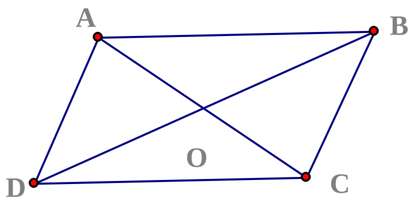
BÀI 7: HÌNH BÌNH HÀNH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song



$\lozenge ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} \lozenge ABCD \\ AB // CD, AD // BC \end{cases}$

Chú ý: Hình bình hành là hình thang đặc biệt có hai cạnh bên song song

2. Tính chất: Trong hình bình hành

Tính chất về cạnh: Các cạnh đối bằng nhau

Tính chất về góc: Các góc đối bằng nhau

Tính chất về đường chéo: Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Tính chất đối xứng: Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành

3. Dấu hiệu nhận biết

Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành

Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành

Tứ giác có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau là hình bình hành

Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành

Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành

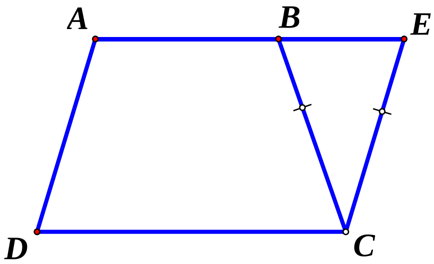
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh 1 tứ giác là hình bình hành

Phương pháp giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh 1 tứ giác là hình bình hành

Bài 1: Cho hình thang cân ABCD (AB//CD, AB < CD). Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho CB = CE. Chứng minh AECD là hình bình hành.

HD:



Dễ thấy tam giác BCE cân tại C suy ra $CBE = CEB$

Ta lại có $CBA = DAB$

Mà $CBE + CBA = 180^0$

Nên $CEB + DAB = 180^0$

Suy ra AC//ED (2 góc trong cùng phía bù nhau)

Suy ra AECD là hình bình hành

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD, đường chéo BD. Kẻ AH vuông góc với BD ở H, CK vuông góc với BD ở K. Chứng minh tứ giác AHCK là hình bình hành.

HD:

Học sinh tư vẽ hình

Vì AHCK là hình bình hành nên

Suy ra: AH//CK (1),

Vì $\Delta ADB = \Delta CBD$

Nên $S_{ADB} = S_{CBD}$ hay $\frac{AH.DB}{2} = \frac{CK.DB}{2}$

Suy ra AH=CK (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Qua điểm O, vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F, vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại K, H. Chứng minh tứ giác EKFH là hình bình hành.

HD:

ΔAOK= ΔCOH(g.c.g) nên OH=OK(1) ;

ΔAOE=ΔCOF (g.c.g) nên OE=OF (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm

Bài 4: Cho tam giác ABC. Từ một điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D. Giả sử AE = BF.

a) Chứng minh tam giác AED cân.

b) Chứng minh AD là phân giác của góc A.

HD:

a) EDBF là hình bình hành nên AE=DE (cùng bằng BF)

b) $EAD = EDA$ (ΔADE cân tại E)

$EDA = DAF$ (sole trong)

Suy ra: $EAD = DAF$

Suy ra: AD là phân giác của góc A

Bài 5: Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D.

a) Chứng minh tứ giác BDCH là hình bình hành.

b) Tính số đo góc BDC, biết $BAC = 60^0$.

HD:

a), DC//BH (cùng vuông góc AC) ;

BD//CH (cùng vuông góc AB) nên BDCH là hình bình hành.

b), $BDC = BHC$ mà $HBA = HCA = 30^0$ Nên $HBC = HCB = 60^0$

Suy ra: $BHC = 60^0$

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD, $AD = 2AB$. Từ C vẽ CE vuông góc với AB. Nối E với trung điểm M của AD. Từ M vẽ MF vuông góc với CE, MF cắt BC tại N.

a) Tứ giác MNCD là hình gì? b) Tam giác EMC là tam giác gì?

c) Chứng minh: $BAD = 2AEM$.

HD:

a) MNCD là hình thoi.

b) NF//BE mà N là trung điểm BC nên F là trung điểm EC

Suy ra ΔMEC cân tại M (đường cao là trung trực)

c), Ta có: $BAD + AEM = EMD$; $MEA = EMF = FMC = MCD = DMC$

Nên $BAD + AEM = 3AEM$ hay $BAD = 2AEM$.

Bài 7: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC; M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AE, EC, CF, FA. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

HD:

MN//=PQ (vì cùng song song và bằng một nửa AC)

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD. Các điểm E, F thuộc đường chéo AC sao cho AE = EF = FC. Gọi M là giao điểm của BF và CD; N là giao điểm của DE và AB. Chứng minh rằng:

a) M, N theo thứ tự là trung điểm của CD, AB. b) EMFN là hình bình hành.

HD:

Học sinh tự vẽ hình

a), DNBM là hình bình hành nên EN//FB, mà E là trung điểm AF nên N là trung điểm AB. Chứng minh tương tự: M là trung điểm CD.

b), Theo a) thì EN//FM (1) ,

ΔAED=ΔCFB (c.g.c) nên DE=BF,

mà MF=DE:2; NE=FB:2 nên MF=EN (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

Bài 9: Cho hình thang vuông ABCD, có $A = B = 90^0$ và AD = 2BC. Kẻ AH vuông góc với BD (H thuộc BD). Gọi I là trung điểm của HD. Chứng minh rằng: CI $\perp$ AI.

HD:

Học sinh tự vẽ hình

Gọi P là trung điểm AH,

Suy ra PI//=BC (cùng song song và bằng AD:2)

Nên BCIP là hình bình hành,

Suy ra PI vuông góc AB và CI//BP.

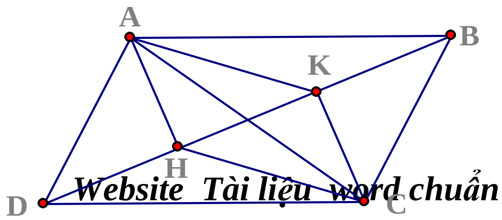
Trong ΔBIA có P là trực tâm tam giác nên BP vuông góc AI

Mà BP//CI

Nên CI vuông góc AI.

