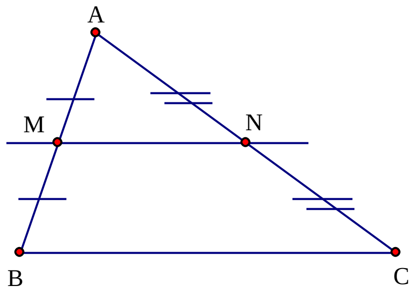
# BÀI 4: PHẦN I: ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

## I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT




**1. Định nghĩa:** Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

**2. Các định lý**

**Định lý 1:** Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba

$$\Delta ABC, AM = MB, MN / BC \Rightarrow AN = NC$$

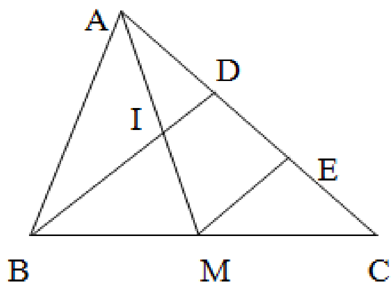
**Định lý 2:** Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy

$$MN // BC; MN = \frac{1}{2}BC$$

## II. BÀI TÂP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh AC sao cho AD = $\frac{1}{2}$DC. Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của BD và AM. CMR: AI = IM

HD:



Gọi E là trung điểm của DC.

Vì $\Delta BDC$ có BM = MC, DE = EC.

Nên BD // ME $\Rightarrow$ DI // EM

Do $\Delta AME$ có AD = DE, DI // EM

Nên AI = IM

Bài 2 : Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P theo thứ tự trung điểm các cạnh AB,AC,BC. Tính chu vi của tam giác MNP, biết AB = 8cm,AC =10cm,BC = 12cm.

HD:

Học sinh tự vẽ hình

Tam giác ABC có AM = MB, AN = NC nên MN là đường trung bình. Suy ra :

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6(cm)$$

$$MP = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5(cm).$$

$$NP = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4(cm).$$

Vậy chu vi tam giác MNP bằng : 6 + 5 + 4 = 15(cm ).

Bài 3: Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Trên cạnh AB, lấy hai điểm D, E sao cho AD = DE = EB. Gọi I là giao điểm của AM với CD. Chứng minh: AI = IM.

HD:

$\Delta$BDC có EM là đường trung bình nên EM//DC hay EM//DI.

$\Delta$AEM có DI//EM và D là trung điểm AE nên I là trung điểm AM.

Bài 4: Cho tam giác ABC và hai đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BG, CG. Chứng minh tứ giác MNDE có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

HD:

Học sinh tự vẽ hình

$\Delta$ABC có DE là đường trung bình nên: DE//BC và DE = $\frac{1}{2}$BC. (1)

$\Delta$GBC có NM là đường trung bình nên: MN // BC và MN = $\frac{1}{2}$ BC. (2)

Từ (1)(2) suy ra DE = MN và DE // MN

Tương tự: DN = $\frac{1}{2}$AG và DN // AG; EM = $\frac{1}{2}$AG và EM // AG nên DN=EM và DN //EM

Bài 5: Cho tam giác ABC. Trên tia BA lấy điểm D sao cho A là trung điểm BD. Trên tia CB lấy điểm E sao cho B là trung điểm CE. Hai đường thẳng AC và DE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $DI = \frac{DE}{3}$.

HD:

Từ B kẻ song song AI cắt ED tại H. Suy ra I là trung điểm HD (1).

Vì HB // IC và B là trung điểm EC nên H là trung điểm EI (2).

Từ (1)(2) suy ra 3DI=DE.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD có $C = 40^0$ ; $D = 80^0$ AD = BC. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Tính góc nhọn tạo bởi đường thẳng FE với các đường thẳng AD và BC.

HD:

Gọi EF cắt AD và BC tại M và N, AD cắt BC tại O

Gọi I là trung điểm BD, Suy ra IE là đường trung bình $\Delta$DBA và FI là đường trung bình $\Delta$DBC.

Mà AD=BC nên IE=IF. hay $\Delta$IEF cân tại I.

$ONM = FNC = NFI$ ( hai góc sole trong)

$OMN = IEF$ ( hai góc đồng vị)

Mà $NFI = IEF$ nên $\Delta$OMN cân tại O

Mà $NOM = 120^0$ nên $ONM = OMN = 30^0$.

Bài 7: Cho A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng *d* (AB > BC). Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là *d*, vẽ các tam giác đều AMB và BNC. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BM, CM, BN, AN. Chứng minh:

a) PQRS là hình thang cân.

b) $SQ = \frac{1}{2}MN$

HD:

a) PQ là đường trung bình của $\Delta$MBC nên PQ//BC

SR là đường trung bình của $\Delta$NAB nên SR//AB. Suy ra SR//PQ nên PQRS là hình thang.

Gọi H và I lần lượt là trung điểm AB và BC. Ta có: SH là đường trung bình $\Delta$ABN nên SH//BN, mà BN//AM ( hai góc đồng vị bằng nhau) nên SH//AM (1)

PH là đường trung bình của $\Delta$MAB nên PH//AM (2).

Từ (1)(2) suy ra P,S,H thẳng hàng và PS//AM nên $PSR = 60^0$. Chứng minh tương tự Q,R,I thẳng hàng và $QRS = 60^0$ nên PQRS là hình thang cân.

b) SQ=PR= $\frac{1}{2}$ MN.

Bài 8: Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM, D là giao điểm của BI và AC.

a) Chứng minh: $AD = \frac{1}{2}DC$.

b) So sánh độ dài BD và ID.

HD:

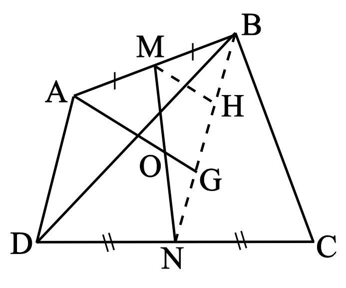
Kẻ MO //BD suy ra O là trung điểm CD (1) và MO//ID

Vì MO//ID mà I là trung điểm AM nên D là trung điểm AO (2).

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

Bài 9: Cho tứ giác ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng AG chia đôi MN.

HD:




Tìm cách giải

Kết luận của bài toán gợi ý cho ta dùng định lí đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba. Gọi H là trung điểm của BG thì ta có thể dùng định lí đường trung bình để chứng minh.

Trình bày lời giải

Gọi O là giao điểm của AG và MN.

Gọi H là trung điểm của BG.

Theo tính chất của trọng tâm ta có BH = HG = GN.

Xét $\Delta ABG$ có MH là đường trung bình $\Rightarrow$ MH // AG.

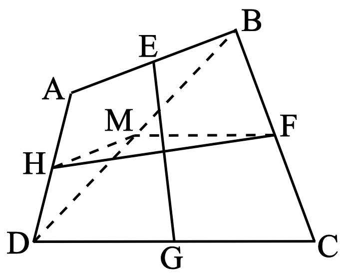
Xét $\Delta HMN$ có AG // MH và NG = GH nên ON = OM.

Vậy AG chia đôi MN.

Nhận xét: Vẽ thêm trung điểm của một đoạn thẳng là cách vẽ hình phụ thường dùng để vận dụng định lí đường trung bình của tam giác.

Bài 10: Cho tứ giác ABCD có chu vi là 4a. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. C/minh rằng trong hai đoạn thẳng EG và HF có một đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn a.

HD:




Tìm cách giải

Để chứng minh một trong hai đoạn thẳng EG và HF có độ dài không lớn hơn a, ta chứng minh tổng của hai đoạn này không lớn hơn 2a. Khi đó một trong hai đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn a.

Trình bày lời giải

Gọi M là trung điểm của BD.

Xét $\Delta ABD$ có HM là đường trung bình nên $HM = \frac{AB}{2}$.

Xét $\Delta BDC$ có MF là đường trung bình nên $MF = \frac{CD}{2}$.

Xét ba điểm M, H, F có $HF \le MH + MF = \frac{AB + CD}{2}$.

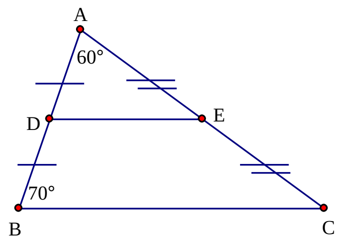
Chứng minh tương tự ta được $EG \le \frac{AD+BC}{2}$.

Vậy $HF+EG \le \frac{AB+CD+AD+BC}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$.

Suy ra một trong hai đoạn thẳng HF, EG có độ dài không lớn hơn a.

Nhận xét: Phương pháp vẽ hình phụ trong ví dụ này vẫn là vẽ trung điểm của đoạn thẳng BD. Cũng có thể vẽ trung điểm của đoạn thẳng AC thay cho trung điểm của đoạn thẳng BD.

Bài 11: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^0, \hat{B} = 70^0$. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Xác định dạng của tứ giác BDEC và tính các góc của tứ giác đó.




