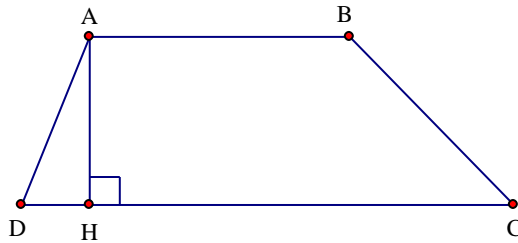


## BÀI 2: HÌNH THANG

### I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa:** Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.



◊ ABCD là hình thang (đáy AB, CD)  $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ là tứ giác} \\ AB // CD \end{cases}$

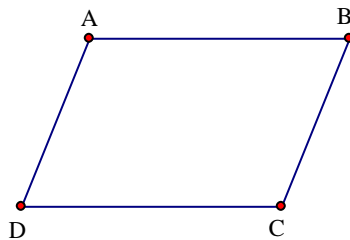
+) AB: đáy nhỏ      +) CD: đáy lớn      +) AD, BC: cạnh bên      +) AH: Đường cao

#### Nhận xét:

Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau

Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau

Dựa vào nhận xét ta có:

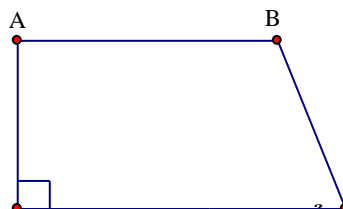


Hình thang ABCD (  $AB // CD$  )

Nếu  $AD // BC \Rightarrow AD = BC; AB = CD$

Nếu  $AB = CD \Rightarrow AD // BC; AD = BC$

2. **Hình thang vuông:** Là hình thang có 1 góc vuông



## II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

### Dạng 1: Tính số đo góc

**Cách giải:** Sử dụng tính chất hai đường thẳng song song và tổng bốn góc của một tứ giác. Kết hợp các kiến thức về tính chất dãy tỉ số bằng nhau, toán tổng hiệu..... để tính ra số đo các góc.

Bài 1: Tính các góc của hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) biết rằng  $A = 3D$  và  $C = 30^\circ$ .

**HD:**

$$\text{Tu } A + D = 180^\circ; A = 3D \Rightarrow D = 45^\circ; A = 135^\circ$$

$$\text{Tu } B + C = 180^\circ; B - C = 30^\circ$$

$$\Rightarrow C = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\Rightarrow B = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

Bài 2: Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $A - D = 20^\circ; B = 2C$ . Tính các góc của hình thang.

**HD:**

Vì  $AB \parallel CD$  nên  $A + D = 180^\circ$  (hai góc trong cùng phía)

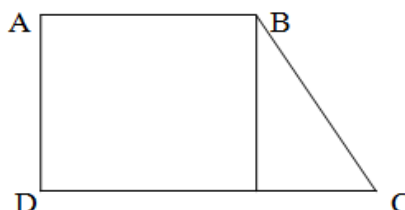
Mà  $A - D = 20^\circ$  nên  $A = 100^\circ; D = 80^\circ$ .

Tương tự:  $B + C = 180^\circ$  mà  $B = 2C$

Nên  $2C + C = 180^\circ \Rightarrow 3C = 180^\circ$

Suy ra:  $C = 60^\circ$  và  $B = 120^\circ$ .

Bài 3: Cho hình thang vuông ABCD có  $A = D = 90^\circ; AB = AD = 2\text{cm}, DC = 4\text{cm}$ . Tính các góc của hình thang.



**HD:**

Kẻ BH vuông góc với CD.

Hình thang ABHD có hai cạnh bên AD// BH  $\Rightarrow$  AD = BH, AB = DH

Do đó: HB = HD = 2cm  $\Rightarrow$  HC = 2cm

$$\Delta BHC \text{ vuông tại H} \Rightarrow C = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 135^\circ$$

Bài 4: Hình thang ABCD ( AB // CD ) có  $\hat{A} - \hat{D} = 40^\circ$ ;  $\hat{A} = 2\hat{C}$  . Tính các góc của hình thang

**HD:**

Vì tứ giác ABCD là hình thang

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} - \hat{D} = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 110^\circ \\ \hat{D} = 70^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 55^\circ \\ \hat{B} = 125^\circ \end{cases}$$

Bài 2: Hình thang ABCD ( AB // CD ) có  $\hat{A} - \hat{D} = 20^\circ$ ;  $\hat{B} = 2\hat{C}$  . Tính các góc của hình thang