Bài 10:Cho hình bình hành ABCD, đường chéo BD. Từ A và C kẻ AE, CF vuông góc với BD ở H và K. Chứng minh tứ giác AHCK là hình bình hành

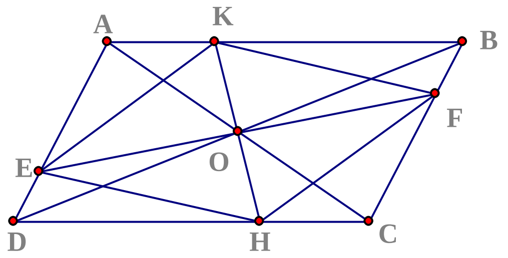
HD:



Ta có: $AH \perp BD, CK \perp BD \Rightarrow AH // CK$

$\Delta AHD = \Delta CKB(ch-gn) \Rightarrow AH = CK \Rightarrow \lozenge AHCK$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Bài 11:Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Qua điểm O, vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F. Qua điểm O vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại H, K. Chứng minh tứ giác EKFH là hình bình hành



HD:

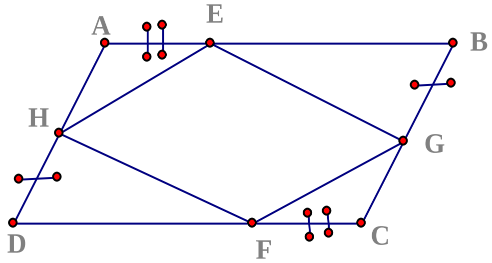
Ta có $\Delta AOK = \Delta COH \Rightarrow OK = OH$

Lại có $\Delta DOE = \Delta BOF \Rightarrow OE = OF$

Xét tứ giác EKFH, có : $OK = OH, OE = \mathrm{OF} \Rightarrow \lozenge \mathrm{EKFH}$ là hình bình hành(dấu hiệu nhận biết

Bài 12:Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự ta lấy hai điểm H và G sao cho DH = BG và trên các cạnh AB, CD theo thứ tự lấy các điểm E, F sao cho AE = CF. Chứng minh rằng EFGH là hình bình hành

HD :



Theo giải thiết ta có: AE = CF $\Rightarrow EB = DF$

$DH = BG \Rightarrow AH = CG$

$\Delta AHE = \Delta CGF \Rightarrow HE = GF; \Delta EBD = \Delta FDH \Rightarrow HF = EG$

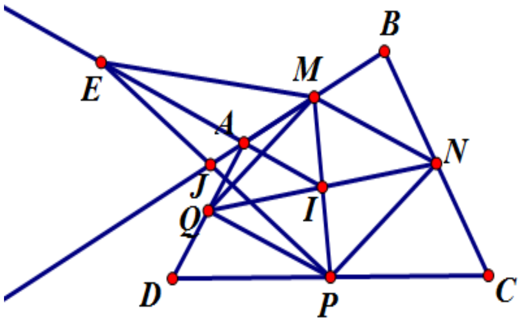
$\Rightarrow \lozenge EGFH$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Bài 13: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

b) Gọi I là giao điểm của MP và QN. Gọi E là điểm trên tia IA sao cho EA = 2AI và J là giao điểm của tia MA và EP. Chứng minh rằng J là trung điểm của EP.

HD:



a) HS chứng minh

b) Xét tam giác EMP có EI là trung tuyến.

Điểm A nằm trên đoạn EI và EA = 2AI

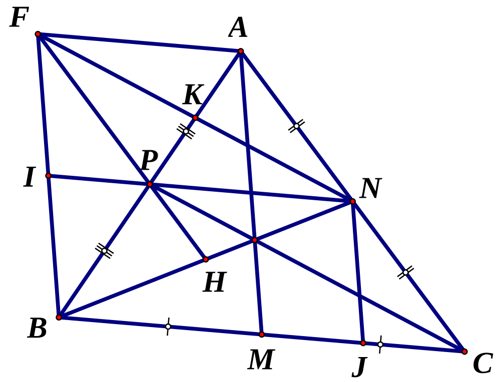
$\Leftrightarrow$ EA = $\frac{2}{3}$EI $\Leftrightarrow$ A là trọng tâm tam giác EMP.

Suy ra MA là trung tuyến của tam giác EMP

Mà MA cắt EP tại J nên J là trung điểm EP.

Bài 14: Cho tam giác ABC có 3 đường trung tuyến AM, BN, CP. Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng qua B song song với AM tại F; NP cắt BF tại I, FN cắt AB tại K, FP cắt BN tại H, NJ//AM (J thuộc BC). Chứng minh rằng các tứ giác AFPN, CNFP, NIBJ là các hình bình hành.

HD:



AF // BM và AM // BF, do đó AMBF là hình bình hành.

Suy ra AF = MB và AF // MB (1).

Lại có PN là đường trung bình trong ΔABC nên PN = MB và PN // MB (2).

Từ (1) và (2) suy ra PN = AF và PN // AF.

Vậy AFPN là hình bình hành.

Theo trên, AFPN là hình bình hành nên FP = AN = NC và FP // NC,

Từ đó suy ra CNFP là hình bình hành.

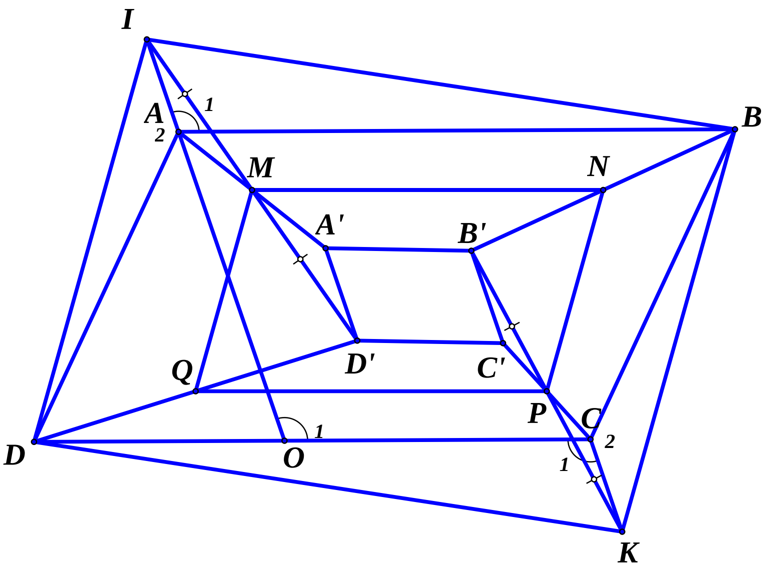
Trong ΔACM, NJ là đường trung bình,

Suy ra NJ // AM // IB. Lại có NI // BJ,

Do vậy tứ giác NIBJ là hình bình hành.

Bài 15: Cho hình bình hành ABCD. Ở miền trong hình bình hành ABCD vẽ hình bình hành A'B'C'D'. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', DD'. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.

HD:



Gọi I là điểm đối xứng của D’ qua M, K là điểm đối xứng của B’ qua P,

Suy ra các tứ giác AIA’D’ và CKC’B’ là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn).

Từ đó ta có AI = A’D’ = B’C’ = CK và AI // A’D’ // B’C’ // CK.

AI cắt CD tại O thì $A_1 = O_1$ (góc đồng vị) và $O_1 = C_1$ (so le trong).

Vì $BAD = BCD \Rightarrow IAD = KCB$

Từ đó ta chứng minh được $\Delta IAD = \Delta KCB$ và $\Delta IAB = \Delta KCD$ (c-g-c)

$\Delta IAD = \Delta KCB \Rightarrow ID = KB$.

$\Delta IAB = \Delta KCD \Rightarrow IB = KD$.

Như vậy ta được tứ giác IDKB là hình bình hành, suy ra ID // KB, ID = KB (1).

MQ là đường trung bình trong tam giác ID’D, ta có MQ = $\frac{1}{2}$ID và MQ // ID (2) .