HD:

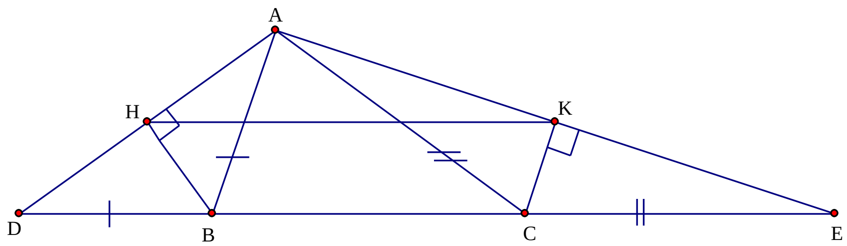
Ta có ED là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow DE // BC \Rightarrow \lozenge BDEC$ là hình thang

$\hat{C} = 50^0 \Rightarrow \hat{D} = 110^0; \hat{E} = 130^0$.

Bài 12: Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = BA. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CE = CA. Kẻ $BH \perp AD, CK \perp AE$. Chứng minh rằng

a). AH =HD

b). HK // BC




HD:

a). Ta có $\Delta ABH = \Delta DBH \Rightarrow AH = HD; \Delta ACK = \Delta ECK \Rightarrow AK = KE$

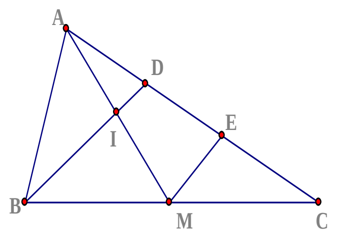
b). Xét $\Delta ADE$, có $AH = HD; AK = KE \Rightarrow HK // DE \Rightarrow HK // BC$

Bài 13: Cho tam giác ABC, kẻ trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm D, E sao cho AD = DE = EC

a). Chứng minh rằng: ME // BD

b). Gọi I là giao điểm của AM, BD. Chứng minh AI = IM

c). Chứng minh $ID = \frac{1}{4}BD$



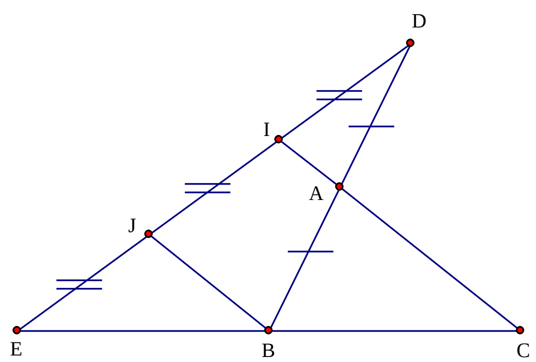

HD:

a). Ta có ME là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow ME // BD$

b). Xét $\Delta AME$ có : D là trung điểm của AE, ID // ME $\Rightarrow IA = IM$

c) $DI = \frac{1}{2}EM; EM = \frac{1}{2}DB \Rightarrow DI = \frac{1}{4}BD$

Bài 14: Cho tam giác ABC, A là trung điểm của BD, B là trung điểm của EC. AC và DE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $DI = \frac{DE}{3}$



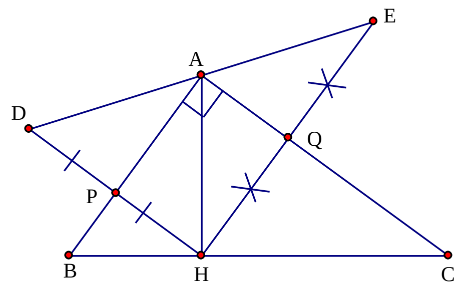

HD:

Qua B kẻ đường thẳng BJ // CI cắt ED tại J

$$\Rightarrow \begin{cases} EJ = JI \\ JI = ID \end{cases} \Rightarrow DI = \frac{DE}{3} (dpcm)$$

Bài 15: Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH, từ H kẻ Hx vuông góc AB tại P. Trên Hx lấy điểm D sao cho P là trung điểm của HD. Từ H kẻ Hy vuông góc AC tại Q và trên Hy lấy E sao cho Q là trung điểm của HE

a). Chứng minh A, D, E thẳng hàng        b). PQ // DE        c). PQ = AH




HD:

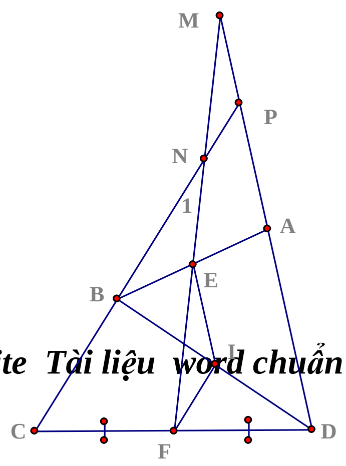
a). $\Delta ADP = \Delta AHP (cgc) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_3$ ,

Tương tự ta có $\hat{A}_2 = \hat{A}_4 \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 180^0 \Rightarrow A, D, E$ thẳng hàng (đpcm)

b) Ta có PQ là đường trung bình của $\Delta HDE \Rightarrow PQ // ED$

c) $PQ = \frac{1}{2} DE = \frac{DA + AE}{2} = \frac{2AH}{2} = AH$

Bài 16: Cho tứ giác ABCD có $\hat{C} = 40^0, \hat{D} = 80^0, AD = BC$ . E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. Tính góc nhọn tạo bởi các đường thẳng AD và BC , AD và EF



HD:

Ta có $\hat{D} = 180^0 - 40^0 - 80^0 = 60^0$

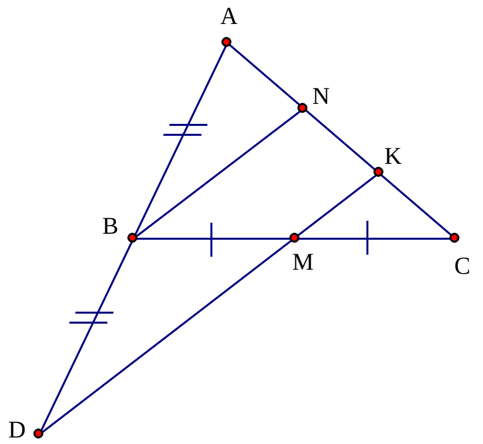
Gọi I là trung điểm của BD $\Rightarrow \begin{cases} EI // BC \Rightarrow \hat{E} = \hat{M} (dv) \\ \text{IF//BC} \Rightarrow \hat{F} = \hat{N} (slt) \end{cases}$

Lại có $\hat{N}_1 = \hat{N}_2 (\text{dd})$

Có: $IE = \text{IF} = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2} AD \Rightarrow \hat{E} = \hat{F} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{M}$

Mà: $\hat{N}_1 + \hat{M} = 60^0$ ( góc ngoài của tam giác ) $\Rightarrow \hat{M} = 30^0$

Bài 17: Cho tam giác ABC. Điểm D thuộc tia đối của tia BA sao cho BD = BA, M là trung điểm của BC. Gọi K là giao điểm của DM và AC, Chứng minh rằng AK = 2KC




HD:

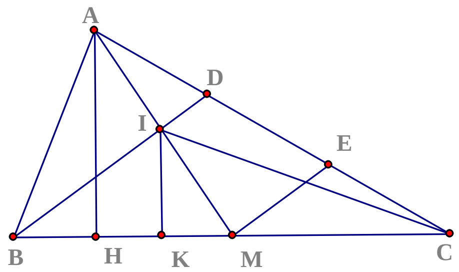
Kẻ BN // DM ( N thuộc AC )

Xét $\Delta ADK$, có: AB = DB, BN // DK $\Rightarrow BN$ là đường trung bình của $\Delta ADK \Rightarrow AN = NK \Leftrightarrow AK = 2NK(1)$

Lại có MK là đường trung bình của $\Delta BNC \Rightarrow NK = KC(2) \Rightarrow AK = 2KC(dpcm)$

Bài 18: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến ứng với BC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = \frac{1}{2}DC$. Kẻ Mx // BD và cắt AC tại E. Đoạn BD cắt AM tại I. Chứng minh rằng

a). AD = DE = EC b). $S_{AIB} = S_{IBM}$ c). $S_{ABC} = 2S_{IBC}$




HD:

a)Xét $\Delta BDC$ có ME // BD, M là trung điểm của BC $E$ là trung điểm của DC

$\Rightarrow DE = EC = \frac{1}{2}DC \Rightarrow AD = DE = EC$

b). Ta có D là trung điểm của AE

$\Rightarrow ID$ là đường trung bình của $\Delta AME \Rightarrow IA = IM \Rightarrow S_{AIB} = S_{IBM}$

c). Hạ đường cao AH và IK của $\Delta ABC, \Delta IBC$

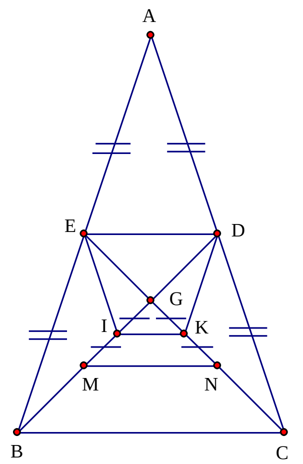
IK là đường trung bình của $\Delta AHM \Rightarrow IK = \frac{1}{2}AH$

Xét $\Delta ABC$ và $\Delta IBC$ có chung đáy BC và hai đường cao AH = 2 IK ( đpcm)

