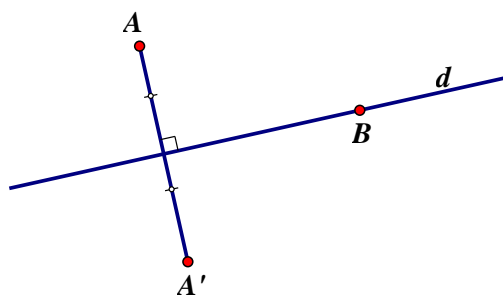


BÀI 6: ĐỐI XỨNG TRỰC.

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hai điểm đối xứng qua một đường thẳng

Định nghĩa: Hai điểm A và A' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng AA' .

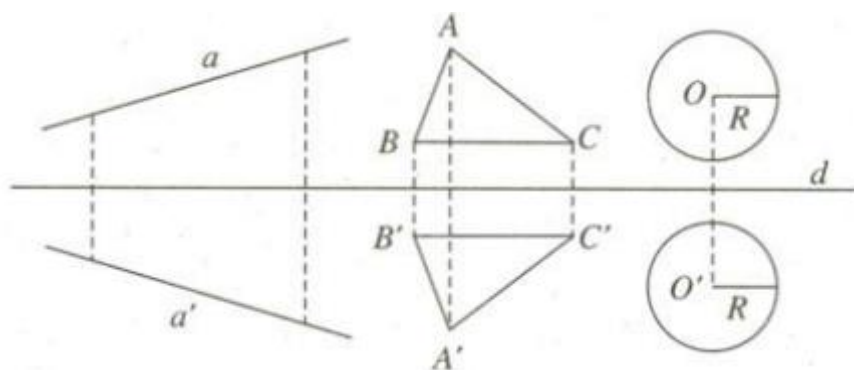


Qui ước: Nếu điểm B nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng d cũng là điểm B .

2. Hai hình đối xứng qua một đường thẳng

Định nghĩa: Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hai hình đó.



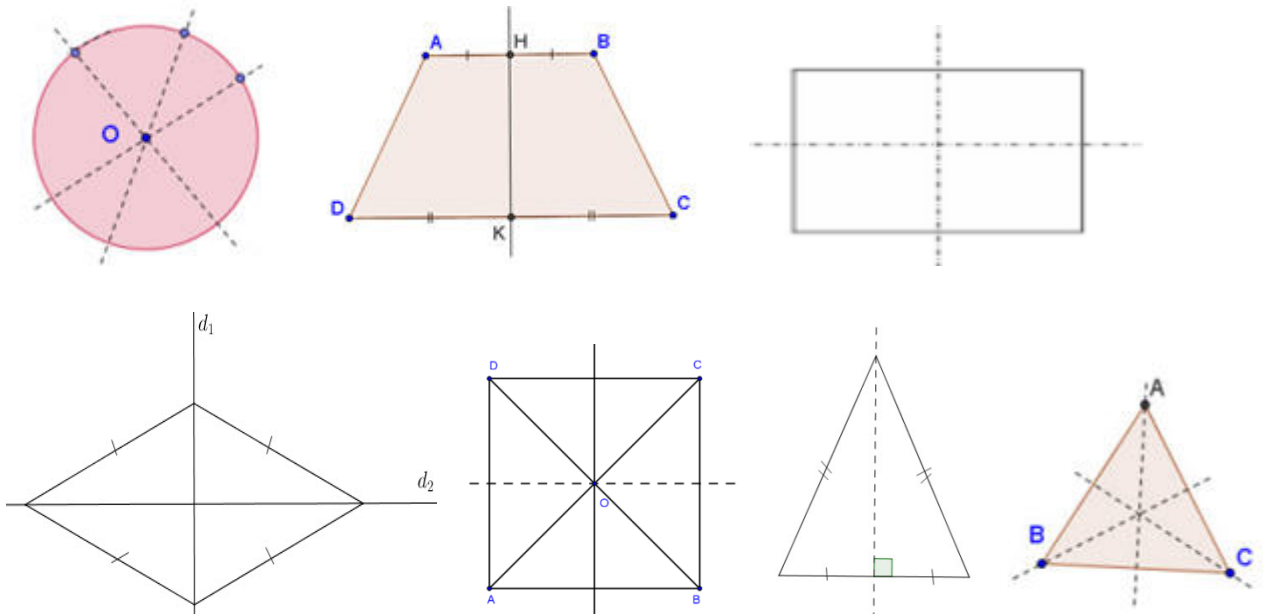
3. Hình có trục đối xứng

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H .