Tương tự NP = $\frac{1}{2}$KB và NP // KB (3)

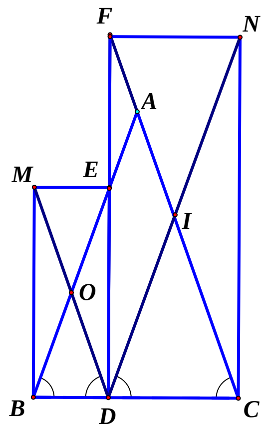
(1), (2), (3) $\Rightarrow$MQ // NP và MQ = NP. Vậy MNPQ là hình bình hành.

Bài 16: Cho tam giác ABC cân tại A. từ một điểm D trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E, F. Vẽ các hình chữ nhật BDEM, CDFN có tâm lần lượt là O, I. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AODI là hình bình hành.

b) A là trung điểm của MN.

HD:



a) Vì tam giác ABC cân tại A nên $ABC = ACB$ (1).

Các tứ giác BDEM và CDFN là hình chữ nhật nên ta có:

$EBD = MDB$ (2) và $NDC = FCD$ (3).

(1) và (2) $\Rightarrow ACD = MDB \Rightarrow$ DO // IA (hai góc đồng vị bằng nhau).

(1) và (3) $\Rightarrow NDC = ABC \Rightarrow$ AO // ID (hai góc đồng vị bằng nhau).

Từ đó suy ra AODI là hình bình hành.

b) Ta có IA // OM và IA = OD = OM,

Suy ra AIOM là hình bình hành $\Rightarrow$ AM = IO và AM // IO (4).

AO // NI và AO = ID = NI, suy ra AOIN là hình bình hành $\Rightarrow$ AN = IO và AN // IO (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow$ M, N, A thẳng hàng và AM = AN. Hay A là trung điểm của MN.

Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

Chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau

Chứng minh các góc bằng nhau

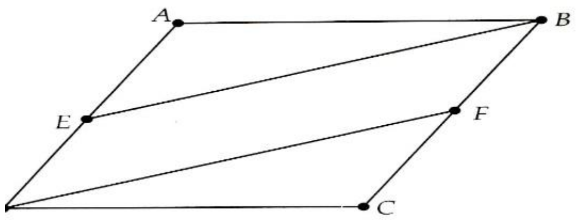
Chứng minh các đường thẳng song song

Chứng minh các tam giác bằng nhau

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc, đường chéo của hình bình hành để giải toán.

Bài 1: Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC Chứng minh

a) $BE = DF; A\hat{B}E = C\hat{D}F$ b) $BE // DF$



HD :

a) Ta chứng minh được BEDF là hình bình hành

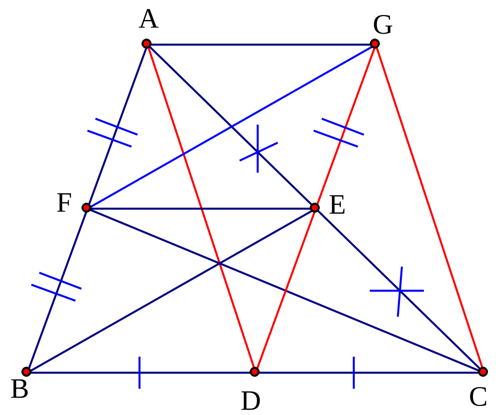
$\Rightarrow$ BE = DF và $EBF = CDF$.

Cách khác:ΔAEB = ΔCFD (c.g.c) suy ra BE = DF và $ABE = CDF$

b) Vì BEDF hình bình hành $\Rightarrow$ ĐPCM.

Bài 2: Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến AD, BE, CF. Đường thẳng kẻ qua E song song với AB, qua F song song với BE cắt nhau tại G. Chứng minh rằng

a. Tứ giác AFEG là hình bình hành b. D, E, G thẳng hàng và CG = AD



HD :

a). $\Diamond AFEG$ là hình bình hành $\Rightarrow AF = EG, AF // EG\ (gt) \Rightarrow BF = EG \Rightarrow \Diamond BFGE$ là hình bình hành (các cạnh đối song song)

b). D, E, G thẳng hàng và CG = AD

$\Rightarrow \Diamond AGCD$ là hình bình hành

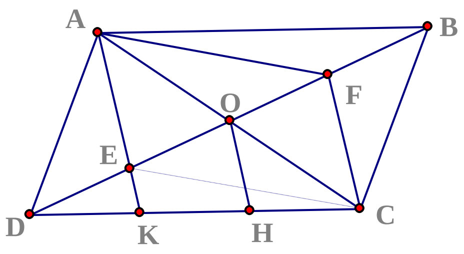
$\Rightarrow AG = CD; AG // CD$

Ta có: $AG = EF = \frac{1}{2}BC; AG // EF$ // BC

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. E và F lần lượt là trung điểm của OD và OB

a). Chứng minh rằng AE // CF

b). Gọi K là giao điểm của AE và DC. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{2}KC$



HD :

a). Xét tứ giác AECF có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

$\Rightarrow \Diamond AECF$ là hình bình hành $\Rightarrow AE // CF$

b). Qua O kẻ OH // CF // AE

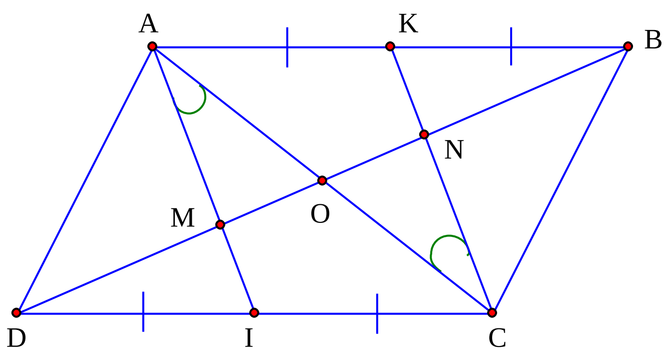
Xét ΔDOH , có EK là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow DK = KH (1)$

Xét hình thang EFCK, có: OH là đường trung bình

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}(EK + CF), KH = HC = \frac{1}{2}KC (2)$ Từ (1)(2) $\Rightarrow DK = \frac{1}{2}KC \Leftrightarrow KC = 2DK (dpcm)$

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Gọi M và N lần lượt là giao điểm của AI và CK với BD. Chứng minh

a). $\Delta ADM = \Delta CBN$ b). $\widehat{MAC} = \widehat{NCA}, IM // CN$ c). DM = MN = NB



HD :

a). Ta có $\Diamond AKCI$ là hình bình hành

$\Rightarrow \Delta ADI = \Delta CBK (ccc) \Rightarrow \Delta ADM = \Delta CBN (gcg)$