**HD:**

Vì tứ giác ABCD là hình thang

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} - \hat{D} = 20^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 100^\circ \\ \hat{D} = 80^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 60^\circ \\ \hat{B} = 120^\circ \end{cases}$$

Bài 3: Cho hình thang ABCD ( AB // CD ) có  $\hat{D} = 60^\circ$

a). Tính  $\hat{A}$

b). Biết  $\frac{\hat{B}}{\hat{D}} = \frac{4}{5}$  . Tính  $\hat{B}$  và  $\hat{C}$

**HD:**

a). Ta có ABCD là hình thang

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \quad \text{ma} \quad \hat{D} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

$$\frac{\hat{B}}{\hat{D}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \hat{B} = \frac{4}{5} \cdot \hat{D} \quad \text{mà } \hat{D} = 60^\circ$$

b).  $\Rightarrow \hat{B} = \frac{4}{5} \cdot \hat{D} = \frac{4}{5} \cdot 60^\circ = 48^\circ$

lại có:  $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \hat{C} = 132^\circ$$

Bài 4: Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $AB < CD$ ,  $AD = BC = AB$ ,  $\angle BDC = 30^\circ$ . Tính các góc của hình thang.

HD:

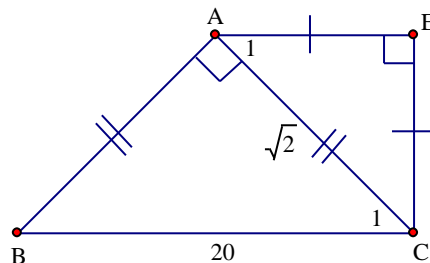
$$\angle DBA = \angle BDC = 30^\circ \text{ (sole); } \angle DBA = \angle ADB = 30^\circ \text{ (tam giác ADB cân).}$$

$$\text{Suy ra } \angle A = 120^\circ \text{ và } \angle D = 60^\circ.$$

Từ B kẻ  $BE \parallel AD$ . Suy ra  $BE = AD$  và  $\angle CEB = \angle D = 60^\circ$  (đồng vị).

Mà  $CB = BE$  nên  $\triangle BCE$  đều, suy ra:  $\angle C = 60^\circ$ ;  $\angle B = 120^\circ$ .

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông cân tại A,  $BC = 20\text{cm}$ . Vẽ tam giác ACE vuông cân tại E (E và B khác phía với C). Chứng minh rằng tứ giác AECD là hình thang vuông, tính các góc và các cạnh của hình thang.



HD:

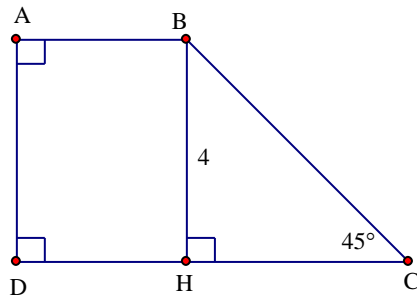
Ta có  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$  mà hai góc ở vị trí so le trong  $\Rightarrow \diamond AECD$  là hình thang

Lại có  $\hat{E} = 90^\circ \Rightarrow \diamond AECD$  là hình thang vuông

$$\text{+) Đặt } AB = AC = x \Rightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\text{cm (pytago)}$$

$$\text{+) Đặt } AE = EC = y \Rightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = 1\text{cm (pytago)}$$

Bài 6: Hình thang vuông ABCD có  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ,  $\hat{C} = 45^\circ$ , biết đường cao  $AD = 4\text{cm}$ ,  $AB + CD = 10\text{cm}$ . Tính độ dài hai đáy và BC, AC.



**HD:**

Xét hình thang ABHD, có :  $AD \parallel BH \Rightarrow AD = BH; AB = DH$

( Hình thang có hai cạnh bên song song )

Xét  $\triangle BHC (\hat{C} = 45^\circ) \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \triangle BHC$  cân tại H  $\Rightarrow BH = CH$

$AB + CD = 10 \Rightarrow AB + DH + HC = 10 \Rightarrow DH = 3cm \Rightarrow CD = 7cm, AB = 3cm$

Áp dụng định lý Pytago ta tính được AC và BC.

### **Dạng 2: Dạng toán chứng minh**

#### **Phương pháp giải:**

Chứng minh 1 tứ giác là hình thang, hình thang vuông ( định nghĩa )

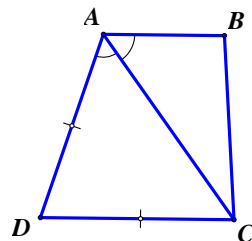
Bất đẳng thức độ dài ( bất đẳng thức tam giác )

Ba điểm thẳng hàng ( Tiên đề Ôclit, cộng góc,....)