Bài 19: Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BG và CG, I và K là trung điểm của GM và GN a). Chứng minh BD = CE

b). Chứng minh tứ giác IEDK là hình thang cân

c). Tính DE + IK, biết BC = 10cm




HD:

a). $\Delta ABD = \Delta ACE(cgc) \Rightarrow BD = CE$

b). Có : $IK // ED // MN // BC \Rightarrow \lozenge IEDK$ là hình thang

Ta đi chứng minh DI = EK

$$DI = DG + GI = DG + \frac{1}{2}GM = GM(= MB) + \frac{1}{2}GM = \frac{3}{2}GM = \frac{3}{2}.\frac{1}{3}DB = \frac{1}{2}DB$$

$$EK = EG + GK = EG + \frac{1}{2}GN = GN + \frac{1}{2}GN = \frac{3}{2}GN = \frac{3}{2}.\frac{1}{3}EC = \frac{1}{2}EC$$

Ta lại có: $BD = EC \Rightarrow DI = EK \Rightarrow \lozenge IEDK$ là hình thang cân.

c). $DE + IK = 7,5cm$

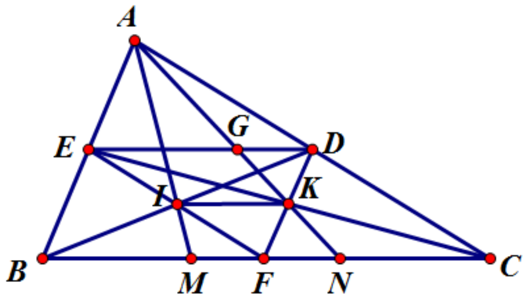
Bài 20:. Cho tam giác ABC có các trung tuyến BD và CE. Trên cạnh BC lấy các điểm M, N sao cho BM = MN = NC. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Chứng minh:

a) BCDE là hình thang

b) K là trung điểm của EC

c) BC = 4IK

HD:




a) Ta có DE là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow$DE // BC $\Rightarrow$ BCDE là hình thang.

b) Gọi G là giao điểm AN và DE.

Ta có E là trung điểm AB và ED // BN

$\Rightarrow$G là trung điểm AN

$\Rightarrow$ EG là đường trung bình của $\Delta$ABN

$\Rightarrow$EG = $\frac{1}{2}$BN = $\frac{1}{3}$BC

Ta lại có ED = $\frac{1}{2}$BC $\Rightarrow$EG = $\frac{2}{3}$ED $\Rightarrow$G là trọng tâm $\Delta$ACE

$\Rightarrow$AK là trung tuyến của $\Delta$ACE $\Rightarrow$ K là trung điểm EC

c) Chứng minh tương tự ta có I là trung điểm EF.

Gọi F là trung điểm BC, ta có DF // AB và DK // AB $\Rightarrow$D, K, F thẳng hàng.

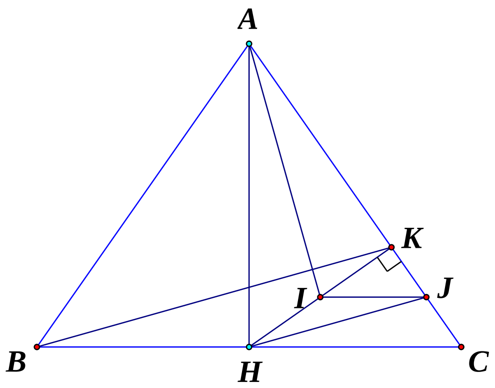
$DK = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}DF$, suy ra K là trung điểm của DF.

Suy ra IK là đường trung bình của $\Delta$DEF $\Rightarrow$IK = $\frac{1}{2}$DE.

Mà DE = $\frac{1}{2}$BC $\Rightarrow$IK = $\frac{1}{4}$BC hay BC = 4IK.

Bài 21: Cho tam giac ABC cân tại A, đường cao AH. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AC. Gọi I là trung điểm HK. Chứng minh rằng: BK $\perp$ AI.

HD:




Gọi J là trung điểm của KC, ta có IJ là đường trung bình trong tam giác KHC.

Do đó IJ // HC $\Rightarrow$ IJ $\perp$ AH.

Trong tam giác AHJ có IJ $\perp$ AH, HI $\perp$ AJ. Từ đó, I là trực tâm tam giác AHJ.

$\Rightarrow AI \perp HJ$ (1).

Trong tam giác BKC, HJ là đường trung bình, suy ra HJ // BK (2).

(1) và (2) suy ra $AI \perp BK$.

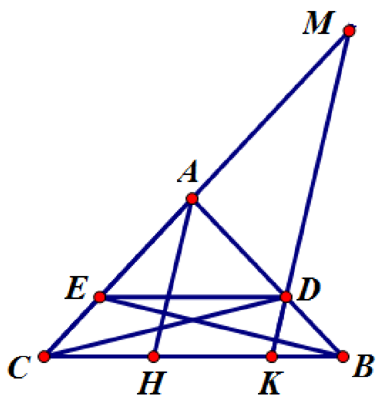
Bài 22:. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên các cạnh góc vuông AB, AC lấy điểm D và E sao cho AD = AE. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BE, cắt BC ở K. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với BE, cắt BC ở H. Gọi M là giao điểm DK với AC. Chứng minh rằng:

a) $\Delta BAE = \Delta CAD$

b) MDC là tam giác cân

c) KH = HC

HD:



a) Xét $\Delta BAE$ và $\Delta CAD$ có:

$BAE = CAD$ (góc chung)

$AE = AD$ (giả thiết)

$BA = CA$ (vì $\Delta ABC$ vuông cân tại A)

Do đó: $\Delta BAE = \Delta CAD$ ( c – g – c)

b) Vì $\Delta BAE = \Delta CAD$ nên $AEB = ADC$

Ta có $DK \perp BE \Rightarrow BDK + DBE = 90^o$

hay $BDK + ABE = 90^o$

Ta lại có $AEB + ABE = 90^0$.

Suy ra $BDK = AEB = ADC$

Mặt khác $BDK = ADM$ (2 góc đối đỉnh). Do đó $ADM = ADC \Rightarrow$ DA là phân giác $CDM$

Tam giác MDC có DA vừa là phân giác vừa là đường cao $\Rightarrow$ Tam giác MDC cân tại D.

c) Tam giác MDC cân tại D có DA là phân giác nên DA cũng là trung tuyến tam giác này

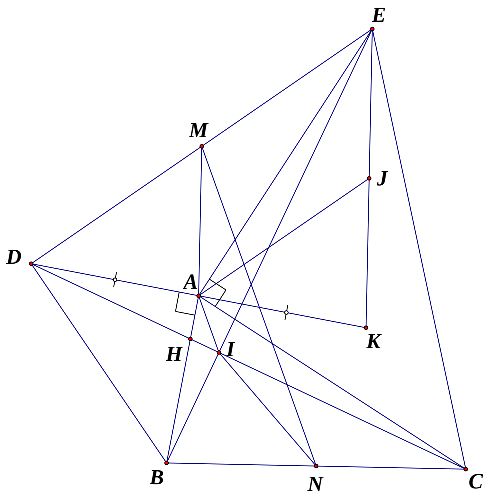
$\Rightarrow$ A là trung điểm MC

Tam giác MCK có A là trung điểm MC và AH // MK (cùng vuông góc BE) $\Rightarrow$ AH là đường trung bình của tam giác MCK $\Rightarrow$ H là trung điểm CK

Vậy KH = HC.

Bài 23: . Cho $\Delta$ABC nhọn (AB < AC). Bên ngoài $\Delta$ABC vẽ $\Delta$BAD vuông cân ở A, $\Delta$ACE vuông cân ở A; BE cắt CD tại I. gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, BD. Chứng minh tứ giác AINM là hình thang cân.

HD:




Chứng minh BE$\perp$CD:

Xét hai tam giác: ABE và ADC, có:

AB = AD (vì $\Delta$ABD vuông cân tại A).

$\mathrm{BAE} = \mathrm{DAC}$ (cùng bằng $90^0 +$ BAC)

AE = AC (vì $\Delta$ACE vuông cân tại A)

Do vậy $\Delta\mathrm{ABE} = \Delta\mathrm{ADC} \Rightarrow \mathrm{ABI} = \mathrm{ADI}$.

AB cắt DI tại H, ta có: $\mathrm{AHD} + \mathrm{ADH} = 90^0$; $\mathrm{AHD} = \mathrm{BHI}$; $\mathrm{ADH} = \mathrm{HBI}$

Suy ra $\mathrm{BHI} + \mathrm{HBI} = 90^0$. Vậy BE$\perp$CD tại I.

Chứng minh AM = IN và AN = IM:

Gọi K là điểm đối xứng của D qua A. Xét hai tam giác: $\Delta$ABC và $\Delta$AKE.

AB = AK (cùng bằng AD); $\mathrm{BAC} = \mathrm{KAE}$ (cùng phụ với CAK); AC = AE.

Do đó $\Delta$ABC = $\Delta$AKE. Suy ra EK = BC.

Trong tam giác DKE, AM là đường trung bình nên AM = $\frac{1}{2}$KE.

Trong tam giác IBC vuông tại I, IN là trung tuyến nên IN = $\frac{1}{2}$BC.

Từ đó cho ta AM = IN.

