΔAMD cân tại M $\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}_1, \hat{A}_3 = \hat{D}_1(slt) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}_3(dpcm)$

c). Tứ giác AEDF là hình chữ nhật có AD là phân giác của $E\hat{A}F \Rightarrow \lozenge AEDF$ là hình vuông

d) Xét $\Delta DBE, \Delta DCF$ có: $DE = DF, DB = DC$ (MD là trung trực của BC)

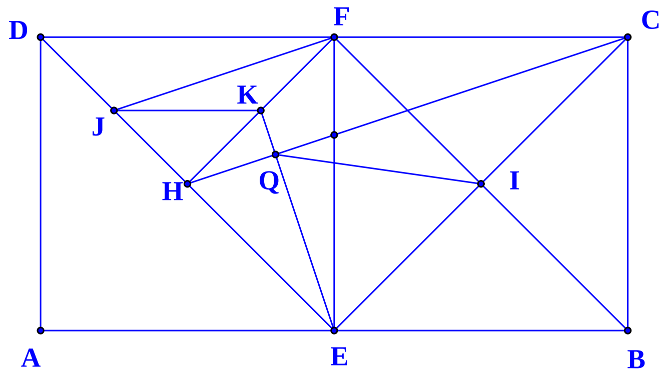
$\Rightarrow \Delta DBE = \Delta DCF(ch - cgv)$

Bài 27:. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2BC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. H, K lần lượt là trung điểm của DE, HF; I là trung điểm của BF và Q là giao điểm của CH và EK.

a) Chứng minh CH $\perp$ EK tại Q.

b) Chứng minh QI = IE = IC = IB.

Giải:



a) Gọi J là trung điểm HD.

Ta có JK // DF nên JK $\perp$ EF.

FK $\perp$ DE (vì ADFE là hình vuông)

K là trực tâm tam giác EFJ

Suy ra EK $\perp$ FJ, mà FJ // CH nên EK $\perp$ CH.

b)

Dễ thấy BCFE là hình vuông, I là trung điểm của FB nên I là trung điểm của BC

Theo trên, tam giác CQE vuông tại Q.từ đó suy ra QI = IE = IC = IB.

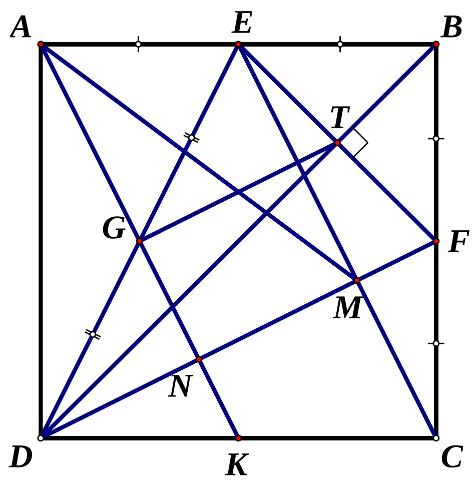
Bài 28:. Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB, BC, DE. Vẽ BT $\perp$ EF tại T.

a) Chứng minh Δ AGT cân.

b) Chứng minh CE $\perp$ GT.

c) Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh AM = AB.

Lời giải:



a) ΔBEF cân tại B nên BT là phân giác góc $\widehat{ABC}$, do vậy BT đi qua D.

ΔTED vuông tại T có TG là trung tuyến nên TG = $\frac{1}{2}$DE.

ΔAED vuông tại A có AG là trung tuyến nên AG = $\frac{1}{2}$DE.

Vậy AG = TG, hay ΔAGT cân tại G.

b) Gọi K là trung điểm của CD, ta có AEKD là hình chữ nhật nên G là trung điểm của AK.

Dễ thấy tứ giác AECK là hình bình hành. Ta có CE // AG (1).

ΔADG cân tại G $\Rightarrow ADG = DAG = \frac{1}{2}AGE$. Tương tự, $TDG = DTG = \frac{1}{2}TGE$

$\Rightarrow AGT = AGE + TGE = 2\left(ADG + TDG\right) = 2ADB = 90^0$

$\Rightarrow$ AG $\perp$ GT (2).

(1) và (2) suy ra CE $\perp$ GT.

c) Gọi N là giao điểm của AK và DM, ta có AK // CE và K là trung điểm của DC nên N là trung điểm của DM.

Dễ thấy ΔBCE = ΔCDF (c-g-c) $\Rightarrow BCE = CDF$.

$MCD + MDC = MCD + MCB = 90^0$. Từ đó suy ra CE $\perp$ DF.

Theo trên, AK // CE hay AN // CE, suy ra AN $\perp$ DF.

Trong tam giác ADM, N là trung điểm DM và AN $\perp$ DM nên ΔADM cân tại A.

Vậy ta có AM = AD = AB.

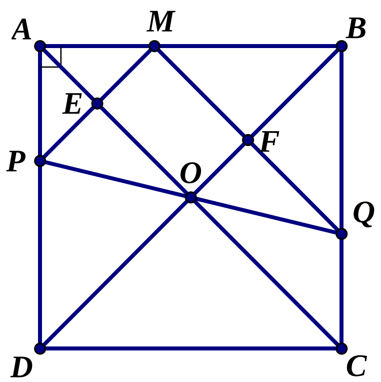
Bài 29:. Cho hình vuông ABCD có giao điểm của 2 đường chéo là O. Đường thẳng qua O cắt cạnh AD tại P, BC tại Q.

a) Chứng minh rằng AP = CQ

b) Vẽ Px $\perp$ AC, Qy $\perp$ BD; Px cắt Qy tại M, Px cắt OA tại E, Qy cắt OB tại F. Hỏi tứ giác OFME là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh rằng M nằm trên cạnh AB.

Lời giải:



a) Chứng minh AP = CQ. Ta có: $\begin{cases} OAP = OCQ = 45^0 \\ OA = OC \\ AOP = COQ \end{cases} \Rightarrow \Delta OAP = \Delta OCQ \Rightarrow AP = CQ$.

b) Theo chứng minh trên, O là trung điểm của PQ. Vì OF // PM (cùng vuông góc với AC) suy ra OF là đường trung bình trong tam giác PQM, do đó F là trung điểm của MQ.

Vậy M và Q đối xứng nhau qua đường thẳng BD. Mặt khác, cạnh AB và cạnh AC đối xứng nhau qua đường thẳng BD và Q thuộc cạnh AC, suy ra M thuộc cạnh AB.

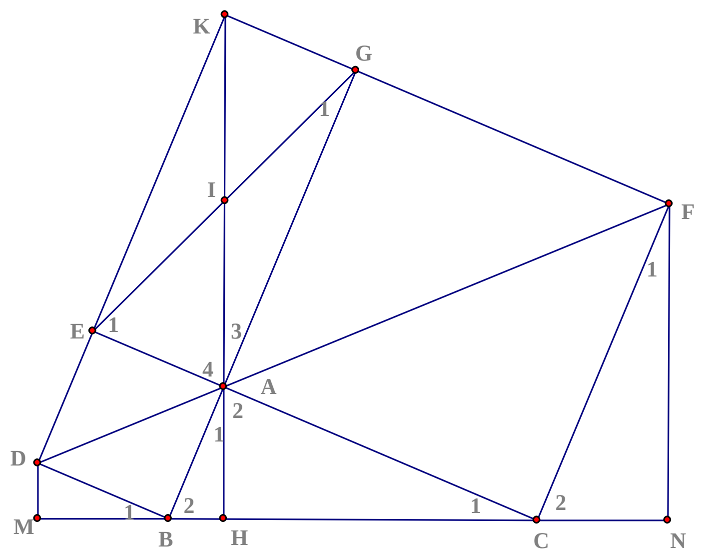
Bài 30: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ về phía ngoài tam giác hai hình vuông ABDE và ACFG

a. Gọi M, N là chân các đường vuông góc hạ từ D và E đến BC. Chứng minh DM + DN = BC

b. D, A, E thẳng hàng

c. AH đi qua trung điểm của EG

d. Giả sử DE và FG cắt nhau tại K. Chứng minh rằng AH cũng đi qua K



HD:

a. $DM+FN=BC \Leftarrow DM+FN=BH+HC \Leftarrow DM=BH, FN=HC \Leftarrow \begin{cases} \Delta DMB=\Delta AHB \\ \Delta AHC=\Delta CNF \end{cases}$

b. D, A, F thẳng hàng $\Leftrightarrow D\hat{A}F=180^0 \Leftrightarrow D\hat{A}E+E\hat{A}G+G\hat{A}F=180^0$

c. Gọi I là giao điểm của AH và EG, ta đi chứng minh EI = GI (= AI)