Ta nói rằng hình H có trục đối xứng.

Định lí: Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang đó.

4. Trục đối xứng của đường tròn, tứ giác đặc biệt, tam giác đặc biệt.



- Hình tròn: Có vô số trục đối xứng:
 - Trục đối xứng của hình tròn là một đường thẳng đi qua tâm hình tròn đó.
- Hình thang cân: Có 1 trục đối xứng:
 - Trục đối xứng của hình thang cân là đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân.
- Hình chữ nhật: Có 2 trục đối xứng:
 - Trục đối xứng của hình chữ nhật là đường thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện.
- Hình thoi: Có 2 trục đối xứng:
 - Trục đối xứng của hình thoi là đường chéo của hình thoi.
- Hình vuông: Có 4 trục đối xứng:
 - Trục đối xứng của hình vuông là đường chéo hoặc đường thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện.
- Tam giác cân: Có 1 trục đối xứng:
 - Trục đối xứng của tam giác cân là đường thẳng nối đỉnh cân của tam giác với trung điểm cạnh đối diện.

➤ Tam giác đều: Có 3 trục đối xứng:

- Trục đối xứng của tam giác đều là đường thẳng nối đỉnh của tam giác đều với trung điểm cạnh đối diện.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Bài 1: Cho góc $xOy = 50^\circ$ và điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, điểm C đối xứng với A qua Oy.

- So sánh các độ dài OB và OC.
- Tính số đo góc BOC.

HD:

Học sinh vẽ hình

- $OB=OC=OA$
- $\angle BOC = 100^\circ$.

Bài 2: Cho tam giác nhọn ABC, trục tâm H. Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC.

- Chứng minh hai tam giác BHC và BKC bằng nhau.
- Cho $\angle BAC = 70^\circ$. Tính số đo góc BKC.

HD:

Học sinh tự vẽ hình

- Học sinh chứng minh
- $\angle BKC = 110^\circ$.

Bài 3: Cho hình thang vuông ABCD (góc $A=D=90^\circ$). Gọi K là điểm đối xứng với B qua AD, E là giao điểm của CK và AD. Chứng minh $\angle CED = \angle AEB$

HD:

$\angle CED = \angle AEB$ (cùng bằng $\angle AEK$)

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là điểm đối xứng với điểm H qua các cạnh AB, AC. Chứng minh:

- a) Ba điểm I, A, K thẳng hàng.
- b) Tứ giác BIKC là hình thang.
- c) $IK = 2AH$.

HD:

- a) $HAC = CAK$; $HAB = BAI$ mà $A = 90^\circ$ nên $IAK = 180^\circ \Rightarrow A, I, K$ thẳng hàng.
- b) BI vuông góc IK; CK vuông góc IK nên BI//CK suy ra BIKC là hình thang.
- c) $IA=AH$; $AH=AK$ nên $IK=2AH$.

Bài 5: Cho tam giác ABC, các phân giác BM và CN cắt nhau tại I. Từ A vẽ các đường vuông góc với BM và CN, chúng cắt BC thứ tự ở E và F. Gọi I' là hình chiếu của I trên BC. Chứng minh rằng E và F đối xứng nhau qua I'.

HD:

Xét $\triangle AEF$ có :

MB là trung trực cạnh AE (tự chứng minh);

CN là trung trực cạnh AF,

Mà CN giao BM tại I ;

II' vuông góc với BC nên II' là trung trực cạnh EF

Suy ra E,F đối xứng nhau qua I'.

Bài 6: Cho hai điểm A, B nằm trong một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm điểm $M \in d$ sao cho $MA + MB$ ngắn nhất.

HD:

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua d, AB' giao d tại M_0 ; gọi M là điểm bất kì thuộc d.

Ta có: $MA + MB = MA + MB' \geq AB' = AM_0 + M_0B' = AM_0 + M_0B$.

Dấu “ \equiv ” xảy ra khi $M \equiv M_0$.