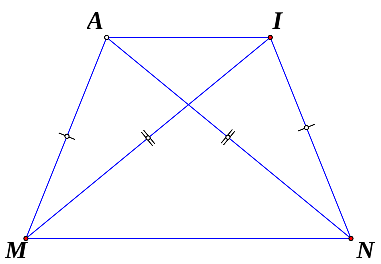
Gọi J là trung điểm của KE, vì hai tam giác ABC và AKE bằng nhau nên hai trung tuyến tương ứng bằng nhau. Ta có AN = AJ.

AI là đường trung bình trong tam giác DEK, ta có AJ = $\frac{1}{2}$DE.

IM là trung tuyến trong tam giác IDE vuông tại I nên IM = $\frac{1}{2}$DE.

Do đó: AJ = IM.

Xét tứ giác AMNI có AM = IN và AN = IM, ta chứng minh AMNI là hình thang cân.




$\Delta$ AMI = $\Delta$ INA (c-c-c)$\Rightarrow IAM = AIN$ (1).

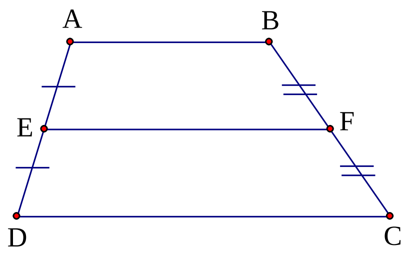
$\Delta$ AMN = $\Delta$ INM (c-c-c)$\Rightarrow AMN = INM$(2).

Từ (1) và (2) dễ dàng suy ra AMNI là hình thang cân với hai đáy AI, MN.

**BÀI 4: PHẦN II: ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG**

**I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Định nghĩa:** Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang




**2. Các định lý**

**Định lý 1:** Đường thẳng đi qua trung điểm 1 cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai

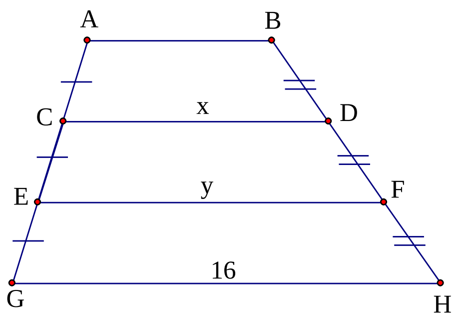
Tức là: Nếu EA = ED và EF // AB // CD thì FB = FC

**Định lý 2:** Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy

Tức là: EF // AB // CD và $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

## II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1:Tính x, y trên hình vẽ




HD:

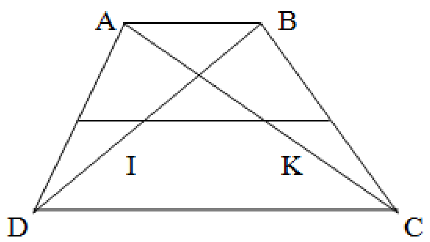
Áp dụng tính chất đường trung bình trong hình thang ta được:

x = 12cm, y = 20cm

Vậy CD = 12cm, GH = 20cm

Bài 2: Cho hình thang ABCD (AB // CD). M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của MN và BD, MN và AC. Cho biết AB = 6cm, AD = 14cm. Tính các độ dài MI, IK, KN.

HD:




Vì MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên MN // AB // DC

Xét $\Delta ADC$ có AM = MD, MK // DC

$\Rightarrow$ KA = KC

Do đó: MK = $\frac{DC}{2}=\frac{14}{2}=7cm$

Tương tự: $\Delta ABD$ có AM = MD, MI // AB nên BI = ID

Do đó: MI = $\frac{1}{2}AB=\frac{6}{2}=3cm$

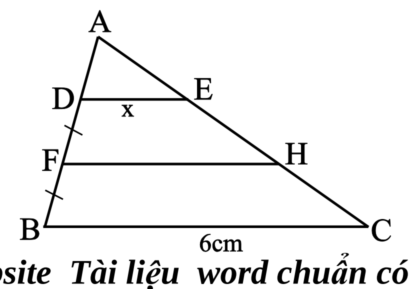
Từ đó ta có: IK = MK - MI = 7 - 3 = 4cm

Xét $\Delta ABC$ có BN = NC, NK // AB

$\Rightarrow$ AK = KC Vậy KN = $\frac{1}{2}AB=\frac{6}{2}=3cm$

Bài 3: Cho tam giác ABC, BC = 6cm. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD=\frac{1}{3}AB.$ Vẽ DE // BC (E $\in$ AC). Tính độ dài DE.

HD:



Tìm cách giải

Vì $AD = \frac{1}{2}DB$ nên ta vẽ trung điểm F của DB.

Từ F vẽ một đường thẳng song song với BC thì DE chính là đường trung bình của một tam giác. Từ đó sẽ tính được độ dài của nó.

Trình bày lời giải

Gọi F là trung điểm của DB. Khi đó AD = DF = FB.

Vẽ FH // BC (H $\in$ AC).

Xét $\Delta$AFH có DE // FH và AD = DF nên AE = EH.

Xét hình thang DECB có FH // BC và DF = FB nên EH = HC.

Ta đặt DE = x.

Ta có DE là đường trung bình của $\Delta$AFH $\Rightarrow DE = \frac{1}{2}FH \Rightarrow$ FH = 2x.

Ta có FH là đường trung bình của hình thang DECB

$$\Rightarrow FH = \frac{DE + BC}{2} \Rightarrow 2x = \frac{x+6}{2} \Rightarrow x = 2\ (cm).$$

Vậy DE = 2cm.

Nhận xét: Phương pháp vẽ hình phụ trong ví dụ này là ngoài việc vẽ trung điểm của một đoạn thẳng ta còn thêm đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.

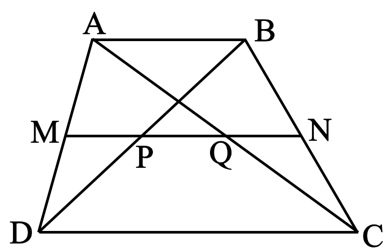
Bài 4: Cho hình thang ABCD, AB là đáy nhỏ. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD và AC.

a)Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng;

b)Chứng minh PQ // CD và $PQ = \frac{CD - AB}{2}$;

c)Hình thang ABCD phải có điều kiện gì để MP = PQ = QN.

HD:



Tìm cách giải

Trong hình vẽ có nhiều đường thẳng cùng đi qua một điểm và cùng song song với một đường thẳng nên có thể vận dụng tiên đề Ơ-clit để chứng minh thẳng hàng.

Trình bày lời giải

a)Xét $\Delta ABD$ có MP là đường trung bình

$\Rightarrow$ MP // AB $\Rightarrow$ MP // CD.

Xét $\Delta ADC$ có MQ là đường trung bình

$\Rightarrow$ MQ // CD.

Xét hình thang ABCD có MN là đường trung bình $\Rightarrow$ MN // CD.

Qua điểm M có các đường thẳng MP, MQ, MN cùng song song với CD nên các đường thẳng này trùng nhau, suy ra bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b)Ta có MN // CD nên PQ // CD; $PQ = MQ - MP = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$.

c)Ta có $MP = NQ = \frac{AB}{2}$.

MP = PQ $\Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$

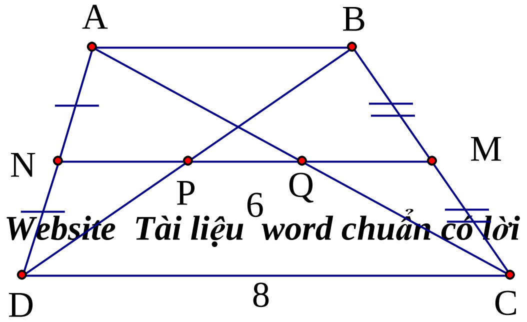
$\Leftrightarrow$ AB = CD – AB $\Leftrightarrow$ 2AB = CD (đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ).

Nhận xét: Đường trung bình MN của hình thang và đoạn thẳng PQ nối trung điểm hai đường chéo có tính chất giống nhau là cùng song song với hai đáy, có tính chất khác nhau là MN bằng nửa tổng hai đáy còn PQ bằng nửa hiệu hai đáy.