+) Ta đi chứng minh ΔAIG cân tại I $\Leftrightarrow \hat{G}_1=\hat{A}_3$

$$\Delta ABC = \Delta AEG \Rightarrow \begin{cases} \hat{G}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1 = \hat{A}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{G}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_3 \end{cases} \Rightarrow \hat{G}_1 = \hat{A}_3 \Rightarrow \Delta AIG$$ cân tại I

Chứng minh tương tự ta có ΔIAE cân tại I $\Rightarrow IE = IG = IA$

d. Có Tứ giác AEKG là hình bình hành (các cạnh đối song song)

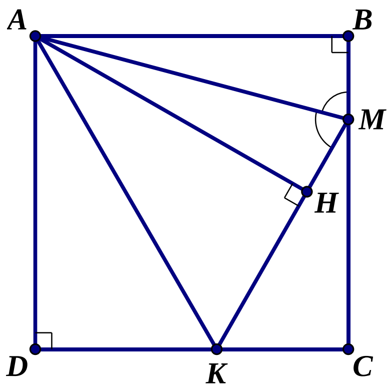
Lại có AI đi qua trung điểm của EG mà AI là đường chéo thứ 2 nên AI đi qua K. Vậy AI đi qua K

Bài 31. Cho hình vuông ABCD. Từ điểm M tùy ý trên cạnh BC, vẽ đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho $AMB = AMK$, AH $\perp$ MK tại H. Chứng minh rằng

a) $\Delta AMH = \Delta AMB$

b) $KAM = 45^o$

HD:



a) Ta có:

$$\begin{cases} BAM + BMA = 90^0 \\ HAM + HMA = 90^0 \Rightarrow BAM = HAM \\ BAM = HMA \end{cases}$$

Hai tam giác AMH và AMB có:

$HMA = BAM$, AM chung, $HAM = BAM$,

Do đó $\Delta AMH = \Delta AMB$ (g-c-g)

b) Xét hai tam giác ADK và AHK lần lượt vuông tại D và H, Có cạnh huyền AK chung,

đồng thời AH = AD (vì cùng bằng AB).

Vậy $\Delta ADK = \Delta AHK \Rightarrow DAK = HAK$.

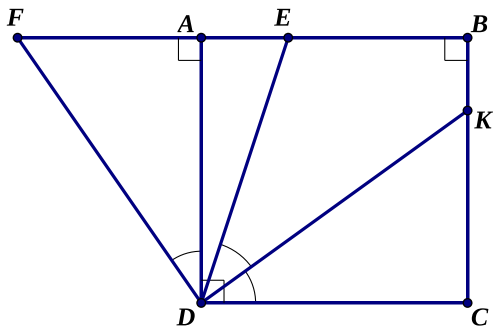
$KAM = HAK + HAM = \frac{1}{2}\left(HAD + HAB\right) = \frac{1}{2}BAD = 45^0$ (chứng minh xong).

Bài 32. Cho hình vuông ABCD, E thuộc cạnh AB. Phân giác CDE cắt BC tại K. Trên tai đối của tia AB, lấy điểm F sao cho AF = CK. Chứng minh rằng

a) Tam giác DEF cân

b) AE + CK = DE

HD:



a) Từ giả thiết dễ dàng thấy được hai tam giác ADF và CDK bằng nhau (c-g-c).

Suy ra $ADF = CDK = EDK$.

Từ đó ta có: $KDF = ADF + KDA = CDK + KDA = 90^0$ (1).

$AFD + ADF = 90^0 \Rightarrow AFD + KDE = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2), $EFD = EDF$ (vì cùng phụ với góc EDK).

Vậy tam giác DEF cân tại E.

b) AE + CK = AE + AF = EF (F nằm trên tia đối tia AB nên A nằm giữa EF)

Theo câu trên thì EF = ED. Vậy AE + CK = DE.

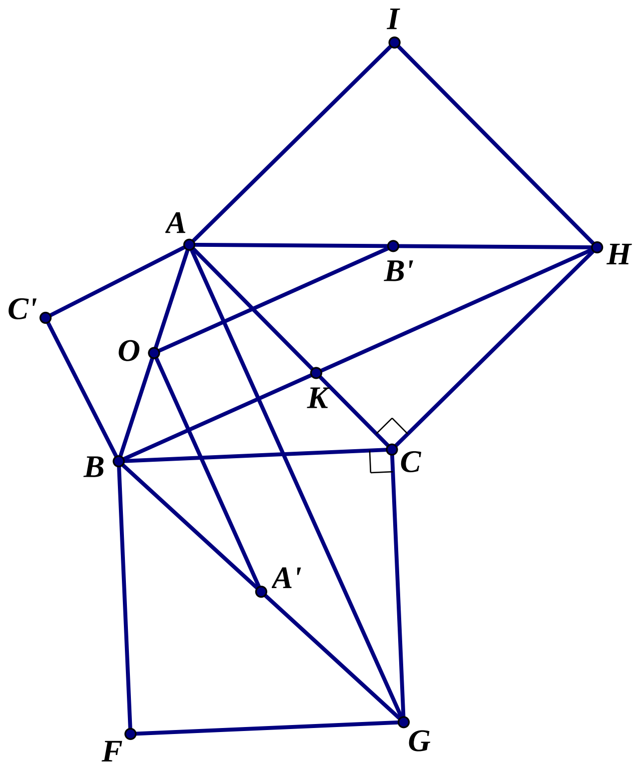
Bài 33. Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng hình vuông BCGF, ACHI và tam giác ABC’ vuông cân tại C’. Gọi O, A’, B’ lần lượt là trung điểm của AB, BG, AH. Chứng minh rằng:

a) AG = BH

b) AG $\perp$ BH

c) Tam giác OA’B’ vuông cân

HD:



a) Xét hai tam giác BCH và GCA có:

BC = GC (hai cạnh của hình vuông BCGF).

$BCH = GCA$ (Vì cùng bằng góc $ACB + 90^0$).

CH = CA (hai cạnh trong hình vuông ACHI).

Suy ra hai tam giác BCH và GCA bằng nhau (c-g-c).

Vậy AG = BH.

b) Gọi K là giao điểm của BH và AH, $CKH = AKB$ (góc đối đỉnh) (1).

Theo chứng minh trên: $CHK = CAG$ (2) (vì hai tam giác BCH và GCA bằng nhau).

Mặt khác: $CHK + CKH = 90^0$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $CAG + AKB = 90^0$. Vậy $AG \perp BH$.

c) Trong tam giác ABG, OA’ là đường trung bình,

Do đó OA’ // AG và OA’ = $\frac{1}{2}$AG (1).

Trong tam giác ABH, OB’ là đường trung bình,

Do đó OB’ // BH và OB’ = $\frac{1}{2}$BH (2).

Theo hai câu trên, AG = BH và $AG \perp BH$,

Kết hợp với (1) và (2)

Suy ra OA’ = OB’ và OA’ $\perp$ OB’.

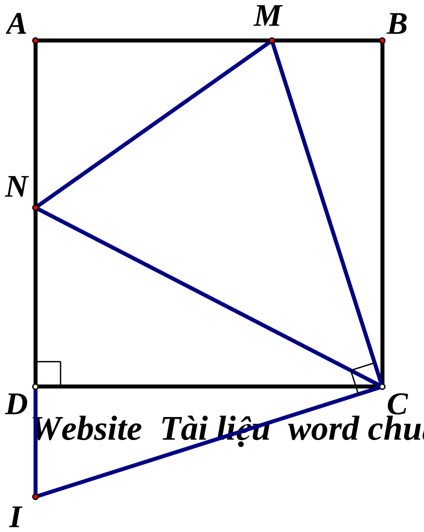
Vậy tam giác OA’B’ vuông cân tại O.