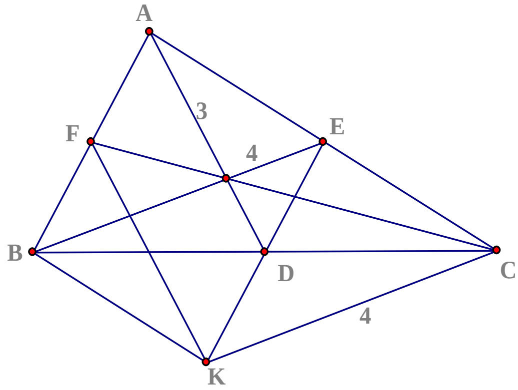
b). Vì AKCI là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NCA}, IM // CN$

c). Theo câu a $\Rightarrow DM = NB, MN = NB \Rightarrow DM = MN = NB$

Bài 5:Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến AD, BE, CF trong đó AD = 3cm, BE = 4cm, $AD \perp BE$

a). Vẽ điểm K sao cho D là trung điểm của EK, c/m rằng tứ giác AFKD là hình bình hành

b). Tính độ dài đoạn thẳng CF



HD :

a). $\Diamond$AFKD là hình bình hành

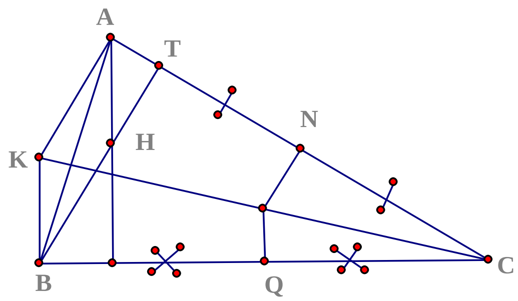
$$\Rightarrow AF // KD, AF = KD \Rightarrow AF = ED, AF // ED \Rightarrow ED // AB , ED = \frac{1}{2}AB$$

b). Tính FC $\Rightarrow \Delta EKC$ vuông tại K và BE = KC (BECK là hình bình hành)

$$\Rightarrow AD \perp BE, AD // FK \Rightarrow FK \perp BE, BE // CK \Rightarrow FK \perp KC$$

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC, các đường trung trực của BC và AC cắt nhau tại O. Trên tia đối của tia OC lấy điểm K sao cho OK = OC. CMR:

a). Tứ giác AHBK là hình bình hành b). $OM = \frac{1}{2}AH$



HD :

a). Tứ giác AHBK là hình bình hành $\Rightarrow AK // BH, AH // BK \Rightarrow \begin{cases} AK // ON, BH // ON \\ BK // OQ(AH // OQ) \end{cases}$

b). Ta có $OM = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}AH(BK = AH)$

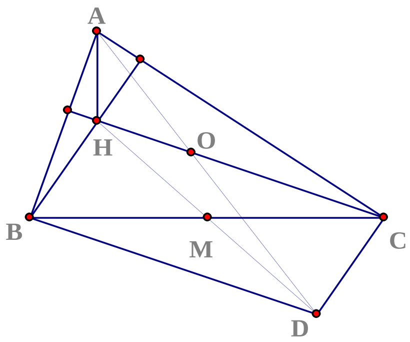
Bài 7: Cho tam giác ABC trực tâm H. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D, Chứng minh rằng

a). Tứ giác BDCH là hình bình hành

b). $B\hat{A}C + B\hat{D}C = 180^0$

c). H, M, D thẳng hàng (MB = MC)

d). $OM = \frac{1}{2}AH(OA = OD)$



HD :

a). Tứ giác BDCH có: $\begin{cases} BH // CD(\perp AC) \\ CH // BD(\perp AB) \end{cases} \Rightarrow \lozenge BHCD$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

b). Xét Tứ giác BDCH có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0 \Rightarrow B\hat{A}C + B\hat{D}C = 180^0$

c). Ta có $\lozenge BHCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của BC

$\Rightarrow M$ là trung điểm của DH $\Rightarrow D, H, M$ thẳng hàng nhau.

d). Xét ΔAHD, có

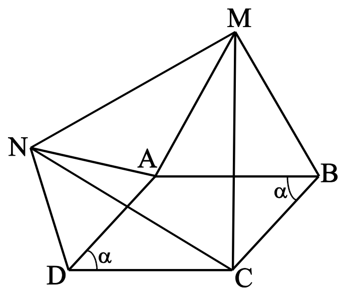
$OA = OD(O \in AD), MH = MD(M \in HD)$

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của ΔAHD

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH \Rightarrow AH = 2.OM$$

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các tam giác đều ABM và ADN. Chứng minh rằng tam giác CMN là tam giác đều.

HD :



Tìm cách giải

Đề bài cho hình bình hành và các tam giác đều nên có nhiều đoạn thẳng bằng nhau, nhiều góc bằng nhau. Do đó có thể nghĩ đến việc chứng minh tam giác bằng nhau.

Trình bày lời giải

Ta đặt $ABC = \alpha$ thì $ADC = \alpha; \; BAD = 180^o - \alpha;$

$$MAN = 360^o - \left(60^o + 60^o + 180^o - \alpha\right) = 60^o + \alpha.$$

ΔMAN và ΔCDN có

AM = DC (= AB); $MAN = CDN$ (= 60^o + α); AN = DN.

Do đó ΔMAN = ΔCDN (c.g.c) $\Rightarrow$ MN = CN. (1)

Chứng minh tương tự ta được ΔMAN = ΔMBC (c.g.c) $\Rightarrow$ MN = MC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN = CN = MC. Vậy ΔCMN đều.

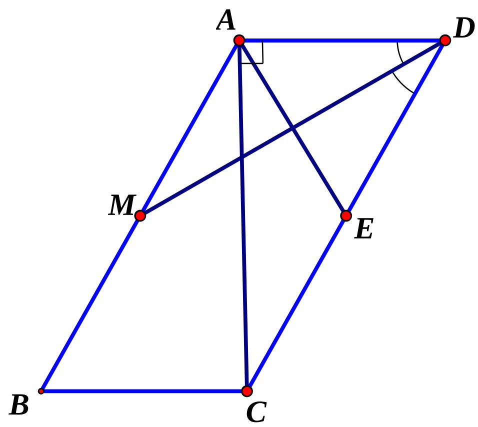
Nhận xét: Việc đặt $ABC = \alpha$ là một kĩ thuật giúp ta tính toán và so sánh góc được nhanh chóng, tiện lợi.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD có $A = 120^o$, phân giác góc D đi qua trung điểm của cạnh AB. Gọi E là trung điểm của CD. Chứng minh:

a) AB = 2AD

b) ΔADE đều, ΔAEC cân

c) $AC \perp AD$



HD:

a) Gọi M là trung điểm của cạnh AB, ta có $AMD = CDM$ (1) (so le trong).

Mặt khác, DM là phân giác góc D nên $ADM = CDM$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow AMD = ADM$, do đó tam giác ADM cân tại A.

Vậy $AD = AM = \frac{1}{2}AB$.

b) Trong hình bình hành ABCD, $A = 120^0 \Rightarrow D = 60^0$ và $AD = DE = \frac{1}{2}CD$.

Tam giác ADE cân và có một góc bằng 60^0, nên tam giác ADE đều.

Theo trên, tâm giác ADE đều nên AE = ED = EC, suy ra tam giác AEC cân tại E.

c) Vì ΔADE đều và ΔACE cân tại E nên $EAC = \frac{1}{2}AED = 30^0$ (góc ngoài của ΔAEC)

Mặt khác $EAD = 60^0$, suy ra $CAD = 90^0$.