Bài 5: Cho hình thang ABCD (AB // CD). M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC. Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm của MN với BD và AC. Cho CD = 8cm, MN = 6cm

a. Tính AB

b. Tính MP, PQ, QN



HD:

a. Xét hình thang ABCD có: M là trung điểm AD, N là trung điểm của BC

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của hình thang ABCD

$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AB + CD) \Rightarrow AB = 2MN - CD = 4cm$

b. Ta có: $MP = \frac{1}{2}AB = 2cm, NQ = \frac{1}{2}AB = 2cm \Rightarrow PQ = 6cm$

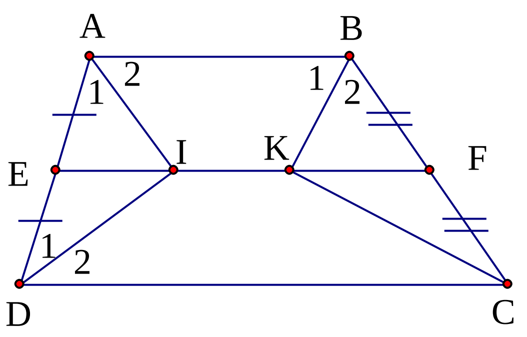
Bài 6: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Phân giác của góc A và B cắt EF theo thứ tự tại I và K

a) Chứng minh $\Delta AIE, \Delta BKF$ là các tam giác cân

b). Chứng minh $\Delta AID, \Delta BKC$ là các tam giác vuông

c). $IE = \frac{1}{2}AD, KF = \frac{1}{2}BC$

d). Cho AB = 5cm, CD = 13cm, AD = 6cm, BC = 7cm. Tính IK




HD:

a). Ta có $\hat{A}_1 = \hat{I}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \Delta AEI$ cân tại E, tương tự $\Delta BKF$ cân tại F

b). $\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0 \Rightarrow \Delta AID$ vuông tại I , tương tự $\Delta BKC$ vuông tại K

c). Ta có $\Delta AID$ vuông tại I, E là trung điểm của AD $\Rightarrow EI = \frac{1}{2}AD$

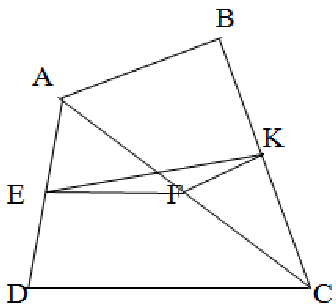
d). EF = 9 = EI + IK + KF $\Leftrightarrow$ 9$= \frac{1}{2}AD + IK + \frac{1}{2}BC \Rightarrow IK = 2,5cm$

Bài 7: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, I theo thứ thù là trung điểm của AD, BC, AC. CMR

a)EI // CD, IF // AB

b) EF < $\frac{AB+CD}{2}$

HD:




a) Xét $\Delta ADC$ có: AE = ED

AI = IC nên EI // DC, EI = $\frac{1}{2}DC$

Tương tự $\Delta ABC$ có: AI = IC, BF = FC

Nên IF // AB, IF = $\frac{1}{2}$AB

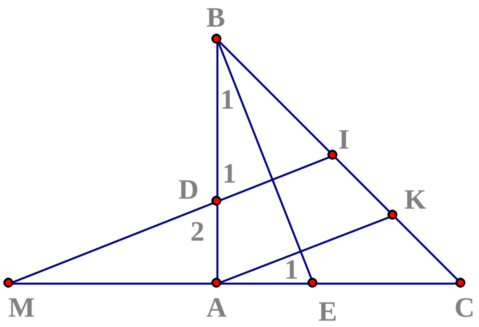
b). Trong $\Delta EFI$ ta có: EF $\le$ EI + IF

$\Rightarrow$ EF $\le$ $\frac{CD}{2} + \frac{AB}{2}$

Vậy EF $\le \frac{AB+CD}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi E, I, F thẳng hàng, tức AB // DC

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho AD = AE. Qua D kẻ các đường thẳng vuông góc với BE, BC theo thứ tự tại I và K. Chứng minh rằng IK = KC theo hai cách

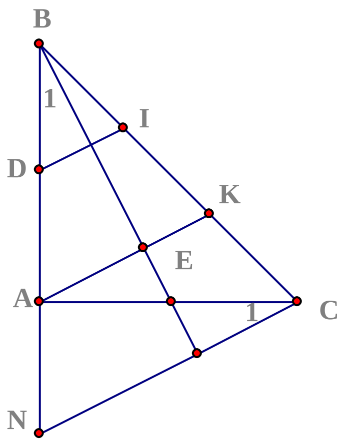



HD:

a). Cách 1: Gọi M là giao điểm của ID và CA rồi chứng minh AM = MC

b). Cách 2:Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BA tại N rồi chứng minh AD = AN

Lời giải




a). Cách 1 dùng đường trung bình của tam giác

$$IK = KC \Leftarrow MA = AC \Leftarrow MA = AB \Leftarrow \Delta MAD = \Delta BAE(\hat{E}_1 = \hat{D}_2)$$

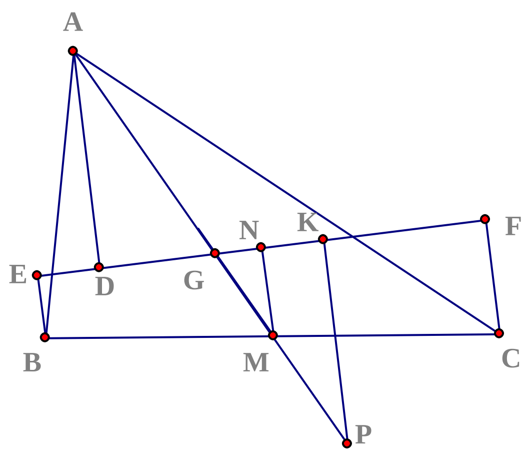
Xét $\Delta MIC, có$: AM = AC , AK // MI ( $\perp$ BE ) $\Rightarrow dpcm$

b). Cách 2: Dùng đường trung bình của hình thang

$$IK = KC \Leftarrow AD = AN = AE \Leftarrow \Delta ABE = \Delta ACN(\hat{B}_1 = \hat{C}_1)$$

Xét hình thang NDIC, có: $\begin{cases} AD = AN \\ AK \,//\, DI \,//\, NC \perp BC \end{cases} \Rightarrow IK = KC(dpcm)$

Bài 9: Cho tam giác ABC và đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác và cắt đoạn AB, AC. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ B và C tới d bằng khoảng cách từ A tới d




HD:

Ta có tứ giác BEFC là hình thang ( BE // CF)

Gọi N là trung điểm của EF, M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow MN = \frac{BE + CF}{2} \Rightarrow BE + CF = 2MN(1); MN \perp d$$

Lấy P thuộc tai đối của tia MG sao cho MP = MG

$$\Rightarrow GP = GA$$

Lấy K thuộc d sao cho NG = NK

$$\Rightarrow \begin{cases} MN = \frac{1}{2}PK \\ PK \perp d \end{cases} \Rightarrow \Delta ADG = \Delta PKG(ch - gn) \Rightarrow PK = AD \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AD(2)$$

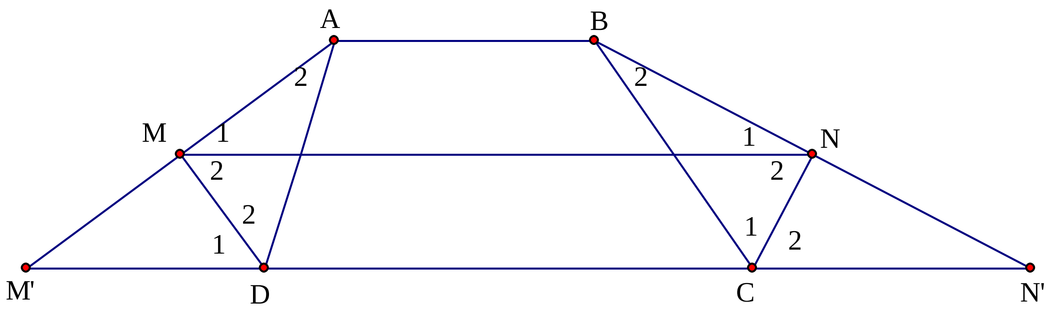
Từ (1)(2) $\Rightarrow AD = BE + CF$

Bài 10: Cho hình thang ABCD, các đường phân giác của các góc ngoài tại đỉnh A và D cắt nhau ở M. Các đường phân giác của các góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở N

a). Chứng minh rằng MN // CD

b). Tính chu vi hình thang ABCD, biết MN = 4cm

c). MN có độ dài bằng nửa chu vi hình thang ABCD




HD:

a). Gọi M’ và N’ lần lượt là giao điểm của AM, BN với DC

Ta có: $\hat{D}_2+\hat{A}_2=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{D})=90^0 \Rightarrow A\hat{M}D=90^0$

$\Rightarrow \Delta AMD$ vuông tại M $\Rightarrow DM$ là đường cao, đường phân giác

$\Rightarrow \Delta ADM', \Delta BCN'$ cân tại D và C

$\Rightarrow M, N$ là trung điểm của AM’ và BN’ $\Rightarrow MN // CD$

b). Chu vi hình thang ABCD là:

$$AB+BC+CD+DA=AB+M'D+DC+CN'=AB+M'N'=2MN=8(cm)$$

c). Từ ý a ta có: $MN=\frac{1}{2}\left(AB+M'N'\right)$

mà: $M'N'=M'D+BC+CN'=AD+DC+BC\left(\Delta ADM';\Delta BCN:can\right)$

$\Rightarrow MN=\frac{1}{2}\left(AB+BC+CD+DA\right)$

Bài 11: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC, BD.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q nằm trên một đường thẳng.

b) Tính MN, PQ, biết các cạnh đáy của hình thang AB=a; CD=b (b>a).

c) Chứng minh rằng nếu MQ = PQ = PN thì b=2a..

HD:

a) MN là đường trung bình của hình thang nên MN//DC (1)

MQ là đường trung bình của tam giác DAB nên MQ//AB (2)

PN là đường trung bình của tam giác CAB nên PN//AB (3)

Từ (1)(2)(3) suy ra M,N,P,Q nằm trên một đường thẳng

b) MN= (a+b):2

MQ=PN=AB:2=a:2 nên PQ=MN-(MQ+PN)= (b-a):2

c) Ta có: PQ= (b-a):2 ; NP=MQ= a:2

Để PQ=NP thì (b-a):2=a:2 hay b-a=a ⇔ b=2a.

Bài 12: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng.