Bài 7: Cho góc $xOy = 60^\circ$ và điểm A nằm trong góc đó. Gọi B, C lần lượt là hai điểm đối xứng với điểm A qua Ox, Oy

- Chứng minh tam giác BOC là tam giác cân. Tính các góc của tam giác đó.
- Tìm điểm I thuộc Ox và điểm K thuộc Oy sao cho tam giác AIK có chu vi nhỏ nhất.

HD:

- $\angle BOC = 120^\circ$; $\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$
- I, K là giao điểm của đường thẳng BC với các tia Ox và Oy.

Bài 8: Cho tam giác ABC, Cx là phân giác ngoài của góc C. Trên Cx lấy điểm M (khác C). Chứng minh rằng: $MA + MB > CA + CB$.

HD:

Trên tia đối tia CB lấy E sao cho $CE = CA$.

Suy ra $\triangle MCE = \triangle MCA$ (c.g.c)

Nên $AM = ME$

Ta có: $AM + MB = ME + MB > EB$ mà $EB = EC + CB = AC + CB$

Nên $MA + MB > AC + CB$.

Bài 9: Cho góc nhọn xOy và điểm A ở trong góc đó. Tìm điểm B ở trên tia Ox và điểm C ở trên tia Oy sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

HD:

Gọi A' và A'' lần lượt là hai điểm đối xứng với A qua Oy và Ox, A'A'' cắt Oy và Ox lần lượt tại C' và B'.

Gọi C và B lần lượt là hai điểm thuộc Oy và Ox,

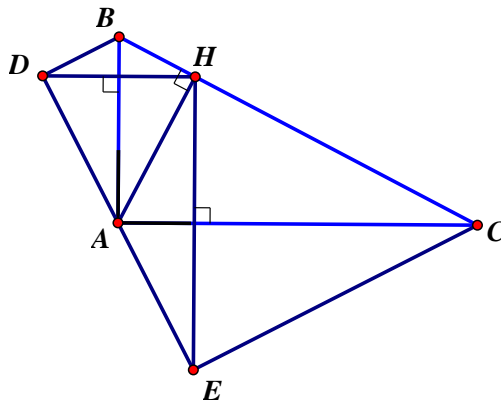
Chu vi $\triangle ABC = AB + BC + CA = BA'' + BC + CA' \geq A'A'' = A'C' + C'B' + B'A''$.

Vậy chu vi $\triangle ABC$ nhỏ nhất $= A'A''$ khi $C \equiv C'$; $B \equiv B'$.

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là điểm đối xứng của điểm H qua AB và AC. Chứng minh rằng:

- A là trung điểm của đoạn DE
- Tứ giác BDEC là hình thang vuông.
- Cho $BH = 2\text{cm}$, $CH = 8\text{cm}$. Tính AH và chu vi hình thang BDEC.

HD:



a) Vì D đối xứng với H qua đường thẳng AB nên $\angle DAH = 2\angle BAH$.

Tương tự ta có $\angle EAH = 2\angle CAH$.

Do đó: $\angle DAE = \angle DAH + \angle EAH = 2(\angle BAH + \angle CAH) = 180^\circ$

Suy ra D, A, E thẳng hàng

Mặt khác: $AD = AE = AH$. Vậy A là trung điểm của DE.

b) Góc $\angle ADB$ và $\angle AHB$ đối xứng nhau qua đường thẳng AB nên $\angle ADB = \angle AHB = 90^\circ$.

Tương tự ta có $\angle AEC = \angle AHC = 90^\circ$.

Tứ giác BDEC có hai góc kề $\angle D = \angle E = 90^\circ$,

Do vậy BDEC là hình thang vuông tại D và E.

c) $BH = 2\text{cm}$, $CH = 8\text{cm}$.

Trong tam giác ABH vuông tại H, theo định lý Pitago: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - 4$

Trong tam giác ACH vuông tại H, theo định lý Pitago $AH^2 = AC^2 - CH^2 = AC^2 - 64$

Suy ra: $2AH^2 = AB^2 + AC^2 - 68$.

Lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100$, suy ra $2AH^2 = 100 - 68 = 32 \Rightarrow AH^2 = 16$.

Vậy $AH = 4$.

Đặt V là chu vi hình thang BDEC.

Ta có $BD = BH$, $DE = 2DA = 2HA$, $EC = HC$.