Tia phân giác của góc

Bài 1: Cho tứ giác ABCD có  $AD = DC$ , đường chéo AC là phân giác góc A. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

**HD:**



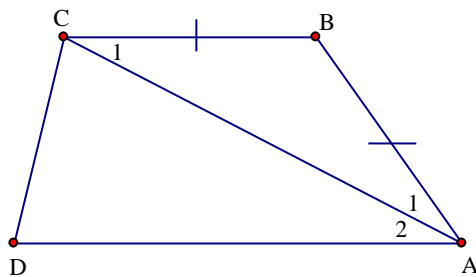
Ta có  $AD = DC$  nên tam giác ADC cân tại D.

Suy ra  $\angle DCA = \angle DAC = \angle BAC$

Suy ra  $AB \parallel CD$  (hai góc so le trong bằng nhau)

Vậy ABCD là hình thang.

Bài 2: Tứ giác ABCD có  $AB = BC$  và AC là phân giác của góc A. Chứng minh rằng ABCD là hình thang



**HD:**

Ta có:  $\hat{C}_1 = \hat{A}_1; \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow \diamond ABCD$  là hình thang.

Bài 3: Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $AB < CD$ . Chứng minh rằng:  $\hat{A} + \hat{B} > \hat{C} + \hat{D}$ .

**HD:**

Trên DC lấy E sao cho  $AB = DE$ . Suy ra :  $\triangle A = \triangle DEB$  ;  $\triangle D = \triangle EBA$ ;

$$A + B = A + D + EBC = D + DEB + EBC > D + C$$

Bài 4: Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ). Hai đường phân giác của góc A và B cắt nhau tại điểm K thuộc đáy CD. Chứng minh  $AD + BC = DC$ .

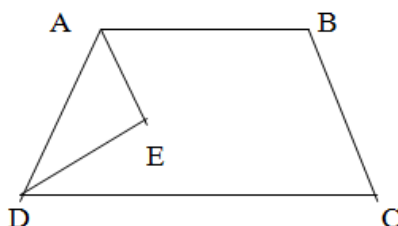
**HD:**

$\triangle ADK$  cân tại D,  $\triangle CBK$  cân tại C ( có hai góc ở đáy bằng nhau)

Nên  $AD = DK$ ;  $KC = CB$

Suy ra:  $AD + BC = DK + KC = DC$

Bài 5: Chứng minh rằng trong hình thang các tia phân giác của hai góc kề một cạnh bên vuông góc với nhau.



**HD :**

Xét hình thang ABCD có  $AB \parallel CD$

$$\text{Ta có: } A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$

$$D_1 = D_2 = \frac{D}{2}$$

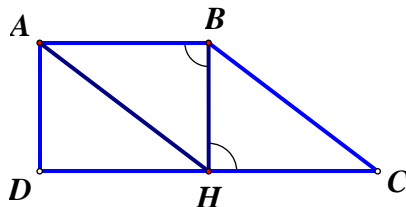
$$\text{Mà } A + D = 180^\circ$$

$$\text{Nên } A_1 + D_1 = 90^\circ$$

Trong  $\triangle ADE$  có  $A_1 + D_1 = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle AED = 90^\circ. \text{ Vậy } AE \perp DE$$

Bài 6: Cho hình thang ABCD, đáy  $AB = 40\text{cm}$ ,  $CD = 80\text{cm}$ ,  $BC = 50\text{cm}$ ,  $AD = 30\text{cm}$ . Chứng minh rằng ABCD là hình thang vuông.



**HD:**

Gọi H là trung điểm của CD. Ta có  $DH = CH = 40\text{cm}$

Xét hai tam giác ABH và CHB có:

$$AB = CH = 40\text{cm}, \angle ABH = \angle CHB \text{ (so le trong)}, BH = HB$$

$$\text{Suy ra } \triangle ABH = \triangle CHB \text{ (c-g-c)} \Rightarrow AH = CB = 50\text{cm}.$$

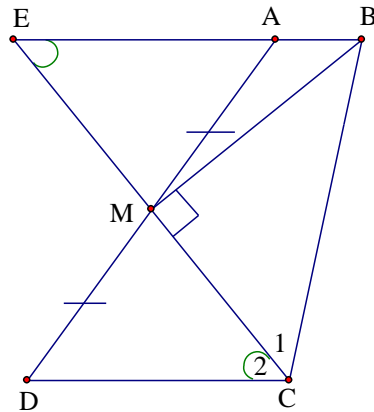
$$\text{Tam giác ADH có: } AD^2 + DH^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2 = AH^2$$

Suy ra tam giác ADH vuông tại D. Vậy hình thang ABCD là hình thang vuông.