HD:

EK là đường trung bình tam giác ADB nên EK//AB.

Tương tự: KF//DC mà AB//DC nên E,K,F thẳng hàng.

Bài 13: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đường thẳng EF cắt BD ở I, cắt AC ở K.

a) Chứng minh: AK = KC, BI = ID.

b) Cho AB = 6, CD = 10. Tính EI, KF, IK.

HD:

a)EF là đường trung bình của hình thang nên EF//DC hay EK//DC

Mà E là trung điểm AD nên K là trung điểm AC => AK=KC.

Chứng minh tương tự: BI=ID

b) EF=(AB+CD):2=8cm,

EI là đường trung bình của $\Delta$ADB nên EI=AB:2=3cm,

Tương tự FK=AB:2=3cm nên IK=2cm.

Bài 14: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng EK và CD, KF và AB. Chứng minh: $EF \le \frac{AB+CD}{2}$.

b) Khi $EF=\frac{AB+CD}{2}$ thì tứ giác ABCD là hình gì.

HD:

a) EF $\le$ EK+KF mà EK=DC:2; KF=AB:2 ( tính chất đường trung bình) nên $EF \le \frac{AB+CD}{2}$.

b) Nếu $EF=\frac{AB+CD}{2}$ thì EF = EK+KF hay E, F, K thẳng hàng.

Mà FK//AB , EK//DC nên AB//CD hay ABCD là hình thang.

Bài 15: Tính độ dài đường trung bình của một hình thang cân biết rằng các đường chéo của nó vuông góc với nhau và bằng 20cm, đường cao bằng 10 cm.

HD:

Gọi EF là đường trung bình của hình thang ABCD, AH là đường cao:

Ta có: $S_{ABCD}=\frac{(AB+CD).AH}{2}EF.AH$

Mà $S_{ABCD}=\frac{AC.BD}{2}$ nên $\frac{AC.BD}{2}$=EF.AH

Suy ra: EF=20cm.

Bài 16: Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng d đi qua G cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A’, B’. C’ thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên d. Tìm liên hệ giữa các độ dài AA’, BB’, CC’.

HD:

Gọi M là trung điểm BC.

Kẻ MM’ vuông góc với B’C’,

Suy ra 2MM’=(BB’+CC’) ( tính chất đường trung bình của hình thang)

Mà 2MM’=AA’ nên AA’=BB’+CC’.

Bài 17: Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng d nằm ngoài tam giác ABC. Gọi A’, B’. C’, G’ thứ tự là hình chiếu của A, B, C, G trên d. Tìm liên hệ giữa các độ dài AA’, BB’, CC’ , GG’.

HD:

Gọi M là trung điểm BC, E là trung điểm AG,

Kẻ MM’ và EE’ vuông góc B’C’.

Ta có: 2EE’=AA’+GG’; 2GG’=MM’+EE’;

Nên 2MM’ +(AA’+GG’)=4GG’ hay 2MM’+AA’=3GG’

Suy ra AA’+BB’+CC’=3GG’.

Bài 18: Cho hình thang ABCD có $A = D = 90^o$ và AB = 2AD = 2CD. Kẻ CH vuông góc với AB tại H.

a) Tính số đo các góc của hình thang ABCD.

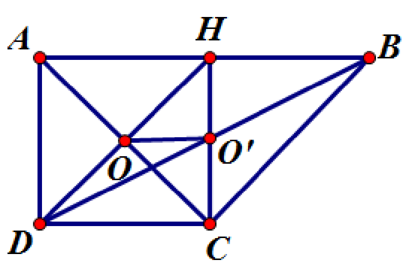
b) CMR tam giác ABC vuông cân.

c) Tính chu vi hình thang nếu AB = 6cm.

d) Gọi O là giao điểm AC và DH, O’ là giao điểm của DB và CH.

Chứng minh rằng AB = 4OO’

HD:



a) Ta có tứ giác ADCH $A = D = H = C = 90^o$ và AH // CD, AD // CH

AHCD là hình thang cân hai đáy AH, CD

$\Rightarrow$ AD = CH.

AHCD cũng là hình thang cân với hai đáy AD, HC

$\Rightarrow$ AH = CD .

BH = AB – AH = 2CD – CD = CD và CH = AD = BH

Do đó $\Delta$BCH vuông cân tại H, suy ra $B = 45^o$, $BCH = 45^o$

$C = BCH + DCH = 45^o + 90^o = 135^o$

Vậy $A = D = 90^o$, $B = 45^o$, $C = 135^o$

b) $\Delta$ABC có H là trung điểm AB và CH $\perp$ AB nên ABC là tam giác cân tại C

Ta lại có $B = 45^o$, suy ra $\Delta$ABC vuông cân tại C.

c) Ta có AB = 6cm

AD = CD = $\frac{1}{2}$AB = 3cm.

$\Delta$ABC vuông cân tại C nên BC = $\frac{1}{\sqrt{2}}$AB = $\frac{6}{\sqrt{2}}$ = $3\sqrt{2}$ cm

Chu vi hình thang ABCD là: AB + BC + CD + DA = 6 + $3\sqrt{2}$ + 3 + 3 = 12 + $3\sqrt{2}\,(cm)$

d) Dễ thấy $ACD = 45^0 \Rightarrow HDC = 45^0 \Rightarrow$ DH // BC $\Rightarrow$ DH $\perp$ AC.

Vì $\Delta$ACD vuông cân tại D nên O là trung điểm của AC.

Ta có $\Delta DO'C = \Delta BO'H$ (g-c-g) $\Rightarrow$ O’C = O’H, hay O’ là trung điểm của CH.

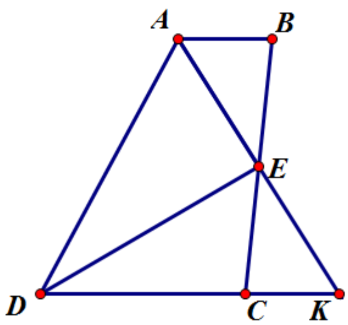
Xét $\Delta$AHC có OO’ là đường trung bình nên AH = 2OO’

Mà AB = 2AH nên AB = 4OO’.

Bài 19: Cho hình thang ABCD (AB//CD) có E là trung điểm của BC, $\widehat{AED}=90^o$. Gọi K là giao điểm của AE và DC. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABE = \Delta KCE$

b) DE là tia phân giác của góc D.




HD:

a) Xét $\Delta ABE$ và $\Delta KCE$ có:

$\widehat{ABE}=\widehat{KCE}$ (2 góc sole trong)

$\widehat{AEB}=\widehat{KEC}$ (2 góc đối đỉnh)

BE = CE (E là trung điểm BC)

Do đó $\Delta ABE = \Delta KCE$ (g – c – g)

b) Vì $\Delta ABE = \Delta KCE$ nên AE = KE $\Rightarrow$E là trung điểm AK $\Rightarrow$DE là trung tuyến của tam giác ADK

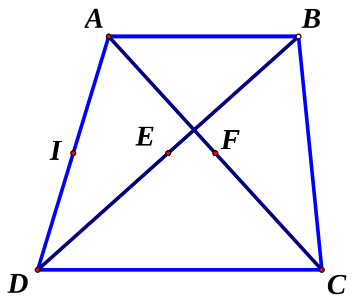
Ta lại có DE $\perp$AK suy ra DE là đường cao của $\Delta$ADK.

Do đó tam giác ADK cân tại D và DE là phân giác góc D.

Bài 20: Cho tứ giác ABCD trong đó CD > AB. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BD và AC.

Chứng minh rằng nếu ABCD là hình thang thì $EF = \dfrac{CD - AB}{2}$.

HD:




Gọi I là trung điểm AD.

Ta có EI // AB và EI = $\frac{1}{2}$AB

FI // CD và FI = $\frac{1}{2}$CD.

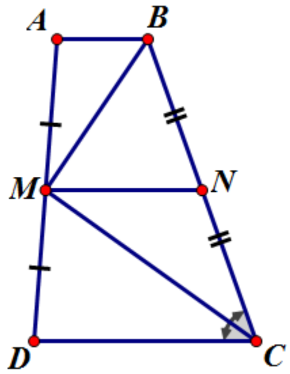
Qua điểm I ta có EI // AB và FI // CD // AB nên I, E, F thẳng hàng.

Suy ra $EF = FI - EI = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD$ hay $EF = \dfrac{CD - AB}{2}$

Bài 21: Cho hình thang ABCD (AB//CD), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm M của cạnh bên AD. Chứng minh rằng:

a) $BMC = 90^{o}$ b) BC = AB + CD

HD:



a) Gọi N là trung điểm BC.

Ta có MN // CD $\Rightarrow$ MCD = CMN

Mà MCD = MCN (vì CM là phân giác D )

Suy ra $CMN = MCN = \frac{1}{2}DCB$

Tam giác MCN cân tại N $\Rightarrow$ MN = NC = NB, do đó $\Delta$ MNB cân tại N $\Rightarrow$ NMB = NBM.