Do đó:

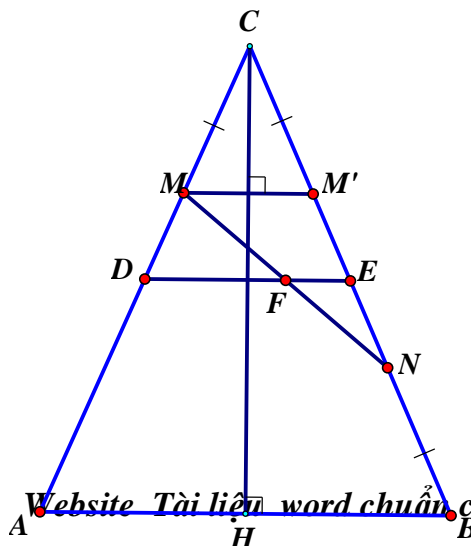
$$V = BD + DE + EC + CB = BH + 2AH + CH + CB = 2 + 8 + 8 + 10 = 28(\text{cm}).$$

Bài 11.: Trên các cạnh bên CA, CB của tam giác CAB cân tại C lấy các điểm M, N sao cho $CM + CN = AC$.

a) Trên cạnh CB lấy điểm M' sao cho $CM' = BN$. Chứng minh M, M' đối xứng nhau qua đường cao CH của tam giác CAB.

b) Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, MN. Chứng minh: D, E, F thẳng hàng.

HD:



a) Ta có $CA = CB$.

Theo giả thiết: $CM + CN = AC = BC$ nên $BN = BC - CN = CM$.

Vì $CM' = BN$ suy ra $CM = CM'$.

Vậy tam giác CMM' cân tại C.

CH là đường phân giác góc ACB , nên CH là đường trung trực của cạnh MM' .

Vậy M và M' đối xứng nhau qua đường thẳng CH.

b) $MM' \perp CH, AB \perp CH \Rightarrow MM' \parallel AB$.

DE là đường trung bình trong tam giác ABC nên $DE \parallel AB$,

Suy ra $DE \parallel MM'$.

$$\text{Vì } \begin{cases} EC = EB \\ MC = NB \end{cases} \Rightarrow EM' = EN ,$$

Suy ra E là trung điểm của $M'N$.

Trong tam giác $MM'N$, đường thẳng DE song song với MM' và đi qua trung điểm của $M'N$ nên DE là đường trung bình, do đó DE đi qua trung điểm F của MN.

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

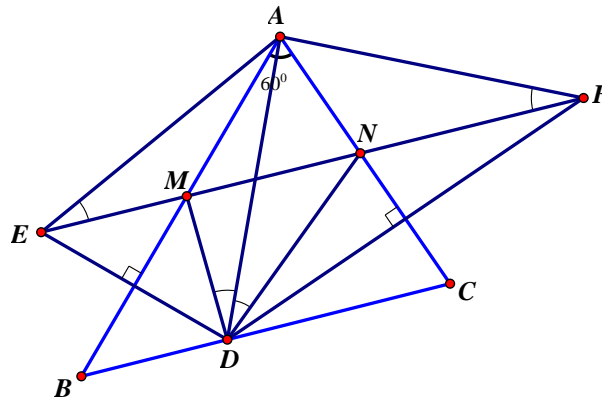
Bài 12.: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn trong đó góc A có số đo bằng 60° . Lấy D là điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của D qua cạnh AB và AC. EF cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh rằng $AE = AF$

b) Tính góc EAF

c) Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN

HD:



a) E đối xứng của D qua đường thẳng AB nên $AE = AD$,

F đối xứng của D qua đường thẳng AC nên $AF = AD$.

Từ đó ta có $AE = AF$.

b) Góc EAB và DAB đối xứng nhau qua đường thẳng AB nên $EAB = DAB$,

Suy ra $EAD = EAB + DAB = 2DAB$.

Chứng minh tương tự ta có $FAD = 2DAC$.

Do vậy: $EAF = EAD + FAD = 2(DAB + DAC) = 2BAC = 120^\circ$.

c) Hai góc MDA và MEA đối xứng nhau qua đường thẳng AB nên $MDA = MEA$ (1).