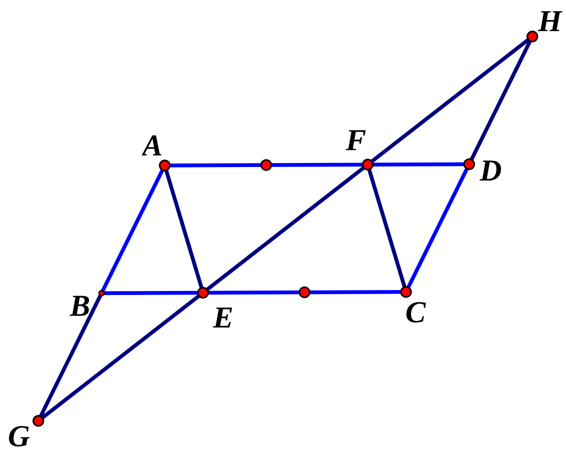
Vậy $AC \perp AD$.

Bài 10:. Cho hình bình hành ABCD. Hai điểm E, F lần lượt lấy trên BC, AD sao cho $BE = \frac{1}{3}BC$, $DF = \frac{1}{3}DA$ và EF lần lượt cắt AB, CD tại G, H. Chứng minh rằng:

a) GE = EF = FH

b) Tứ giác AECF là hình bình hành.

HD:



a)Trong ΔAGF, B trên cạnh AG, E trên cạnh FG.

Ta có $BE = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{2}AF$ và BE // AF

Suy ra BE là đường trung bình trong ΔAGF.

Do đó E là trung điểm của GF (1).

Chứng minh tương tự, DF là đường trung bình trong tam giác CHE,

Nên F là trung điểm của HE (2).

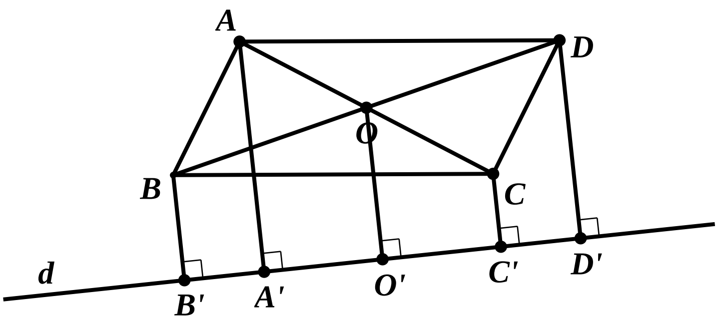
Từ (1) và (2) suy ra GE = EF = FH.

b) Ta có $AF = \frac{2}{3}AD$ và $EC = \frac{2}{3}BC$, suy ra $AF = CE$.

Mặt khác AF // CE, do vậy tứ giác AECF là hình bình hành.

Bài 11:. Cho hình bình hành ABCD có 2 đường chéo cắt nhau tại O, đường thẳng d nằm ngoài hình bình hành. Gọi A’, B’, C’, D’, O’ lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, O trên đường thẳng d. Chứng minh rằng: AA’ + CC’ = BB’ + DD’ = 2OO’

HD:



Ta có $AA' \perp d, CC' \perp d \Rightarrow AA' // CC'$ suy ra tứ giác AA’C’C là hình thang.

O là trung điểm AC và OO’ song song với AA’

Nên OO’ là đường trung bình của hình thang AA’C’C.

Từ đó ta có: AA’ + CC’ = 2OO’.

Lập luận tương tự, ta có BB’ + DD’ = 2OO’.

Vậy AA’ + CC’ = BB’ + DD’ = 2OO’.

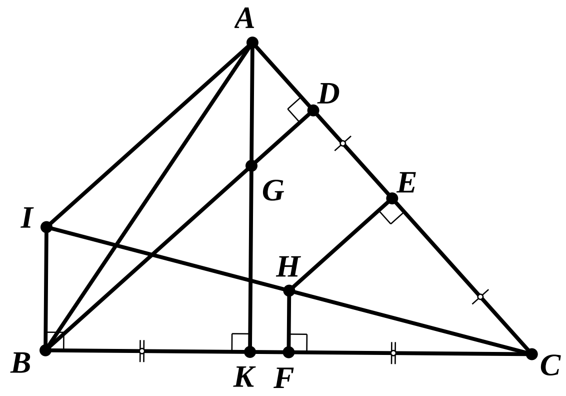
Bài 12:. Cho tam giác ABC, các đường cao AK và BD cắt nhau tại G. Vẽ các đường trung trực HE, HF của các cạnh AC, BC. Đường thẳng qua A song song với BG cắt đường thẳng qua B song song với AK tại I. Chứng minh rằng:

a) BG = AI

b) BG = 2HE

c) AG = 2HF

HD:



a) Ta có AG // BI và BG // AI nên tứ giác AIBG là hình bình hành, suy ra BG = AI.

b) IB // AG $\Rightarrow$ IB$\perp$BC, mà HF$\perp$BC,

Do đó IB // HF.

Lại có F là trung điểm của BC nên HF đi qua trung điểm của IC.

Chứng minh tương tự, HE cũng đi qua trung điểm của IC.

Từ đó ta được H là trung điểm của IC.

Trong ΔAIC, HE là đường trung bình, do đó HE = $\frac{1}{2}$AI = $\frac{1}{2}$BG. Vậy BG = 2HE.

c) Theo chứng minh trên, HF là đường trung bình trong ΔCBI.

Suy ra HF = $\frac{1}{2}$BI = $\frac{1}{2}$AG (Vì AIBG là hình bình hành).

Vậy AG = 2HF.

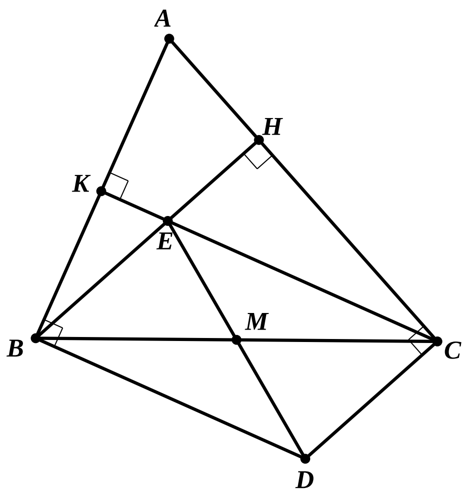
Bài 13: Cho tam giác ABC, các đường cao BH và CK cắt nhau tại E. Đường thẳng qua B vuông góc với AB và đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt nhau tại D. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Tứ giác BDCE là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng M là trung điểm của DE. Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện gì thì DE đi qua A?

c) Chứng minh rằng $BAC + BDC = 180^o$.

HD:



a) Ta có:

$$\begin{cases} BE \perp AC \\ DC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BE // DC \ (1), \begin{cases} CE \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow CE // BD \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BDCE là hình bình hành.

b) Vì BDCE là hình bình hành và M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của DE.

DE đi qua A khi và chỉ khi A, E, M thẳng hàng.

Vì E là giao điểm hai đường cao BH và CK nên AE là đường cao trong tam giác ABC.

Vậy AE qua M khi và chỉ khi đường cao và đường trung tuyến kẻ từ A trùng nhau, hay tam giác ABC cân tại A.

c) Trong tứ giác ABDC: $A + B + C + D = 360^0$, mà $B = C = 90^0$ nên $A + D = 180^0$.