Mặt khác NMB = MBA, suy ra $NMB = \frac{1}{2}ABC$

$BMC = CMN + NMB = \frac{1}{2}(BCD + ABC) = 90^{o}$.

b) Vì MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên MN = $\frac{1}{2}$ (AB + CD)

Ta lại có MN = $\frac{1}{2}$BC. Do đó BC = AB + CD

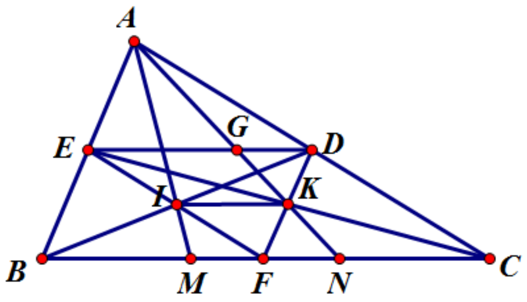
Bài 22: Cho tam giác ABC có các trung tuyến BD và CE. Trên cạnh BC lấy các điểm M, N sao cho BM = MN = NC. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Chứng minh rằng:

a) BCDE là hình thang

b) K là trung điểm của EC

c) BC = 4IK

HD:



a) Ta có DE là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow$ DE // BC $\Rightarrow$ BCDE là hình thang.

b) Gọi G là giao điểm AN và DE.

Ta có E là trung điểm AB và ED // BN

$\Rightarrow$ G là trung điểm AN

$\Rightarrow$ EG là đường trung bình của $\Delta$ABN

$\Rightarrow \text{EG} = \frac{1}{2}\text{BN} = \frac{1}{3}\text{BC}$

Ta lại có $\text{ED} = \frac{1}{2}\text{BC} \Rightarrow \text{EG} = \frac{2}{3}\text{ED} \Rightarrow$ G là trọng tâm $\Delta$ACE

$\Rightarrow$ AK là trung tuyến của $\Delta$ACE $\Rightarrow$ K là trung điểm EC

c) Chứng minh tương tự ta có I là trung điểm EF.

Gọi F là trung điểm BC, ta có DF // AB và DK // AB $\Rightarrow$ D, K, F thẳng hàng.

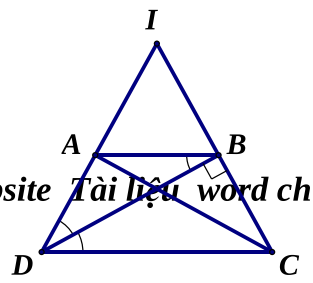
$\text{DK} = \frac{1}{2}\text{AE} = \frac{1}{4}\text{AB} = \frac{1}{2}\text{DF}$, suy ra K là trung điểm của DF.

Suy ra IK là đường trung bình của $\Delta$DEF $\Rightarrow \text{IK} = \frac{1}{2}\text{DE}$.

Mà $\text{DE} = \frac{1}{2}\text{BC} \Rightarrow \text{IK} = \frac{1}{4}\text{BC}$ hay BC = 4IK.

Bài 23: Cho hình thang cân ABCD có $\widehat{D} = 60^o$, DB là phân giác của $\widehat{D}$. Biết chu vi hình thang bằng 20cm. Tính độ dài các cạnh hình thang.

HD:



Vì ABCD là hình thang cân nên $C = D = 60^0$ và $A = B = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Ta có $ADB = CDB$ (vì DB là phân giác $D$)

Mà $CDB = ABD$ (so le trong) $\Rightarrow ABD = ADB = CDB = 30^o$

$\Rightarrow$ Tam giác ABD cân tại A $\Rightarrow$ AB = AD = BC

Gọi I là giao điểm của AD và BC, dễ dàng chứng minh $\Delta$ICD đều (có hai góc bằng $60^0$) và B là trung điểm IC (vì DB là đường phân giác góc D, cũng là đường trung tuyến trong $\Delta$IDC).

Do đó CD = IC = 2BC.

Đặt AB = a $\Rightarrow$ BC = AD = AB = a và CD = 2a.

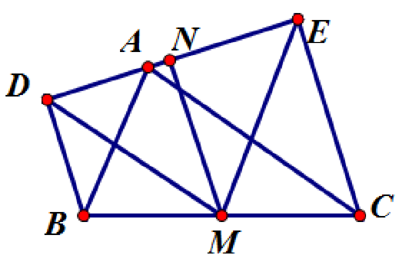
Chu vi hình thang ABCD: AB + BC + CD + AD = 5a = 20cm

$\Rightarrow$ a = 4cm

$\Rightarrow$ AB = BC = AD = 4cm và CD = 8cm.

Bài 24: Cho $\Delta$ABC, đường thẳng d đi qua A không cắt các cạnh của tam giác ABC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng d. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng MD = ME.

HD:




Ta có BD // CE (cùng vuông góc DE)

$\Rightarrow$ BCED là hình thang vuông.

Gọi N là trung điểm DE

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của hình thang vuông BCED

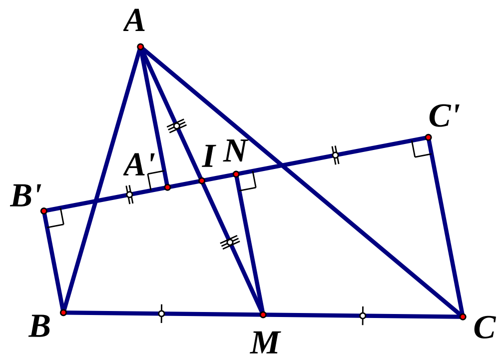
$\Rightarrow$MN $\perp$ DE.

Tam giác MDE có MN là trung tuyến và MN $\perp$ DE

$\Rightarrow$MDE là tam giác cân tại M $\Rightarrow$MD = ME

Bài 25: Cho tam giác ABC, AM là trung tuyến. Vẽ đường thẳng d qua trung điểm I của AM cắt các cạnh AB, AC. Gọi A’, B’, C’ thứ tự là hình chiếu của A, B, C lên đường thẳng d. Chứng minh rằng BB’ + CC’ = 2AA’.

HD:




Gọi N là hình chiếu của M trên d.

Xét tứ giác BB’C’C có BB’ // CC’ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow$BB’C’C là hình thang.

M là trung điểm BC và MN // BB’ // CC’ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow$MN là đường trung bình của hình thang BB’C’C

$\Rightarrow$BB’ + CC’ = 2MN (1)

Hai tam giác AA’I và MNI vuông tại A’ và N có AI = MI và $AIA' = MIN$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $\Delta AA'I = \Delta MNI$ (g-c-g)$\Rightarrow$AA’ = MN (2).

(1), (2) suy ra BB’ + CC’ =2AA’.

Bài 26: ho tam giác đều ABC. Trên tia đối tia AB ta lấy điểm D và trên tia đối tia AC ta lấy điểm E sao cho AD = AE. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BE, AD, AC, AB.

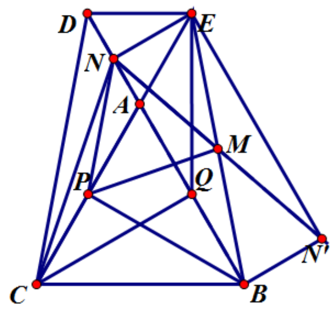
a) Chứng minh rằng tứ giác BCDE là hình thang cân.

b) Chứng minh rằng tứ giác CNEQ là hình thang.

c) Trên tia đối của tia MN lấy N’ sao cho N’M = MN. Chứng minh rằng BN’ vuông góc với BD; EB = 2MN.

d) $\Delta$ MNP là tam giác đều.

HD:




a) Ta có tam giác ADE cân và có $A = 60^0$ nên $\Delta$ ADE là tam giác đều.

$ADE = ABC = 60^0 \Rightarrow$ DE // BC (hai góc so le trong bằng nhau)

Ta lại có: DB = AD + AB = AE + AC = EC

Do đó BCDE là hình thang cân.

b) Tam giác đều ADE có EN là trung tuyến

$\Rightarrow$EN $\perp$ AD hay EN $\perp$ BD.

CQ là trung tuyến tam giác đều ABC $\Rightarrow$CQ $\perp$ AB

hay EQ $\perp$ BD.

Suy ra EN // CQ (cùng vuông góc BD)

$\Rightarrow$CNEQ là hình thang.

c) Hai tam giác MEN và MBN’ có:

MN = MN’, $NME = N'MB$ (đối đỉnh), NE = MB,

Suy ra $\Delta MEN = \Delta MBN'$.

$\Rightarrow ENM = MN'B \Rightarrow$N’B // EN (hai góc so le trong bằng nhau).

Mà EN $\perp$ BD nên BN’ $\perp$ BD.

Dễ dàng chứng minh được $ENB = N'BN$ (c-g-c) $\Rightarrow$ BE = NN’ = 2MN.

d) Xét tam giác ACD có NP là đường trung bình $\Rightarrow$ NP = $\frac{1}{2}$DC

Mà DC = EB (vì BCDE là hình thang cân) nên NP = $\frac{1}{2}$EB = MN (1).

Theo trên, MN = MB = MN’ = ME nên các tam giác MBN và MEN’ cân tại M.

Ta được $BNN' = BEN' = NBE \Rightarrow$ EN’ // AB.

Ta có: $ANP = ADC = AEB$ và $ANM = BEN'$

Do đó: $PNM = ANP + ANM = AEB + BEN' = AEN'$.