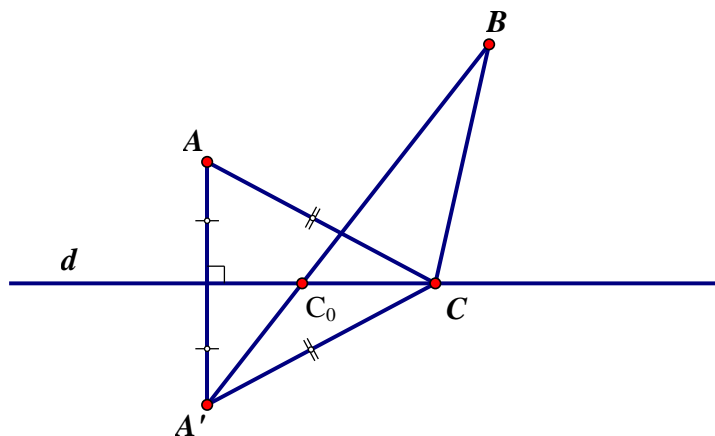
Tương tự ta có $NDA = NFA$ (2).

Mặt khác theo câu a), tam giác AEF cân tại A nên $MEA = NFA$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $MDA = NDA$. Vậy DA là đường phân giác góc MDN.

Bài 13. Cho hai điểm A và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm trên d một điểm C sao cho tổng độ dài $CA + CB$ là ngắn nhất.

HD:



Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d .

Với mỗi điểm C trên đường thẳng d , ta có $CA = CA'$.

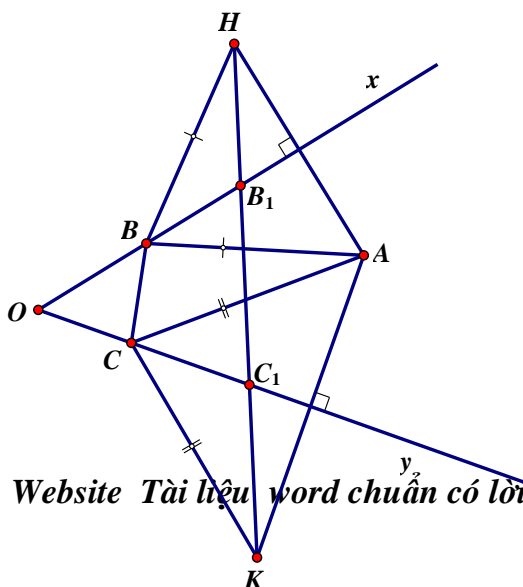
Do đó: $CA + CB = CA' + CB \geq A'B$.

$CA + CB$ nhỏ nhất khi $CA' + CB = A'B$, hay C thuộc đoạn $A'B$.

Vậy điểm C thỏa đề bài là giao điểm của đoạn BA' với đường thẳng d .

Bài 14.: Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc xOy . Tìm trên hai cạnh Ox và Oy hai điểm B và C sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

HD:



Gọi H, K lần lượt là điểm đối xứng của A qua Ox và Oy. Với hai điểm B và C lần lượt nằm trên tia Ox, Oy, ta có:

$$AB = HB \text{ và } CA = CK.$$

Do đó chu vi tam giác ABC bằng:

$$AB + BC + CA = HB + BC + CK \leq HK.$$

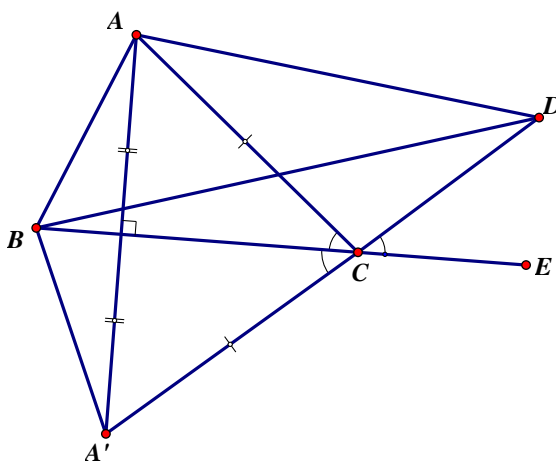
Chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi:

$$HB + BC + CK = HK, \text{ hay H, B, C, K thẳng hàng theo thứ tự đó.}$$

Vậy điểm B và C trên tia Ox, Oy để tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất lần lượt là giao điểm của HK với các tia Ox, Oy.