Bài 34:. a) Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M và N là hai điểm lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho chu vi ΔAMN bằng 2. Chứng minh $MCN = 45^0$.

b) Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AB, AD sao cho $MCN = 45^0$. Chứng minh ΔAMN có chu vi bằng 2.

c) Cho hình vuông ABCD. Gọi N là trung điểm của AD và M thuộc cạnh AB sao cho AM = $\frac{2}{3}$AB. Chứng minh MC là phân giác của góc BMN.

HD:



a) Theo giả thiết:

2 = AM + AN + MN = (AB – BM) + (AD – DN) +MN = 2 – (BM + DN) + MN

Suy ra MN = BM + DN.

Trên tia đối của tia DN lấy điểm I thỏa mãn DI = BM.

Hai tam giác vuông CBM và CDI bằng nhau vì có:

CB = CD, $CBM = CDI = 90^0$; BM = DI.

Suy ra CM = CI và $BCM = DCI$.

$$MCI = MCD + DCI = MCD + BCM = 90^0.$$

Theo trên ta có MN = BM + DN = ID + DN = IN.

Xét hai tam giác CMN và CIN có:

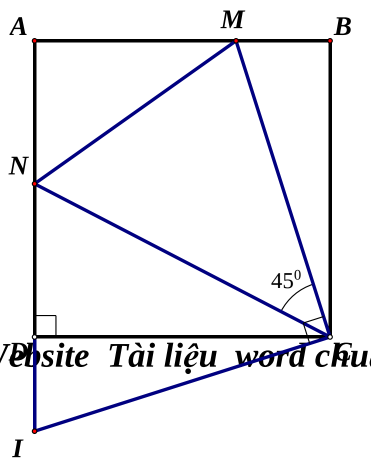
CM = CI; MN = IN; CN chung.

Suy ra $\Delta CMN = \Delta CIN \Rightarrow MCN = ICN$.

Mà $MCN + ICN = MCI = 90^0$.

Vậy $MCN = 45^0$.

b) Giả sử $MCN = 45^0$. Chứng minh chu vi tam giác AMN bằng 2.



Đường thẳng qua C, vuông góc với CM cắt AD tại I.

Vì $MCN = 45^0$ nên $ICN = MCN = 45^0$.

$BCM = DIC$ (cùng phụ với MCD)

BC = DC.

Do đó hai tam giác vuông BCM và DCI bằng nhau.

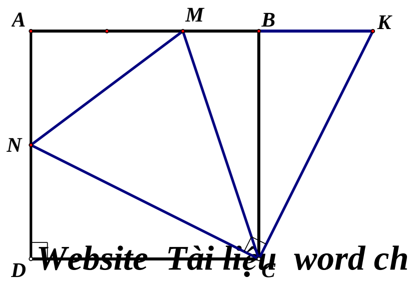
Suy ra CM = CI.

Từ đó ta chứng minh được $\Delta MCN = \Delta ICN$ (c-g-c).

$\Rightarrow$ MN = NI.

Từ đây, tương tự như trên ta chứng minh được tam giác AMN có chu vi bằng 2

c) Đường thẳng qua C, vuông góc với CN, cắt AM tại K.



$\widehat{BCK} = \widehat{DCN}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{NCB}$)

Do đó dễ dàng chứng minh được hai tam giác vuông BCK và DCN bằng nhau (g-c-g).

Suy ra CK = CN và BK = DN.

MK = MB + BK

$= MB + DN = \dfrac{1}{2}AB + \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{5}{6}AB.$

Theo định lí Pitago:

$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{\dfrac{4AB^2}{9} + \dfrac{AB^2}{4}} = \dfrac{5AB}{6}.$

Ta được MK = MN.

Từ đó suy ra $\Delta CKM = \Delta CNM$ (c-c-c).

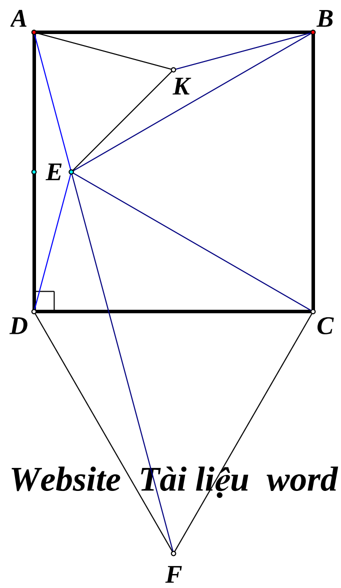
Vậy $\widehat{CMK} = \widehat{CMN}$, hay MC là phân giác góc $\widehat{BMN}$.

Bài 35:. Ở phía trong hình vuông ABCD, vẽ ΔADE cân ở E có góc đáy bằng 15^0.

a) Chứng minh ΔBEC đều.

b) Ở phía ngoài hình vuông ABCD, vẽ ΔADF đều. Chứng minh A, E, F thẳng hàng.

HD:



a) $BAE = 90^0 - DAE = 75^0$;

Tương tự, $CDE = 75^0$.

Dễ thấy $\Delta ABE = \Delta DCE$ (c-g-c)

Suy ra EB = EC.

Bên trong tam giác ABE, dựng tam giác đều AEK.

$$BAK = BAE - KAE = 75^0 - 60^0 = 15^0.$$

Do đó $\Delta AKB = \Delta AED$(c-g-c)

Δ ABK cân tại K, có góc đáy bằng 15^0,

Suy ra: $AKB = 150^0$. $EKB = 360^0 - \left(60^0 + 150^0\right) = 150^0$.

Δ ABK và Δ EBK có AK = EK; $AKB = EKB = 150^0$, BK chung.

Suy ra $\Delta ABK = \Delta EBK$ (c-g-c)$\Rightarrow$ EB = AB.

Vậy ta có EB = EC = BC, nên Δ BCE đều.

b) Tam giác ADF cân tại D nên $AFD = 15^0$.

$$DEF = 180^0 - \left(EDF + EFD\right) = 180^0 - \left(60^0 + 75^0 + 15^0\right) = 30^0$$

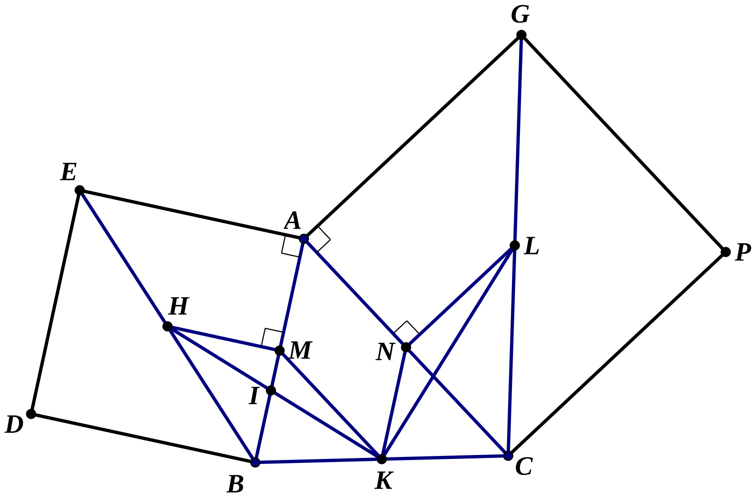
$DEF + DEA = 30^0 + 150^0 = 180^0$. Vậy A, E, F thẳng hàng.

Bài 36:. Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng hình vuông ACPG, ABDE. Gọi H, K, L, M, N lần lượt là trung điểm của BE, BC, CG, AB, AC. Chứng minh rằng

a) $\Delta KNL = \Delta HMK$

b) HK $\perp$ KL

HD:



a)Trong tam giác ABE, HM là đường trung bình,

Do đó HM // EA và HM = $\frac{1}{2}$ EA (1).

Trong tam giác ABC, KN là đường trung bình

Do đó KN = $\frac{1}{2}$ AB (2).

Mặt khác, vì ABDE là hình vuông nên EA = AB.

Kết hợp (1) và (2) suy ra HM = KN.

Lập luận tương tự, ta có MK = $\frac{1}{2}$AC = $\frac{1}{2}$AG = NL.

Ta có HM // EA $\Rightarrow$HM$\perp$AB,

Suy ra $HMK = 90^0 + BMK$ (3).