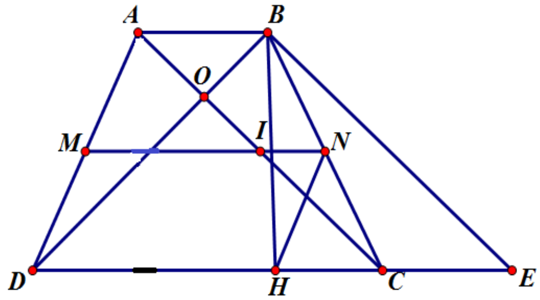
Vì EN’ // AB nên $AEN' = CAB = 60^0$ (đồng vị).

Từ đó ta có $PNM = 60^0$ (2).

Từ (1), (2) suy ra MNP là tam giác đều.

Bài 27: Cho hình thang cân ABCD (AB//CD; AD = BC), có đáy nhỏ AB. Độ dài đường cao BH bằng độ dài đường trung bình MN (M thuộc AD, N thuộc BC) của hình thang ABCD. Vẽ BE// AC (E thuộc DC). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng

a) $MN = \dfrac{DE}{2}$ b)Tam giác OAB cân c) Tam giác DBE vuông cân




HD:

a) $ABC = ECB$ (so le trong), BC = CB, $BCA = CBE$ (so le trong)

Suy ra $\Delta ABC = \Delta ECB$ (g-c-g) $\Rightarrow$ AB = EC.

MN là đường trung bình của hình thang cân ABCD

$$\Rightarrow MN = \frac{DC+AB}{2} = \frac{DC+CE}{2} = \frac{DE}{2}$$

b) Xét $\Delta ABC$ và $\Delta BAD$ có:

AB = BA

AC = BD (2 đường chéo hình thang cân)

BC = AD (2 cạnh bên hình thang cân)

Do đó $\Delta ABC = \Delta BAD$ (c – c – c)

Suy ra $BAC = ABD$ hay $BAO = ABO$

$\Rightarrow$ Tam giác OAB cân tại O.

c) Tam giác DBE có BE = AC = BD $\Rightarrow$ Tam giác DBE cân tại B.

BH là đường cao tam giác cân DBE nên BH cũng là trung tuyến của tam giác này.

Mà BH = MN = $\frac{DE}{2}$ $\Rightarrow$ Tam giác BDE vuông tại B

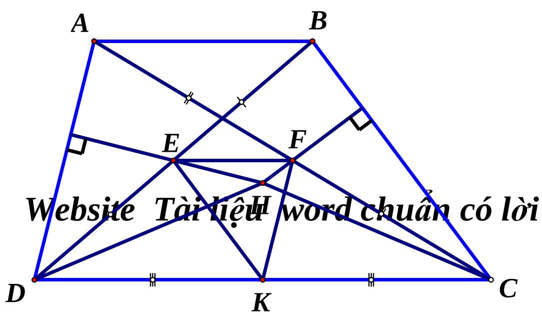
Vậy DBE là tam giác vuông cân.

Bài 28: Cho hình thang ABCD (AB//CD). Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của BD, AC, DC. Gọi H là giao điểm của đường thẳng qua E vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC. Chứng minh rằng:

a) H là trực tâm của tam giác EFK

b) Tam giác HCD cân.

HD:



a) Ta có E, K lần lượt là trung điểm BD, CD $\Rightarrow$ EK // BC.

Mà FH $\perp$ BC $\Rightarrow$ FH $\perp$ EK.

Tương tự ta có EH $\perp$ FK

Suy ra H là trực tâm tam giác EFK.

b) Ta có H là trực tâm tam giác EFK nên KH $\perp$ EF

Gọi I là trung điểm của AD, dễ dàng chứng minh được IE // AB // CD và IF // CD.

Từ đó suy ra EF // AB // CD.

Do đó, KH $\perp$ CD.

Tam giác HCD có K là trung điểm CD và KH $\perp$ CD nên HCD là tam giác cân tại H.

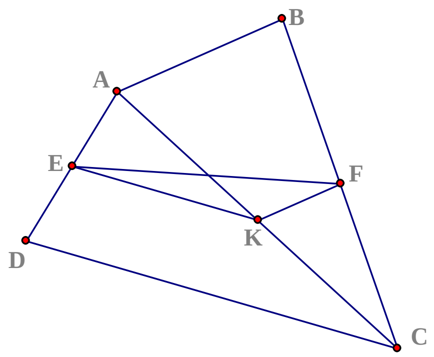
## BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, K, F lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC

a. Chứng minh EK // CD, FK // AB

b. So sánh EF và $\frac{1}{2}(AB+CD)$

c. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để 3 điểm E, F, K thẳng hàng, chứng minh $\text{EF}=\frac{1}{2}(AB+CD)$




HD:

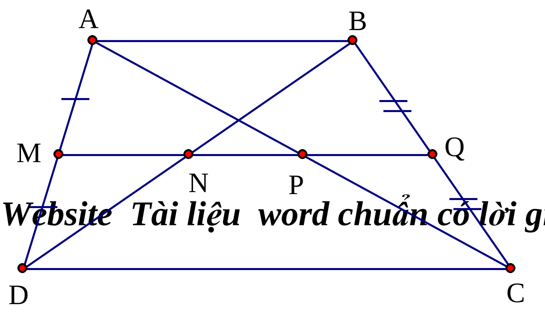
b. Xét $\Delta$EFK ,có: $\text{EF}\le \text{EK+KF}=\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AB+CD)$

c. Để E, F, K thẳng hàng, khi đó EF đồng thời song song với AB, CD. Tức là tứ giác ABCD là hình thang ( AB // CD ) $\Rightarrow \text{EF}=\frac{1}{2}(AB+CD)$

Bài 2: Cho hình thang ABCD (AB // CD) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BD, AC, BC. Chứng minh

a) M, N, P, Q cùng nằm trên một đường thẳng

b) $NP=\frac{1}{2}\left|DC-AB\right|$



HD:

a) Ta có MN là đường trung bình của hình thang ABCD $\Rightarrow MN//AB$

Tương tự, ta được: $MP//CD; MQ//AB, CD$

$\Rightarrow MN, MP, MQ//AB \Rightarrow dpcm$

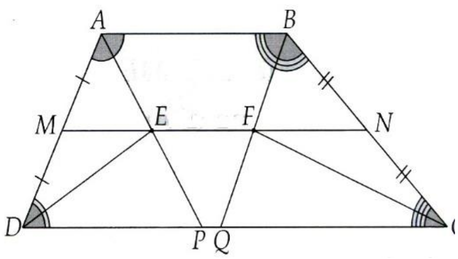
b) Ta có: $\frac{1}{2}|DC - AB| = \frac{1}{2}|2MP - MN| = |MP - MN| = NP$

Bài 3: Cho hình thang ABCD (AB // CD) với AB = a, BC = b, CD = c và DA =d. Các tia phân giác của góc A và D cắt nhau tại E, các tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại F. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD và BC

a) Chứng minh M, E, N, F cùng nằm trên một đường thẳng

b) Tính độ dài MN, MF, FN theo a, b, c, d

HD:



a)Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của AE, AF với CD

Chứng minh tương tự bài 2

b) Ta có: $MN = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(a + c)$

Lại có: $c = CD = CQ + QD = BC + QD = b + QD\left(\Delta BCD : can\right) \Rightarrow QD = c - b$

Trong hình thang ABQD có M là trung điểm của AD và MF//DQ nên chứng minh được F là trung điểm của BQ, từ đó chứng minh MF là đường trung bình của hình thang ABQD.

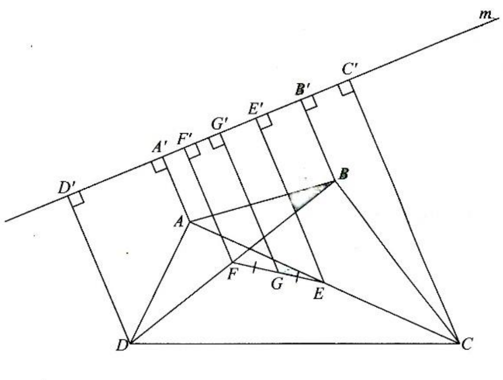
Vì MF là đường trung bình của hình thang ABQD.

$\Rightarrow MF = \frac{1}{2}(AB + DQ) = \frac{1}{2}(a + c - b)$

Mặt khác, FN là đường trung bình của tam giác BCQ, tức là $FN = \frac{1}{2}CQ = \frac{1}{2}b.$

Bài 4:Cho tứ giác *ABCD.* Có G là trung điểm của đoạn nối các trung điểm của hai đường chéo *AC*và *BD.* Gọi *m* là một đường thẳng không cắt cạnh nào của hình thang *ABCD;* Gọi *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *G'* lần lượt là hình chiếu của *A, B, C, D,*G lên đường thẳng *m.* Chứng minh GG' =

$\frac{1}{2}$(AA'+BB'+CC'+DD')




HD:

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và BD; E' và F' lần lượt là hình chiếu của E, F trên đường thẳng m.

Khi đó, GG' là đường trung bình của hình thang EE'F'F

$\Rightarrow GG' = \frac{1}{2}\text{EE}' + \text{FF}').$

Mà EE' và FF' lần lượt là đường trung bình của hình thang AA'C'C và BB'D'D.

$\Rightarrow \text{EE}' = \frac{1}{2}(\text{AA}' + \text{CC}')$ và $\text{FF}' = \frac{1}{2}(\text{BB}' + \text{DD}')$

Thay vào (1) ta được ĐPCM.