Bài 7: Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm M của AD và cắt cạnh AB tại E. Chứng minh rằng :

a).  $\angle BMC = 90^\circ$

b).  $BC = AB + CD$



HD:

a). Ta có 
$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 (gt) \\ \hat{C}_2 = \hat{E} (slt) \end{cases} \Rightarrow \Delta EBC \text{ cân tại B}$$

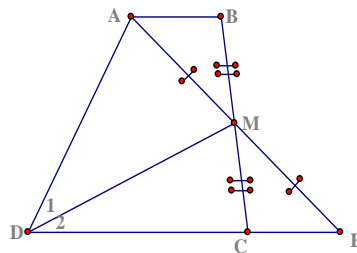
Ta đi chứng minh  $ME = MC \Rightarrow BM$  là đường trung tuyến ứng với cạnh BC thì nó là đường cao.

$\Delta EAM = \Delta CDM (gcg) \Rightarrow EM = MC \Rightarrow MB$  là đường trung tuyến ứng với cạnh EC

Lại có  $\Delta EBC$  cân tại B  $\Rightarrow MB$  là đường cao  $\Rightarrow \hat{BMC} = 90^\circ$

b).  $BC = BE = BA + AE = BA + CD$  (đpcm)

Bài 8: Cho hình thang ABCD (  $AB \parallel CD$  ),  $AB + CD = AD$ . Chứng minh rằng phân giác trong các góc A và D cắt nhau tại trung điểm của BC



HD:

Gọi M là trung điểm của BC, kéo dài AM cắt CD tại E

$$\Delta ABM = \Delta ECM (gcg) \Rightarrow \begin{cases} AB = CE \\ AM = EM \end{cases} \Rightarrow AB + CD = DE = AD$$

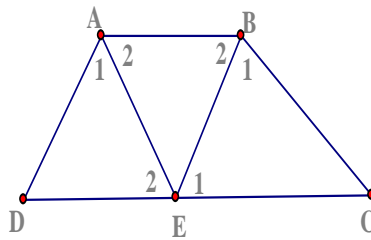
Suy ra: tam giác ADE Cân tại D. Có AM là đường trung tuyến



$\Rightarrow DM$  là phân giác của

$$\hat{D} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \text{ (dpcm)}$$

Bài 9: Cho hình thang ABCD (  $AB \parallel CD$ ), trong đó  $CD = BC + AD$ . Hai đường phân giác của hai góc A và B cắt nhau tại K. Chứng minh rằng C, D, K thẳng hàng



**HD:**

Trên CD lấy điểm E sao cho  $CE = CB \Rightarrow AD = ED \Rightarrow \triangle CBE$  cân tại C

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{E}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{E}_1 = \hat{B}_2 \text{ (so le trong)} \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{E}_1$$

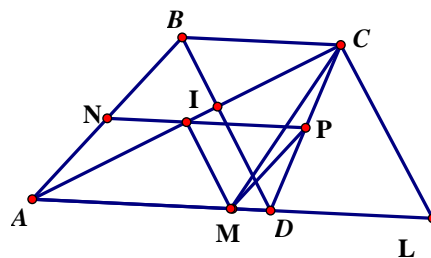
Chứng minh tương tự :  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{E}_2 \Rightarrow EA, EB$  là phân giác của góc A và góc B

$\Rightarrow$  giao điểm của hai đường phân giác  $\hat{A}, \hat{B}$  cắt nhau tại  $E \in BC \Rightarrow E \equiv K$

Suy ra: ba điểm D, E, C Thẳng hàng.