Vậy $BAC + BDC = 180\,^o$.

Bài 14:. Cho $\Delta\, ABC$ nhọn (AB < AC), hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại B, vẽ đường thẳng vuông góc với AC tại C, hai đ/thẳng này cắt nhau tại D.

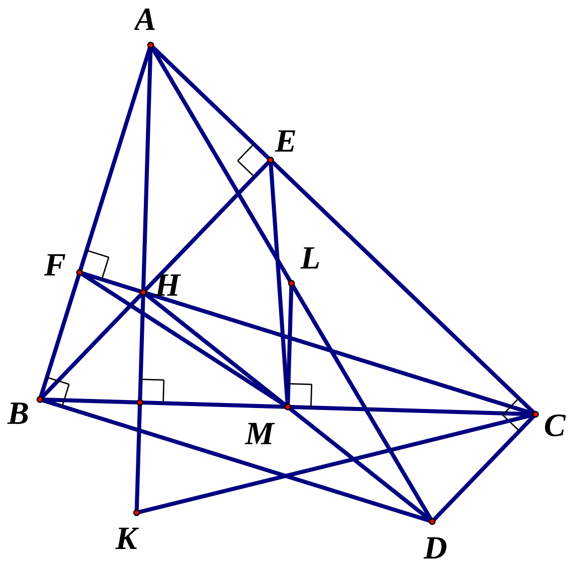
a)Chứng minh $AH \perp BC$ và tứ giác BHCD là hình bình hành.

b)Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm H, M, D thẳng hàng và ΔEMF cân.

c)Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC. Chứng minh BD = CK.

d)Đường thẳng vuông góc BC tại M cắt AD tại L. Chứng minh AH = 2ML.

HD:



a)Chứng minh AH$\perp$BC:

H là giao điểm hai đường cao BE và CF nên H là trực tâm tam giác ABC,

Do đó AH $\perp$BC.

Chứng minh tứ giác BHCD là hình bình hành.

BH$\perp$AC, DC$\perp$AC $\Rightarrow$ BH // DC (1)

CH$\perp$AB, DB$\perp$AB $\Rightarrow$ CH // DB (2)

Từ (1) và (2) suy ra BHCD là hình bình hành.

b) Hình bình hành BHCD có hai đường chéo BC và HD,

Do đó M là trung điểm BC cũng là trung điểm HD.

Vậy H, M, D thẳng hàng.

ΔFBC vuông tại F, Có FM là trung tuyến, Do đó FM = $\frac{1}{2}$BC.

ΔEBC vuông tại E, có EM là trung tuyến, do đó EM = $\frac{1}{2}$BC.

Từ đó ta được FM = EM, hay ΔEMF cân tại M.

c) Chứng minh BD = CK.

K và H đối xứng nhau qua đường thẳng BC nên CH = CK.

Tứ giác BHCD là hình bình hành nên CH = BD.

Từ đó co ta BD = CK.

d) Chứng minh AH = 2ML.

Theo trên AH $\perp$ BC, theo giả thiết ML $\perp$ BC, do đó ML // AH.

Trong ΔAHD có M là trung điểm của HD (chứng minh trên), L thuộc AD và ML // AH.

Từ đó suy ra ML là đường trung bình trong tam giác AHD.

Vậy AH = 2ML.

Bài 15: Cho hình bình hành ABCD. Vẽ hình bình hành BDCE là BDFC. CD cắt BF ở M và AM cắt CF ở N.

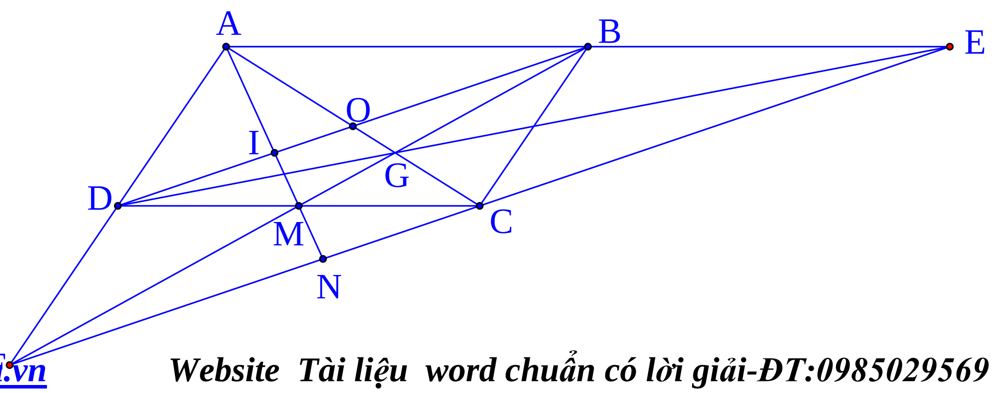
a) Chứng minh A đối xứng với E qua B.

b) Chứng minh C là trung điểm của EF.

c) Chứng minh AC, BF, DE đồng qui tại một điểm.

d) Chứng minh FC = 3NC.

HD:



a)Vì ABCD là hình bình hành nên AB // CD và AB = CD;

Vì BDCE là hình bình hành nên EB // CD và EB = CD.

Từ đó ta có A, B, E thẳng hàng và AB = EB,

Do đó A đối xứng với E qua B.

b) BDCE là hình bình hành nên CE = DB và CE // DB;

BDFC là hình bình hành nên CF = DB và CF // DB.

Do đó C, E, F thẳng hàng và CE = CF, vậy C là trung điểm của EF.

c) Dễ thấy DF = BC và DF // BC; AD = BC và AD // BC.

Do đó DF = AD và A, D, F thẳng hàng, hay D là trung điểm của AF.

Xét tam giác AEF, có AC, FB và ED là trung tuyến,

Do vậy AC, BF, BD đồng qui tại trọng tâm tam giác AEF.

d) Gọi I là giao điểm của AN và BD và O là giao điểm của AC và BD.

Ta có I là trọng tâm tam giác ACD, suy ra $IO = \frac{1}{3}DO = \frac{1}{6}DB = \frac{1}{6}FC$ (1).

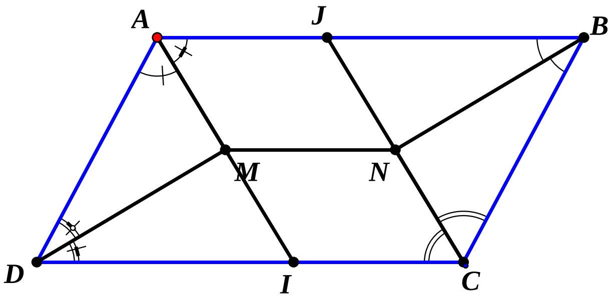
Trong tam giác CAN có O là trung điểm của AC và OI // CN nên OI là đường trung bình,

Do đó ta có IO = $\frac{1}{2}$CN (2).

Từ: (1), (2) suy ra FC = 3CN.

Bài 16:. Cho hình bình hành ABCD, các phân giác A và D cắt nhau tại M, các phân giác B và C cắt nhau tại N. Chứng minh rằng MN // AB.