Chứng minh tương tự, $LNK = 90^0 + CNK$ (4).

Vì MK // AC nên $BMK = BAC$ (góc đồng vị).

Vì NK // AB nên $CNK = CAB$ (góc đồng vị).

Từ đó suy ra $BMK = CNK$.

Kết hợp (3) và (4), ta được $HMK = LNK$.

Xét hai tam giác KNL và HMK có:

KN = HM, $HMK = LNK$, NL = MK.

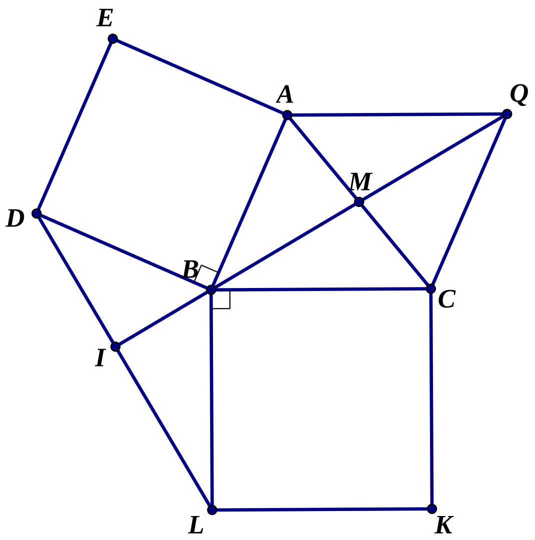
Suy ra hai tam giác KNL và HMK bằng nhau (c-g-c) (Chứng minh xong).

Bài 37: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của AC. Phía ngoài tam giác ABC dựng hình vuông BCKL, ABDE. Lấy điểm Q trên tia đối của tia MB sao cho MB = MQ. Chứng minh:

a) DL = BQ.

b) $DL \perp BM$

HD:



a) Ta chứng minh hai tam giác DBL và BAQ bằng nhau.

Dễ dàng nhận thấy M là trung điểm của QB

Vì M là trung điểm AC suy ra tứ giác ABCQ là hình bình hành.

BD = BA (vì ABDE là hình vuông).

BL = AQ (cùng bằng cạnh BC).

Ta có:

$$DBL + ABC + 2.90^0 = 360^0 \Rightarrow DBL + ABC = 180^0.$$

Lại có ABCQ là hình bình hành nêm $BAQ + ABC = 180^0$.

Từ đây suy ra $DBL = BAQ$.

Vậy hai tam giác DBL và BAQ bằng nhau (c-g-c),

Từ đó suy ra DL = BQ.

b) Theo trên ta có $DLB = QBC$ (5).

Gọi I là giao điểm của BQ và DL.

Ta có $IBL + QBC = 180^0 - LBC = 90^0$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $IBL + ILB = 90^0$.

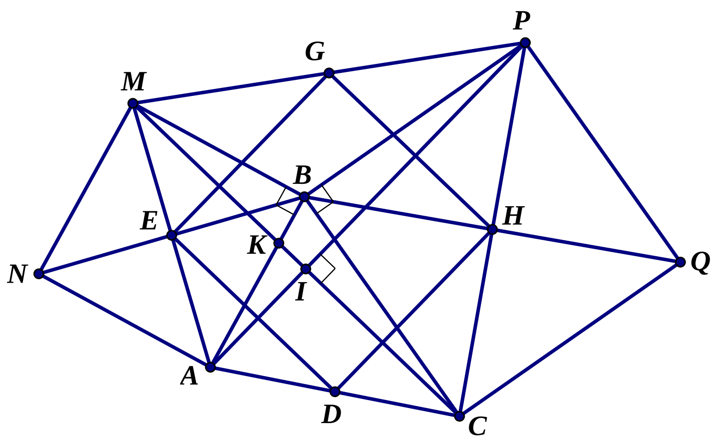
Vậy $BIL = 90^0$ (chứng minh xong).

Bài 38:. Cho tam giác ABC, bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông ABMN và BCQP. Gọi D, E, G, H lần lượt là trung điểm của AC, BN, MP, BQ. Chứng minh:

a) AP = CM và AP $\perp$ CM

b) Tứ giác DEGH là hình vuông

HD:



a) Chứng minh AP = CM và AP $\perp$ CM

Ta chứng minh tam giác ABP và MBC bằng nhau. Thật vậy:

AB = MB (ABMN là hình vuông),

$ABP = MBC = ABC + 90^0$

BP = BC (BCQP là hình vuông).

Vậy $\Delta ABP = \Delta MBC$ (c-g-c).

Suy ra AP = CM và $BAP = BMC$.

Gọi I là giao điểm của AP và CM, K là giao điểm của AB và CM.

Hai tam giác BMK và IAK có:

$M = A$ (vì $BAP = BMC$), góc K đối đỉnh.

Vì tổng ba góc trong một tam giác cùng bằng 180^0

Do đó $KIA = KBM = 90^0$.

Vậy AP = CM và AP $\perp$ CM.

b) Chứng minh tứ giác DEGH là hình vuông.

Vì ABMN và BCQP là hình vuông,

Do đó E là H lần lượt là trung điểm của AM và CP.

EG là đường trung bình trong tam giác MAP, Suy ra EG // AP và EG = $\frac{1}{2}$AP (1).

Tương tự, DH // AP, DH = $\frac{1}{2}$AP, ED // CM, ED = $\frac{1}{2}$CM, GH // CM và ED = $\frac{1}{2}$CM.

Kết hợp kết quả ở câu a), suy ra DEGH là hình vuông.

Bài 39:. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E tùy ý trên cạnh BC. Kẻ tia Ax $\perp$ AE; tia Ax cắt đường thẳng CD tại G. Gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành EAGH và O là giao điểm của hai đường chéo.

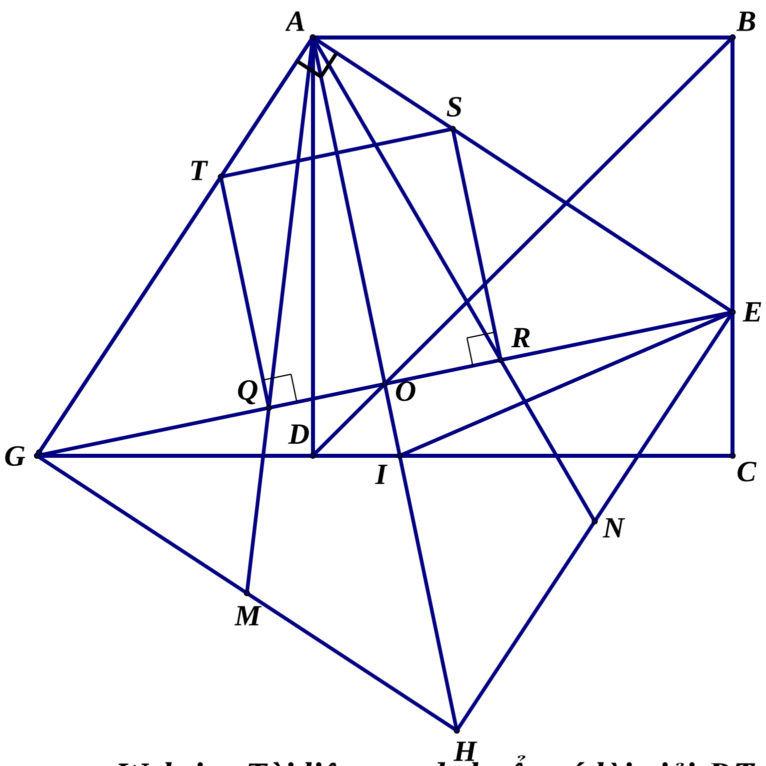
a) Chứng minh ΔAEG vuông cân.

b) Chứng minh D, O, B thẳng hàng.

c) M, N lần lượt là trung điểm của GH, EH, AM, AN cắt GE lần lượt tại Q, R. qua Q và R kẻ các đường vuông góc với GE, chúng cắt AG và AE lần lượt tại T và S. Chứng minh tứ giác TSRQ là hình vuông.

d) AO cắt CD ở I. Chứng minh chu vi ΔEIC bằng 2AB.