Bài 10: Cho hình thang ABCD ( $AD \parallel BC$ ;  $AD > BC$ ) có đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại I. Trên đáy AD lấy M sao cho AM bằng độ dài đường trung bình của hình thang. Chứng minh: tam giác ACM cân tại M

**HD:**



Gọi L là điểm đối xứng với đối xứng với A qua M Gọi NM là đường trung bình của hình

thang ABCD như hình vẽ

Gọi I là giao điểm của AC và NP

Vì NP//BC  $\Rightarrow$  NI//BC mà N là trung điểm AB

$\Rightarrow$  I cũng là trung điểm AC (1)

Suy ra IM//CL (2)

Xét hình thang ABCD ta có:

$$P = \frac{BC + AD}{2} = AM \Leftrightarrow BC + AD = 2AM$$

$$\Rightarrow BC + AD - AM = AM \Rightarrow BC + MD = AM = ML$$

$$\Rightarrow BC = ML - MD = DL$$

Suy ra BC=DL mà BC//DL

Suy ra tứ giác BCLD là hình bình hành

Suy ra BD//CL

Mà  $BD \perp AC$  (gt)  $\Rightarrow CL \perp AC$  (3)

Từ (1), (2) và (3)  $IM \perp AC$  và MI là đường trung trực của đoạn thẳng AC

Suy ra MA=MC

Vậy tam giác MAC cân tại M

Bài 11: Cho hình thang ABCD (AB // CD).

a) Chứng minh rằng nếu hai tia phân giác của hai góc A và D cùng đi qua trung điểm F của cạnh bên BC thì cạnh bên AD bằng tổng hai đáy.

b) Chứng minh rằng nếu  $AD = AB + CD$  thì hai tia phân giác của hai góc A và D cắt nhau tại trung điểm của cạnh bên BC.

**HD:**

Trên AD lấy K sao cho AK=AB

$\triangle AKF = \triangle ABF$  (c.g.c) nên  $AFK = AFB$

Vì  $A = D = 180^\circ$  nên  $FAK = FDK = 90^\circ$ .

Ta có:  $AFK + KFD = 90^\circ$ ;  $AFB + DFC = 90^\circ$  mà  $AFK = AFB$  nên  $KFD + CFD$

Suy ra  $\triangle KFD = \triangle CFD$  (g.c.g) nên  $KD = DC$ .

$AD = AK + KD = AB + CD$  đpcm.

Bài 13: Cho hình thang ABCD có  $A = B = 90^\circ$  và  $AB = BC = \frac{AD}{2}$ . Lấy điểm M thuộc đáy nhỏ BC.

Kẻ  $Mx \perp MA$ , Mx cắt CD tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN vuông cân.

**HD:**

Tính được :  $C = 135^\circ$

Trên AB lấy K sao cho  $BM = BK$  suy ra  $AK = MC$ ,

Vì  $\triangle KBM$  vuông cân nên  $AKM = 135^\circ$ ,

Mặt khác:  $AKM = NMC$  ( cùng bù với góc  $AMB$  )

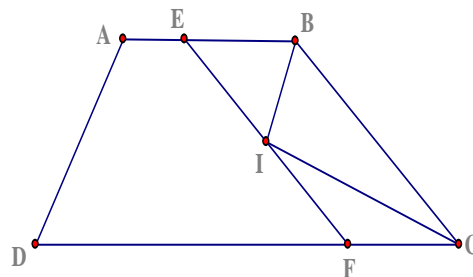
suy ra  $\triangle AKM = \triangle MCN$  (g.c.g) nên  $AM = MN$

Bài 14: Cho hình thang ABCD (  $AB \parallel CD$ ,  $AB < CD$  ) hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau ở I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, CD lần lượt ở E và F.

a). Tìm các hình thang

b). Chứng minh tam giác BEI cân ở E và tam giác IFC cân ở F.

c). Chứng minh  $EF = BE + CF$



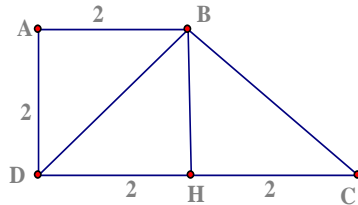
**HD:**

b). Ta có :  $EIB = IBC = IBE \Rightarrow \triangle IBE$  cân tại E. tương tự ta chứng minh  $\hat{BIC} = 90^\circ \Rightarrow$  đpcm

c).  $EF = EI + IF = EB + FC$  ( đpcm )

Bài 15: Cho hình thang vuông ABCD có  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = AD = 2cm$ ,  $DC = 4cm$ ,  $BH \perp CD \equiv H$

- Chứng minh  $\triangle ABD = \triangle HDB$
- Chứng minh  $\triangle BHC$  vuông cân tại H
- Tính diện tích hình thang ABCD

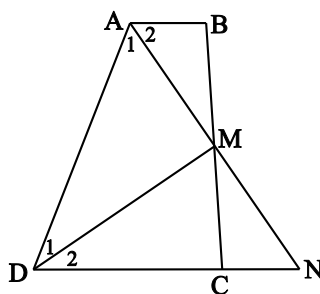


**HD:**

- $\triangle ABD = \triangle HDB$  (cgc)
- Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau nên là tam giác vuông cân
- $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD = \frac{1}{2}(2 + 4) \cdot 2 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$

Bài 16: Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), các tia phân giác của góc A, góc D cắt nhau tại M thuộc cạnh BC. Cho biết  $AD = 7\text{cm}$ , chứng minh rằng một trong hai đáy của hình thang có độ dài nhỏ hơn 4cm.