HD:



Giả sử AM cắt DC tại I, CN cắt AB tại J.

Ta có $DAI = BAI = DIA$ (so le trong)

Suy ra tam giác DAI cân tại D,

Do đó M là trung điểm của AI.

Chứng minh tương tự, ta có N là trung điểm của CJ.

Xét tứ giác AICJ, có AJ // CI nên AICJ là hình thang và MN là đường trung bình trong hình thang AICJ.

Vậy MN // AB (chứng minh xong).

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F; trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho BE = CF. Vẽ hình bình hành BEFD.

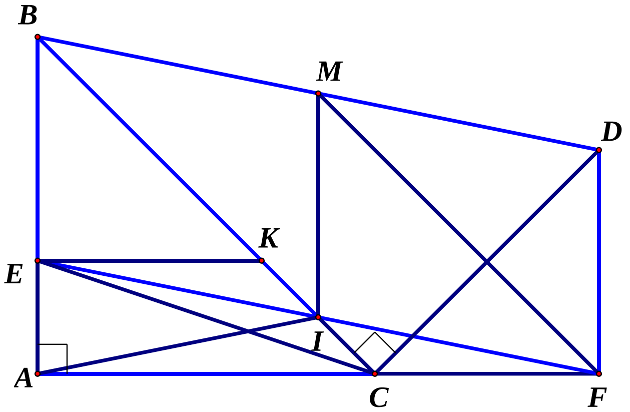
a)Chứng minh DC$\perp$BC.

b)Gọi I là giao EF và BC. Chứng minh AI = $\frac{1}{2}$DB.

c)Qua I kẻ đ/thẳng vuông góc với AF cắt BD tại M. Chứng minh MICF là hình thang cân.

d)Tìm vị trí của E trên AB để A, I, D thẳng hàng.

HD:



a) BEFD là hình bình hành suy ra DF // AB và DF = BE.

Từ đó ta có: DF $\perp$ FC và DF = CF. Hay tam giác DFC vuông cân tại F

Do đó $DCF = 45^0$.

Lại có $BCA = 45^0$, suy ra $BCD = 90^0$.

Vậy DC $\perp$ BC.

b) Dựng đường thẳng qua E vuông góc với AB, cắt BC tại K. Dễ thấy BEK là tam giác vuông cân,

Suy ra EK = BE = CF.

Mặt khác EK // CF (cùng vuông góc với AB).

Từ đó ta được EKFC là hình bình hành,

Suy ra I là trung điểm của EF.

Trong tam giác AEF vuông tại A, có AI là trung tuyến,

Do vậy: AI = $\frac{1}{2}$EF = $\frac{1}{2}$BD.

c) $MI \perp AF \Rightarrow MI$ // BE.

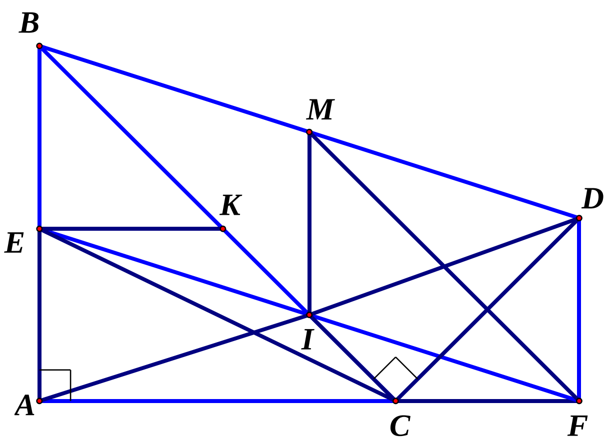
Lại có I là trung điểm của EF và BEFD là hình bình hành

Nên M là trung điểm của BD.

Suy ra MF // BI // IC và MI = DF = FC.

Vậy MICF là hình thang cân.

Giả sử A, I, D thẳng hàng.



Xét ΔABD có M là trung điểm của BD, MI // AB.

Suy ra MI là đường trung bình trong ΔABD.

Như vậy I là trung điểm của AD.

Từ đó dễ dàng suy ra AEDF là hình chữ nhật.

Khi đó: AE = FD = FC = BE. Vậy E là trung điểm của AB.

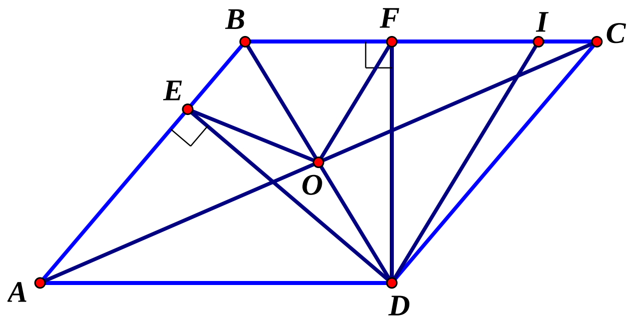
Ngược lại, nếu E là trung điểm của AB thì ta dễ dàng suy ra A, I, D thẳng hàng.

Bài 18:. Cho hình bình hành ABCD, A là góc nhọn, AC cắt BD tại O, DE $\perp$ AB tại E, DF $\perp$ BC tại F.

a) Chứng minh rằng tam giác FOE cân

b) Giả sử $BAD = m$. Tính EOF theo m.

HD:



a) Trên tia đối của tia FB lấy điểm I sao cho FI = FB. Ta có F là trung điểm của BI.

Ta giác DBI có DF vừa là trung tuyến, vừa là đường cao nên tam giác BDI cân tại D.

OF là đường trung bình trong tam giác BDI, suy ra FO = $\frac{1}{2}$ID = $\frac{1}{2}$BD.

Lập luận tương tự, ta có EO = $\frac{1}{2}$BD.

Từ đó suy ra EO = FO, hay tam giác FOE cân tại O.

b) Theo chứng minh ở câu trên, tam giác ODF cân tại O suy ra $ODF = OFD$

Ta có: $ODF + OFD = BOF$ (góc ngoài tam giác ODF) $\Rightarrow BOF = 2ODF$

Tương tự $BOE = ODE$.

Do đó $EOF = BOE + BOF = 2EDF$.

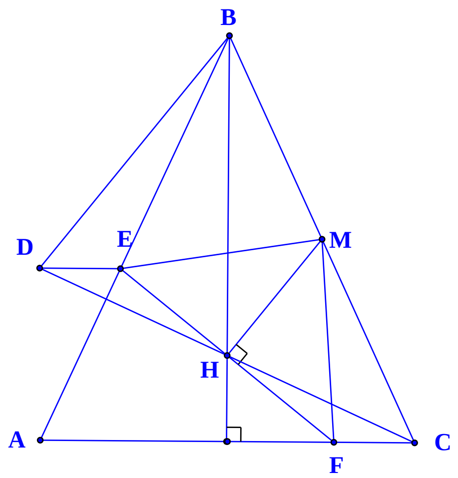
Mặt khác, $EDF + ABC + BED + BFD = 360^0 \Rightarrow EDF + ABC = 180^0$

Do đó $EDF = BAD = m$ (cùng bù với ABC)

Vậy $EOF = 2m$.