Bài 15: Cho tứ giác ABCD có góc ngoài của tứ giác tại đỉnh C bằng góc ACB. Chứng minh rằng $AB + DB > AC + DC$.

HD:



Gọi E là một điểm trên tia đối của tia CB. Theo giả thiết ta có: $\angle DCE = \angle ACB$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng BC. Ta có $\angle A'CB = \angle ACB = \angle DCE$,

Suy ra: $\angle DCE + \angle A'CE = \angle A'CB + \angle A'CE = 180^\circ$.

Vậy ba điểm D, C, A' thẳng hàng.

Vì A và D nằm cùng phía so với đường thẳng BC nên C nằm giữa D và A'.

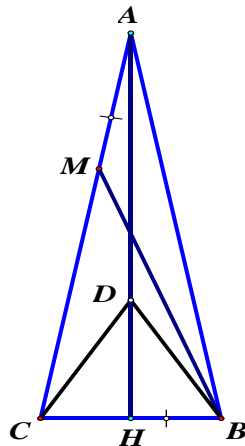
Ta có: $AB + DB = A'B + BD$, $AC + CD = A'C + CD = AD$.

Trong tam giác BDA', $A'B + BD > A'D$. Do vậy ta được $AB + DB > AC + CD$.

Bài 16.: Cho tam giác ABC có $A = 20^\circ$, $B = 80^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = BC$.

Tính $\angle BMC$.

HD:



Bên trong tam giác ABC, dựng tam giác đều BCD. Ta có:

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle DCB = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ.$$

Xét hai tam giác ACD và BAM có:

$AC = BA$ (vì tam giác ABC cân tại A)

$$\angle ACD = \angle BAM = 20^\circ.$$

$CD = AM$ (cùng bằng BC)

Do vậy, hai tam giác ACD và BAM bằng nhau. Ta có:

$$\angle ABM = \angle CAD \quad (1).$$

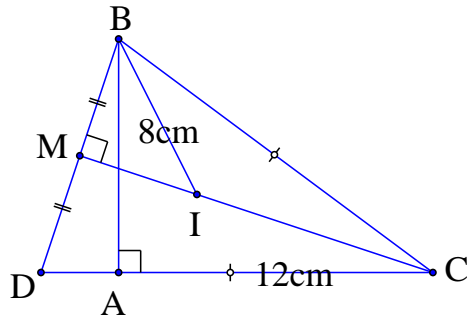
Gọi H là trung điểm của BC, ta có $AH \perp BC$ và $DH \perp BC$ suy ra hai đường thẳng AD và AH trùng nhau, AD là trục đối xứng của tam giác cân ABC. Từ đó ta có $\angle CAD = \angle BAD = 10^\circ$ (2).

(1) và (2) suy ra $\angle ABM = 10^\circ$.

Vậy $\angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.

Bài 17: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác của $\triangle ABC$. Biết $AC = 12\text{cm}$; $IB = 8\text{cm}$. Tính độ dài BC.

HD:



Gọi D là điểm đối xứng của B qua đường thẳng CI.

Vì CI là phân giác góc BAC nên D thuộc đường thẳng AC và $BC = DC$.

Gọi M là trung điểm BD, thì $CM \perp BD$.

Ta có: $\angle BIM = \angle ICB + \angle IBC = 45^\circ$,

Do đó tam giác BMI vuông cân tại M,

Suy ra $BM = 4\sqrt{2}$ (cm).

$\Rightarrow BD = 8\sqrt{2}$ (cm).

$AD = CD - AC = BC - 12$ (cm)

Tam giác ABC vuông tại A, có: $AB^2 = BC^2 - AC^2 = BC^2 - 144$

Tam giác ABD vuông tại A, có: $AB^2 = BD^2 - AD^2 = 128 - (BC - 12)^2$

Như vậy ta có: $128 - (BC - 12)^2 = BC^2 - 144$

$\Rightarrow 128 - (BC^2 - 24BC + 144) = BC^2 - 144$

$\Rightarrow 2BC^2 - 24BC - 128 = 0$

$\Rightarrow 2BC^2 - 32BC + 8BC - 128 = 0$

$$\Rightarrow 2BC(BC - 16) + 8(BC - 16) = 0$$

$$\Rightarrow (2BC + 8)(BC - 16) = 0.$$

$$\Rightarrow BC = 16 \text{ (cm)}.$$