HD:



a) Ta có $BAE = DAG$ (cùng phụ với góc DAE).

Hai ΔBAE và ΔDAG có

$BAE = DAG$; BA = DA; $EBA = GDA = 90^0$.

Do đó: ΔBAE = ΔDAG (g-c-g) $\Rightarrow$ AE = AG.

Vì $EAG = 90^0$ nên ΔEAG vuông cân tại A.

b) Tam giác BOE có $BOE + OBE + OEB = 180^0$.

$OBE = OEA = 45^0 \Rightarrow BOE + AEB = 90^0$ (1)

Tam giác GOD có $GOD + OGD = 45^0$ (vì $GDO = 135^0$) $\Rightarrow GOD + AGD = 90^0$ (2)

Lại có $AEB = AGD$ (vì ΔBAE = ΔDAG),

Kết hợp (1) và (2)

Suy ra $BOE = DOG$.

Vì G, O, E thẳng hàng nên hai góc BOE, DOG đối đỉnh.

Vậy B, O, D thẳng hàng.

c) Ta có Q, R lần lượt là trọng tâm hai tam giác AGH và AEH.

Do đó QO = $\frac{1}{3}$GO = $\frac{1}{3}$EO = RO.

Từ đó dễ dàng suy ra GQ = QR = RE (3).

ΔGQT vuông cân tại Q nên QT = GQ;

Tương tự, RS = RE (4).

Từ (3), (4) suy ra QT = RS.

Mặt khác QT // RS (cùng vuông góc GE).

Như vậy tứ giác TSRQ có: TQ = QR = RS, TQ // RS, $Q = 90^0$.

Do đó TSRQ là hình vuông.

d) Vì O là trung điểm GE và IO $\perp$ GE nên tam giác IGE cân tại I $\Rightarrow$ IE = IG.

Gọi l là chu vi tam giác EIC.

l = IE + IC + CE = IG + IC +CE = GC + CE = GD + DC + CE.

Mặt khác, do ΔBAE = ΔDAG nên GD = EB.

Từ đó: l = BE + CE + DC = BC + DC = 2AB.

Bài 40:. Cho hình vuông ABCD, lấy điểm M trên BD. Vẽ ME $\perp$ AB tại E và MF $\perp$ AD tại F. Chứng minh rằng:

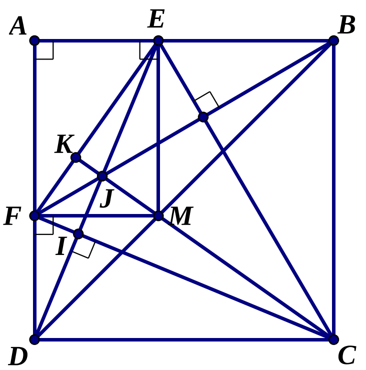
a) CF = DE; CF $\perp$ DE

b) CM = EF; CM $\perp$ EF

c) BF = CE; BF $\perp$ CE

d) CM, BF, DE đồng quy

HD:



a) Chứng minh CF = DE; CF $\perp$ DE

Ta có AEMF là hình chữ nhật (vì $A = E = F = 90^0$) $\Rightarrow AE = MF$.

Mặt khác $FMD = ABD = 45^0$ (so le trong), suy ra MF = DF.

Từ đó ta suy ra hai tam giác AED và DFC bằng nhau (c-g-c).

Do đó CF = DE và $ADE = DCF$.

Gọi I là giao điểm của CF và DE, ta có:

$$\begin{cases} IFD + DCF = 90^0 \\ ADE = DCF \end{cases} \Rightarrow IFD + ADE = 90^0 \Rightarrow FID = 90^0.$$

Vậy $CF \perp DE$.

b) Chứng minh $CM = EF$; $CM \perp EF$

$$\begin{cases} MF = FD \\ MFC = FDE \left(\text{vì } MFC + IFD = FDE + IFD = 90^0\right) \\ FC = DE \end{cases} \Rightarrow \Delta MFC = \Delta FDE \Rightarrow CM = EF.$$

Lại có: $\begin{cases} FCK = DEK \\ DEK + EFC = 90^0 \end{cases} \Rightarrow FCK + DEK = 90^0 \Rightarrow EKJ = 90^0$.

Vậy $CM = EF$; $CM \perp EF$.

c) BF = CE; $BF \perp CE$

Ta dễ dàng chứng minh $\Delta ABF = \Delta BCE$,

Suy ra BF = CE và $ABF + BEC = ECF + BEC = 90^0$

Suy ra BF = CE và $BF \perp CE$.

d) Theo kết quả ba câu trên thì CM, FB, ED là ba đường cao trong tam giác CEF.

Theo tính chất ba đường cao trong một tam giác đồng quy,

Ta suy ra CM, BF, DE đồng quy.

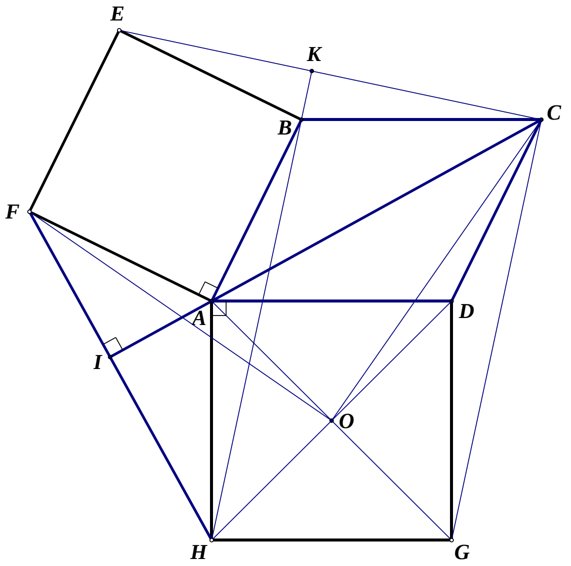
Bài 41:. Cho hình bình hành ABCD. Ở phía ngoài hình bình hành, vẽ các hình vuông ABEF và ADGH.

a) Chứng minh AC = FH và $AC \perp FH$.

b) Gọi O là tâm đối xứng của hình vuông ADGH. Chứng minh $OF \perp OC$ và $BH \perp CE$.

c) Chứng minh ΔECG vuông cân.

HD:



a) Hai tam giác ADC và HAF có:

AD = HA; $ADC = HAF$ (cùng bù với góc BAD); DC = AF (cùng bằng AB).

Do đó: $\Delta ADC = \Delta HAF$, suy ra AC = HF và $DAC = AHF$ (1).

Gọi I là giao điểm của AC và HF.

Ta có: $DAC + HAI + HAD = 180^0 \Rightarrow DAC + HAI = 90^0$ (2).

Từ : (1), (2)$\Rightarrow$ $AHF + HAI = 90^0 \Rightarrow HIA = 90^0$. Vậy $AC \perp HF$.

b) $OAF = OAH + HAF = 45^0 + HAF = 45^0 + CAD = ODC$.

Hai tam giác OAF và ODC có:

OA = OD; $OAF = ODC$; AF = DC (cùng bằng AB).

Suy ra $\Delta OAF = \Delta ODC \Rightarrow AOF = DOC$.

$COF = COA + AOF = COA + DOC = DOA = 90^0 \Rightarrow FO \perp OC$.

$BAH = BAD + 90^0$; $EBC = 360^0 - \left(90^0 + ABC\right) = 270^0 - ABC = 90^0 + BAD$

Suy ra $BAH = EBC$. Từ đó dễ dàng chứng minh được $\Delta BAH = \Delta EBC$.

Gọi K là giao điểm của BH và CE.

$\Delta BAH = \Delta EBC \Rightarrow ABH = BEK$.

Lại có $ABH + EBK = 90^0 \Rightarrow BEK + EBK = 90^0 \Rightarrow EKB = 90^0$.

Vậy OF $\perp$ OC và BH $\perp$ CE.

c) Dễ thấy tứ giác BCGH là hình bình hành,

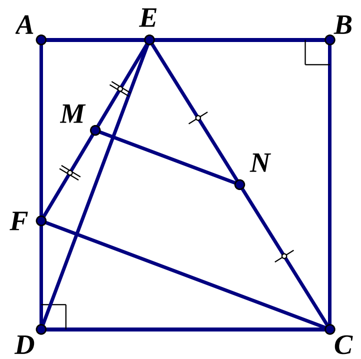
Do đó CG // BH và CG = BH.