**HD:**



\* Tìm cách giải

Để chứng minh một cạnh đáy nào đó nhỏ hơn 4cm ta có thể xét tổng của hai cạnh đáy rồi chứng minh tổng này nhỏ hơn 8cm. Khi đó tồn tại một đáy có độ dài nhỏ hơn 4cm.

\* Trình bày lời giải

Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC.

Ta có  $AB \parallel CD$  nên  $\angle A_2 = \angle N$  (so le trong).

Mặt khác,  $A_1 = A_2$  nên  $A_1 = N \Rightarrow \Delta DAN$  cân tại D

$\Rightarrow DA = DN$ . (1)

Xét  $\Delta DAN$  có  $D_1 = D_2$  nên DM đồng thời là đường trung tuyến:  $MA = MN$ .

$\Delta ABM = \Delta NCM$  (g.c.g)  $\Rightarrow AB = CN$ .

Ta có  $DC + AB = DC + CN = DN = DA = 7\text{cm}$ . Vậy  $AB + CD < 8\text{cm}$ .

Vậy một trong hai đáy AB, CD phải có độ dài nhỏ hơn 4cm.

## BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho hình thang ABCD (  $AB \parallel CD$ ), biết  $\hat{A} = 3\hat{D}, \hat{B} - \hat{C} = 30^\circ$ . Tính các góc của hình thang

**HD:**

Ta có:  $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ , mà  $\hat{A} = 3\hat{D} \Rightarrow 4\hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} = 180^\circ : 4 = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} \Rightarrow \hat{C}, \hat{B}$

Bài 2: Tính các góc của hình thang ABCD (  $AB \parallel CD$ ), biết rằng:  $\hat{A} = \frac{1}{3}\hat{D}, \hat{B} - \hat{C} = 50^\circ$

**HD:**

Ta tính được  $\hat{A} = 45^\circ; \hat{B} = 115^\circ; \hat{C} = 65^\circ; \hat{D} = 135^\circ$

Bài 3: Cho hình thang ABCD (  $AB \parallel CD$ ), biết  $\hat{A} = 3\hat{D}, \hat{B} = \hat{C}, AB = 3\text{cm}, CD = 4\text{cm}$ . Tính đường cao AH của hình thang và diện tích của hình thang

**HD:**

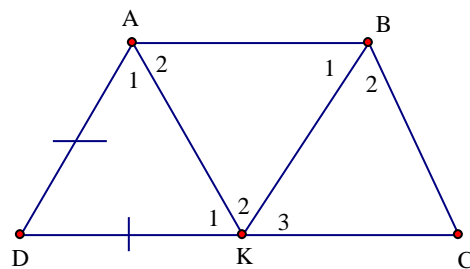
Ta tính được  $\hat{A} = 135^\circ; \hat{B} = 90^\circ; \hat{C} = 90^\circ; \hat{D} = 45^\circ \Rightarrow BC \perp DC$

Vận dụng nhận xét hình thang ABCH (  $AB \parallel CH$ ) có hai cạnh bên song song thì hai cạnh đáy bằng nhau, để tính được  $CH = 3\text{cm}$  từ đó suy ra  $DH = 1\text{cm}$

Chứng minh được tam giác AHD vuông cân tại H nên  $AH = 1\text{cm} \Rightarrow A_{ABCD} = 3,5(\text{cm}^2)$

Bài 4: Cho hình thang ABCD (  $AB \parallel CD$  ), biết  $CD = AD + BC$  . Gọi K là điểm thuộc đáy CD sao cho  $KD = AD$  . Chứng minh rằng

- AK là tia phân giác của  $\hat{A}$
- $KC = BC$
- BK là tia phân giác của  $\hat{B}$



**HD:**

a)  $\triangle ADK$  cân  $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{K}_1 \Rightarrow AK$  là phân giác góc A

$$\text{b) } \begin{cases} KD + KC = DC \\ BC + KD = DC \end{cases} \Rightarrow KC = BC$$

c)  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{K}_3 \Rightarrow BK$  là phân giác góc B