Theo chứng minh trên thì BH $\perp$ CE và BH = CE (vì $\Delta BAH = \Delta EBC$).

Từ đó suy ra CG = CE và CG $\perp$ CE, hay Δ ECG vuông cân tại C.

Bài 42:. Cho hình vuông ABCD, E thuộc AB, F thuộc AD sao cho AE = DF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, CE. Chứng minh rằng MN $\perp$ DE và MN = $\frac{1}{2}$DE.

HD:



Theo chứng minh bài trên, Thì ta có DE = CF và DE $\perp$ CF (1).

Trong tam giác EFC, MN là đường trung bình nên MN // CF và MN = $\frac{1}{2}$CF (2).

Từ (1) và (2) suy ra MN // DE và MN = $\frac{1}{2}$DE .(CM xong).

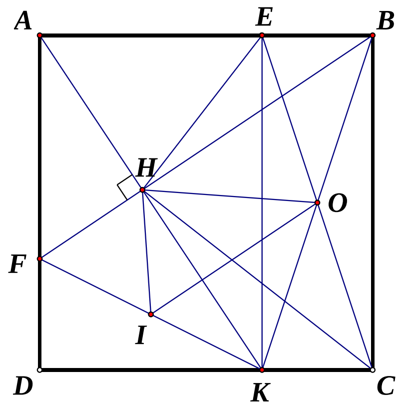
Bài 43:. Cho hình vuông ABCD, lấy các điểm E, F, K lần lượt trên cạnh AB, AD, DC sao cho: AE = AF = DK.

a) Chứng minh AK $\perp$ BF tại giao điểm H.

b) Chứng minh $EHC = 90^0$.

c) Cho AB = 3, AE = 2. Gọi I là trung điểm FK, O là trung điểm EC. Chứng minh chu vi ΔHIO bằng $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}\right)$.

HD:



a) Chứng minh $AK \perp BF$ tại giao điểm H.

Ta có ΔABF = ΔDAK (c-g-c)

Suy ra $ABF = DAK$ (1).

Mặt khác $DAK + BAH = 90^0$ (2)

Từ : (1), (2) $\Rightarrow ABF + BAH = 90^0$.

Vậy $AK \perp BF$.

b) Chứng minh $EHC = 90^0$.

Dễ thấy BEKC là hình chữ nhật, O là trung điểm của EC cũng là trung điểm của BK.

ΔBHK vuông tại H có HO là đường trung tuyến nên HO = OB = OK.

Suy ra HO = OC = OE.

Mà OH là trung tuyến trong ΔHEC nên ta được ΔHEC vuông tại H.

Vậy $EHC = 90^0$.

c) Cho AB = 3, AE = 2.

Theo trên ta có HO = $\frac{1}{2}$BK = $\frac{1}{2}\sqrt{BE^2 + EK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+9} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

HI là đường trung tuyến trong tam giác vuông HFK

Do đó: HI = $\frac{1}{2}$FK = $\frac{1}{2}\sqrt{FD^2 + DK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+4} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

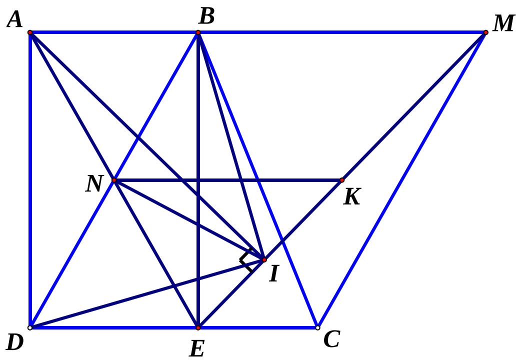
Trong ΔFBK, OI là đường trung bình, do đó:

OI = $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9+4} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Vậy chu vi tam giác OIH bằng: OI + OH + HI = $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13}\right)$.

Bài 44:. Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^0$) (AB < CD). Vẽ BE vuông góc CD tại E. trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho BM = CD. Gọi N là giao điểm của AE và BD, K là trung điểm của EM. Vẽ AI vuông góc ME tại I. Chứng minh rằng NK // AM và BID = 90^0.

HD:



Trong tam giác AEM, NK là đường trung bình, do đó NK // AM.

Dễ thấy tứ giác ABED là hình chữ nhật,

Do đó N là trung điểm của AE và BD và AE = BD.

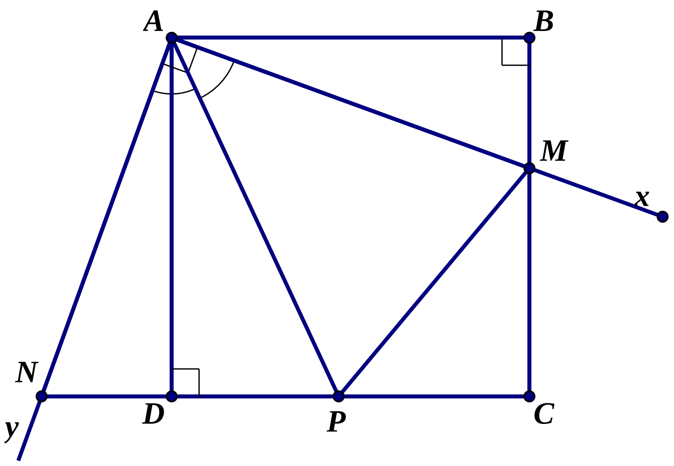
Tam giác IAE vuông tại I, có IN là đường trung tuyến,

Do đó: IN = NA = NE = NB = ND.

Tam giác IBD có IN là trung tuyến thỏa mãn IN = IB = ID, Do đó BID là tam giác vuông tại I.

Bài 45:. Cho hình vuông ABCD. Một góc vuông xAy quay xung quanh đỉnh A thỏa mãn Ax cắt cạnh BC tại M, Ay cắt CD tại N. Phân giác xAy cắt CD tại P. Chứng minh rằng khi xAy quay quanh đỉnh A thì chu vi tam giác CMP bằng 2AB.

HD:



Ta có: $MAB = NAD$ (vì cùng phụ với góc MAD)

Từ đó dễ thấy $\Delta ABM = \Delta ADN$ (g-c-g).

Suy ra AM = AN và BM = BN.

Vì AM = AN và AP là đường phân giác góc MAN nên M và N đối xứng nhau qua AP,

Từ đó PM = PN.

Điểm M thuộc cạnh BC nên điểm N nằm trên tia đối của tia DC và P nằm trên cạnh CD.

Gọi T là chu vi tam giác PCM, ta có:

T = CP + PM + MC = CP + PN + MC = CN + MC = CD + DN + MC

= CD + BM + MC = CD + BC = 2AB.

Vậy khi xAy quay quanh đỉnh A thì chu vi tam giác CMP không đổi bằng 2AB.

Bài 46: Cho đoạn thẳng AG và điểm D nằm giữa A và G. Trên cùng nữa mặt phẳng bờ AG vẽ các hình vuông ABCD, DEFG. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AG, EC. Gọi I, K lần lượt là tâm đối xứng của các hình vuông ABCD, DEFG.

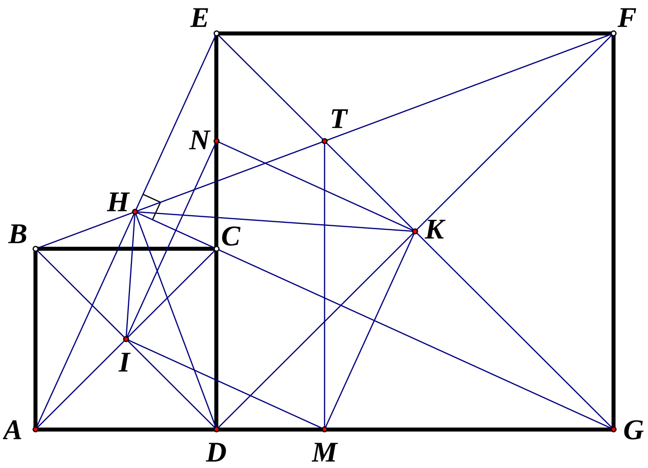
a) Chứng minh AE = CG và AE $\perp$ CG tại H.

b) Chứng minh IMKN là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

d) Gọi T là giao điểm của BF và EG. Chứng minh rằng độ dài TM không đổi khi D di động trên đoan thẳng AG cố định.

HD:



a)Ta có: AD = CD, DE = DG,

Suy ra: $\Delta ADE = \Delta CDG$ (c-g-c) $\Rightarrow$ AE = CG.

$AED = CGD,\ ECH = GCD \Rightarrow AED + ECH = CGD + GCD = 90^0 \Rightarrow EHG = 90^0$.

Vậy AE = CG và AE $\perp$ CG .

b) Chứng minh IMKN là hình vuông.

IN là đường trung bình trong tam giác ADE, IN = $\frac{1}{2}$ AE và IN // AE.

KM là đường trung bình trong tam giác AGE, Suy ra KM = $\frac{1}{2}$AE và KM // AE.

Từ đó suy ra IN = KM = $\frac{1}{2}$AE và IN // KM // AE.

Tương tự, IM, KN lần lượt là đường trung bình trong hai tam giác ACG và ECG.

Nên IM = KN = $\frac{1}{2}$CG và IM // KN // CG.

Lại có AE = CG và AE$\perp$CG. Từ đó ta được IMKN là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

Tam giác HAC vuông tại H, có HI là trung tuyến nên HI = IA = IC

Suy ra HI = IB = ID. Mà HI là trung tuyến của ΔHBD,

Do đó ΔHBD vuông tại H.

Tương tự, HK = KE = KG = KD = KF,

Suy ra ΔHDF vuông tại H.

Như vậy ta có BH$\perp$DH và FH$\perp$DH. Vậy B, H, F thẳng hàng.

d) $ADB = AGE = 45^0 \Rightarrow$ BD // GE.

K là trung điểm của DF nên KT là đường trung bình trong tam giác BDF, hay T là trung điểm của BF.

Tứ giác ABFG là hình thang hai đáy AB và FG, có TM là đường trung bình.

Như vậy ta có:

$$TM = \frac{AB + GF}{2} = \frac{AD + DG}{2} = \frac{AG}{2} \text{ (không đổi).}$$

Bài 47: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho chu vi các tam giác CMN bằng 2a. Chứng minh rằng góc MAN có số đo không đổi.

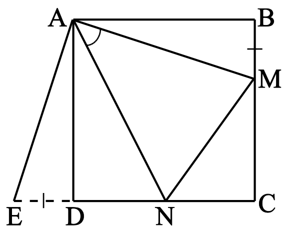
HD:

Tìm cách giải

Vẽ hình chính xác ta luôn thấy $MAN = 45^{o}$.

Vì vậy ta vẽ hình phụ tạo ra góc 90^{o} rồi chứng minh MAN bằng nửa góc vuông đó.

** Trình bày lời giải*



Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho DE = BM.

ΔBAM = ΔDAE (c.g.c) suy ra AM = AE và $BAM = DAE$.

Ta có $BAM + DAM = 90^{o}$

$\Rightarrow DAE + DAM = 90^{o}$ hay $EAM = 90^{o}$.

Theo đề bài, CM + CN + MN = 2a mà CM + CN + MB + ND = 2a

Nên MN = MB + ND hay MN = DE + ND = EN.

ΔMAN = ΔEAN (c.c.c) $\Rightarrow MAN = EAN = \dfrac{EAM}{2} = 45^{o}$.

Vậy góc MAN có số đo không đổi.

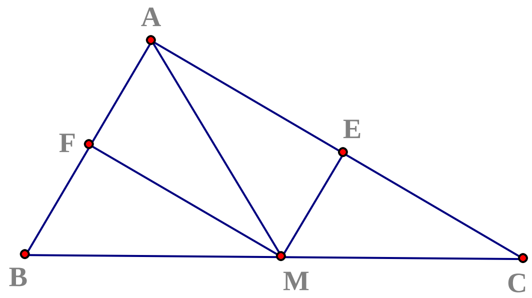
Dạng 3: Tìm điều kiện để tứ giác là hình vuông

Cách giải: Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình vuông

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh BC. Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AC, AB theo thứ tự tại E và F

a) Tứ giác AFME là hình gì

b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình vuông



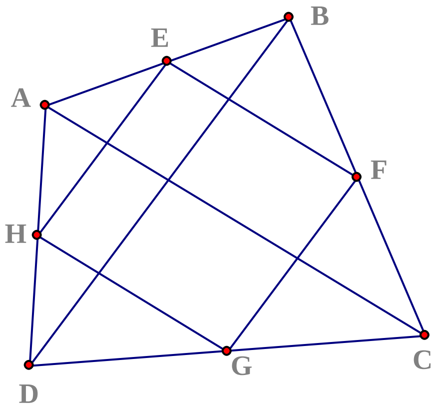
HD:

a) Tứ giác AEMF có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật

b) Để tứ giác AFME là hình vuông thì đườn chéo AM trở thành đường phân giác của $B\hat{A}C \Rightarrow M$ là giao điểm của đường phân giác của BC và $\hat{A}$

Bài 2: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm điềm kiện của tứ giác ABCD để tứ giác EFGH là

a). Hình chữ nhật b). Hình thoi c). Hình vuông



HD:

Ta có tứ giác EFGH là hình bình hành (các cạnh đối bằng nhau)

a). Để EFGH trở thành hình chữ nhật thì $EF \perp FG \Rightarrow AC \perp BD$

b) Để EFGH trở thành hình thoi thì $EF = FG \Rightarrow AC = BD$

c). Để EFGH trở thành hình vuông thì $\Rightarrow AC \perp BD, AC = BD$

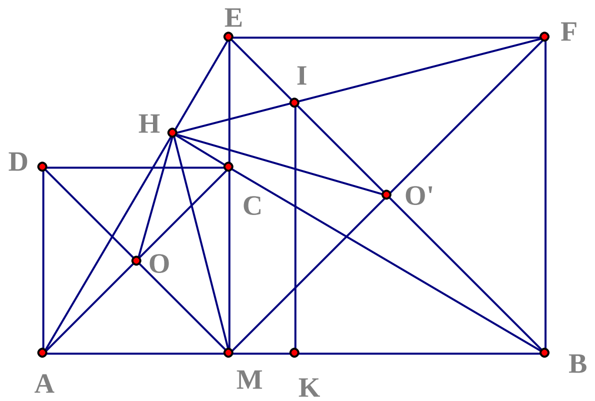
BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB các hình vuông AMCD, BMEF

a). Chứng minh $AE \perp BC$

b). Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng

c). Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB



HD:

a). Có MD // BE (hai góc đồng vị bằng nhau)

mà: $MD \perp AC \Rightarrow AC \perp BE$. Lại có $EC \perp AB \Rightarrow C$ là trực tâm tam giác ABE $\Rightarrow AE \perp BC$

b). Gọi O và O’ lần lượt là tâm của hai hình vuông AMCD và BMEF

Tam giác vuông AHC có OH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC

$$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DM$$

$$\Rightarrow \Delta DMH(\hat{H} = 90^0) \Rightarrow DH \perp MH(1)$$

Chứng minh tương tự, ta được $HF \perp MH(2) \Rightarrow D, H, F$ thẳng hàng.

c). Gọi I là giao điểm của AC và DF

Chứng minh được OI là đường trung bình của tam giác DMF, hay I là trung điểm DF

Kẻ IK vuông góc AB (K thuộc AB) $\Rightarrow K$ là trung điểm của AB, vậy K cố định

Mặt khác $IK = \frac{1}{2}(AD + BF) = \frac{1}{2}AB$ (Không đổi)$\Rightarrow I$ cố định.

Vậy DE luôn đi qua I cố định.

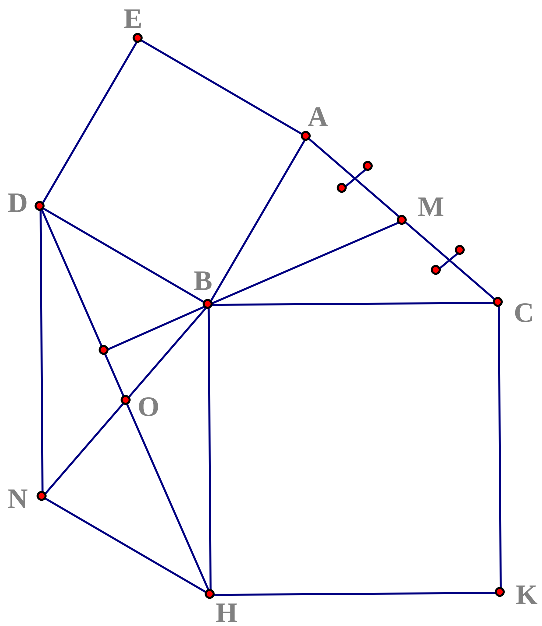
Bài 2:Cho tam giác ABC, vẽ ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và BCKH, BM là trung tuyến của AC

a). Chứng minh $D\hat{B}H + A\hat{B}C = 180^0$

b). Vẽ hình bình hành DBHN. Chứng minh $\Delta ABC = \Delta NHB$

c). Chứng minh DH = 2BM

d). Chứng minh $BM \perp DH$



HD:

a). Chú ý $D\hat{B}H + H\hat{B}C + C\hat{B}A + A\hat{B}D = 360^0, H\hat{B}C = A\hat{B}D = 90^0$

b). $\Delta ABC = \Delta NHB(cgc)$

c). Gọi O là giao điểm của DH và BN

Suy ra O là trung điểm của DH và BN

Ta có: $\Delta ABC = \Delta NHB \Rightarrow OH = BM$ (hai đường trung tuyến tương ứng)

Mà DH = OH (đpcm)

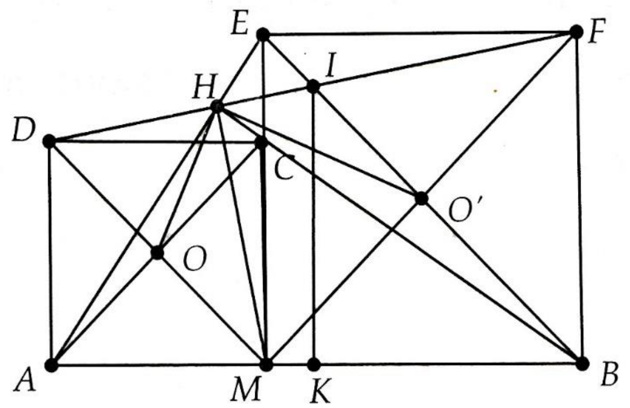
d). Chứng minh được $B\hat{H}O = M\hat{B}C \Rightarrow dpcm$

Bài 3: Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB, các hình vuông AMCD, BMEF.

a) Chứng minh AE vuông góc với BC.

b) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.

c) Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB.



HD:

a) Chứng minh được MD song song với BE

Mà MD $\perp$ AC $\Rightarrow$ AC $\perp$ BE.

Lại có EC $\perp$ AB $\Rightarrow$ C là trực tâm của tam giác ABE.

$\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai hình vuông AMCD và BMEF.

Tam giác vuông AHC có OH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DM$

$\Rightarrow$ Tam giác DMH vuông tại H, hay DH $\perp$ MH (1)

Chứng minh tương tự, ta được HF $\perp$ MH (2)

Từ (1) và (2), suy ra ĐPCM.

c) Gọi I là giao điểm của AC và DF.

Chứng minh được OI là đường trung bình của tam giác DMF, hay I là trung điểm của DF.

Kẻ IK vuông góc với AB (K $\in$ AB)

$\Rightarrow$ K là trung điểm của AB, tức là K cố định.

Mặt khác, $IK = \frac{1}{2}(AD + BF) = \frac{1}{2}AB$ (không đổi) $\Rightarrow$ I cố định. Vậy DF luôn đi qua điểm I cố định.

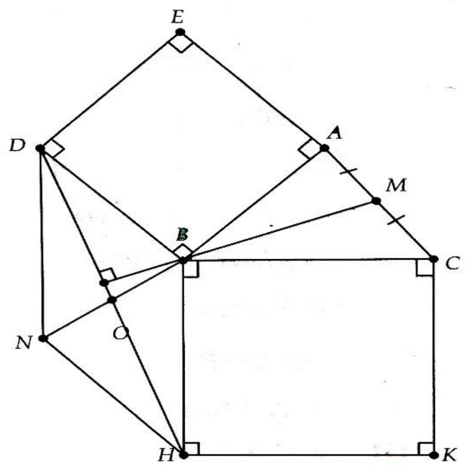
Bài 4: Cho tam giác ABC, vẽ ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và BCKH. BM là đường trung tuyến của tam giác ABC.

a) Chứng minh $DBH + ABC = 180^0$.

b) Vẽ hình bình hành DBHN. Chứng minh ΔABC = ΔNHB.

c) Chứng minh DH = 2BM.

d) Chứng minh BM vuông góc với DH.



HD:

a) Chú ý $DHB + HBC + CBA + ABD = 360^0$

Mà $HBC + ABD = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

b) Chứng minh được hai tam giác ABC và NHB bằng nhau theo trường hợp (c.g.c)

c) Gọi {O} = DH $\cap$ BN.

$\Rightarrow$ O là trung điểm của DH và BN.

Ta có: ΔABC = ΔNHB $\Rightarrow$ OH = BM (2 đường trung tuyến tương ứng)

Mà DH = 2OH $\Rightarrow$ ĐPCM.

d) Chứng minh $BHO = MBC$. Từ đó quy ra ĐPCM

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM, I là trung điểm AC, K là trung điểm AB, E là trung điểm AM. Gọi N là điểm đối xứng của M qua I

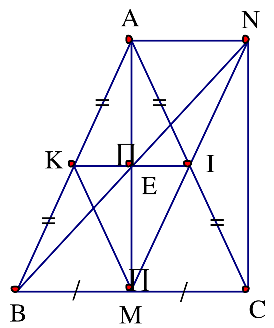
a) Chứng minh tứ giác $AKMI$ là hình thoi.

b) Tứ giác $AMCN$, $MKIC$ là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh E là trung điểm BN.

d) Tìm điều kiện của ΔABC để tứ giác $AMCN$ là hình vuông.

HD:



a) Chứng minh: $MK \parallel AI$ và $MK = AI$.

Suy ra tứ giác AKMI là hình bình hành

Chứng minh $AK = AM$ mà AK, AM là hai cạnh kề nhau suy ra AKMI là hình thoi.

b)Chứng minh được $AMCN$ là hình chữ nhật.

Chứng minh được $MKIC$ là hình bình hành.

c)Chứng minh: $AN \parallel MC, AN = MC$.

Chứng minh: $AN \parallel MB, AN = MB$.

Suy ra $ANMB$ là hình bình hành.

Lập luận suy ra E là trung điểm BN

d)AMCN là hình vuông $\Leftrightarrow AM = MC \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BC$.

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Bài 6: Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M trên đường chéo AC. Vẽ ME ⊥ AD, MF ⊥ CD và MH ⊥ EF. Chứng minh rằng khi điểm M di động trên AC thì đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định.

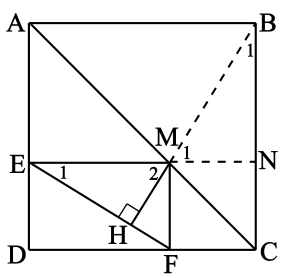
HD:

Tìm cách giải

Vẽ hình chính xác ta thấy đường thẳng MH đi qua một điểm cố định là điểm B.

Vì thế ta sẽ chứng minh ba điểm H, M, B thẳng hàng bằng cách chứng minh $M_1 = M_2$.

Trình bày lời giải



Gọi N là giao điểm của đường thẳng EM với BC.

Khi đó BN = AE; AE = ME (vì ΔAEM vuông cân)

Suy ra BN = ME.

Chứng minh tương tự ta được MN = MF.

Nối MB ta được ΔBMN = ΔEFM (c.g.c).

Suy ra $B_1 = E_1$ do đó $M_1 = M_2$.

Từ đó ba điểm H, M, B thẳng hàng.

Vậy đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định là điểm B.