Bài 19:. Cho tam giác ABC cân tại B, trực tâm H, M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H vuông góc với MH cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng H là trung điểm của EF.

HD:



Gọi D là điểm đối xứng của C qua H.

HM là đường trung bình trong tam giác BCD nên BD // MH.

Mà MH $\perp$ HE nên HE $\perp$ BD (1).

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên BE $\perp$ HD (2).

Từ đó suy ra E là trực tâm tam giác BDH, do đó DE $\perp$ BH.

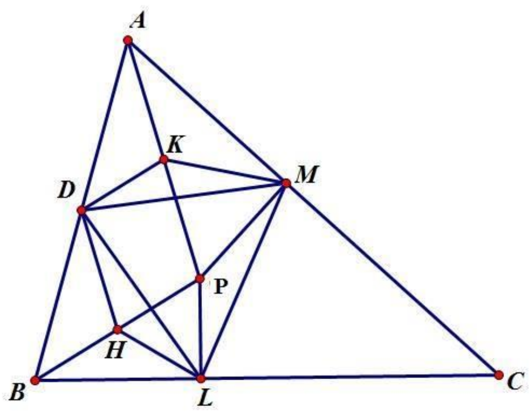
Suy ra DE // CF.

Từ đó ta chứng minh được DECF là hình bình hành, với H là giao điểm hai đường chéo.

Vậy H là trung điểm của EF.

Bài 20:. Cho tam giác ABC nhọn. Gọi B là một điểm thuộc miền trong của tam giác sao cho: $PAC = PBC$. Gọi L và M là chân đường vuông góc vẽ từ P đến BC và AC. Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh tam giác DLM cân.

HD:



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AP và BP

Theo tính chất song song của đường trung bình ta có tứ giác DHPK là hình bình hành.

Dẫn đến DK = $\frac{BP}{2}$ = HL

Tương tự KM = $\frac{AP}{2}$ = DH

Ta chứng minh hai góc DKM và DHL bằng nhau như sau :

$$DKM = DKP + PKM = DKP + 2.PAC$$

Do hình bình hành DHPK nên $DKP = DHP$, còn $PAC = PBC$ (giải thiết)

Suy ra $DKM = DHL$,

Vậy ta đã tìm đủ 3 yếu tố để cho hai tam giác DKM và tam giác DHL bằng nhau.

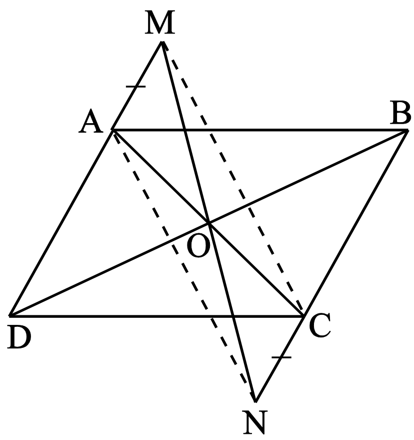
Suy ra DM = DL (điều phải chứng minh)

Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất về đường chéo của hình bình hành

Bài 1: Cho hình bình hành ABCD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho AM = CN. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AC, BD gặp nhau tại một điểm.

HD:



Tìm cách giải

AC và BD là hai đường chéo của hình bình hành ABCD nên chúng cắt nhau tại trung điểm O của AC.

Ta còn phải chứng minh MN đi qua O. Muốn vậy chỉ cần chứng minh AMCN là hình bình hành để suy ra đường chéo MN đi qua trung điểm O của AC.

Trình bày lời giải

Tứ giác AMCN có AM // CN và AM = CN nên là hình bình hành.

Suy ra hai đường chéo MN và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC.

Mặt khác, ABCD là hình bình hành nên hai đường chéo BD và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC.

Vậy các đường thẳng MN, BD và AC cùng đi qua trung điểm O của AC.

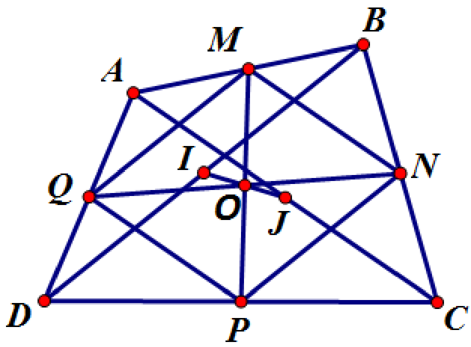
Nhận xét: Hai hình bình hành AMCD và ABCD có chung đường chéo AC thì các đường chéo của chúng đồng quy tại trung điểm của đường chéo chung.

Bài 2: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MP, QN, IJ đồng quy tại một điểm.

HD:



a)Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC

Suy ra MN//AC và MN = $\frac{1}{2}$AC;

PQ là đường trung bình của tam giác ADC

Suy ra PQ// AC và PQ = $\frac{1}{2}$AC.

Do đó MN//PQ và MN = PQ, suy ra MNPQ là hình bình hành.

b) Gọi O là trung điểm MP thì O cũng là trung điểm QN.

Tam giác ABD có MI là đường trung bình nên MI//AD và MI = $\frac{1}{2}$AD.

Tam giác ACD có PJ là đường trung bình nên PJ//AD và PJ = $\frac{1}{2}$AD.

Suy ra MI//PJ và MI = PJ$\Rightarrow$MỊPJ là hình bình hành.

Mà O là trung điểm MP nên O cũng là trung điểm IJ.

Vậy các đoạn thẳng MP, QN, IJ đồng quy tại O.

Bài 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và I, K là trung điểm các đường chéo AC, BD. Chứng minh:

a) Các tứ giác MNPQ, INKQ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng MP, NQ, IK đồng quy.

HD:

a) MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN =1/2.AC và MN//AC

PQ là đường trung bình của tam giác DAC nên PQ =1/2.AC và PQ //AC

Suy ra MN =PQ và MN // PQ nên MNPQ là hình bình hành.

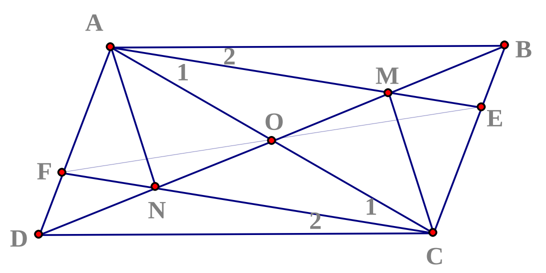
Chứng minh tương tự: QI =KN và QI // KN

b) MNPQ và INKQ là hình bình hành nên MP.NQ,IK đồng quy tại trung điểm của NQ.

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OD

a). Chứng minh rằng tứ giác AMCN là hình bình hành

b). Tia AM cắt BC ở E, tia CN cắt AD ở F. Chứng minh rằng AC, BD, EF đồng quy



HD :

a). Cách 1: Ta có $\begin{cases} OA = OC \\ OM = ON \end{cases} \Rightarrow \lozenge AMCN$ là hình bình hành

Cách 2: $\Delta AOM = \Delta OCN (cgc) \Rightarrow AM // CN, AM = CN \Rightarrow \lozenge AMCN$ là hình bình hành.

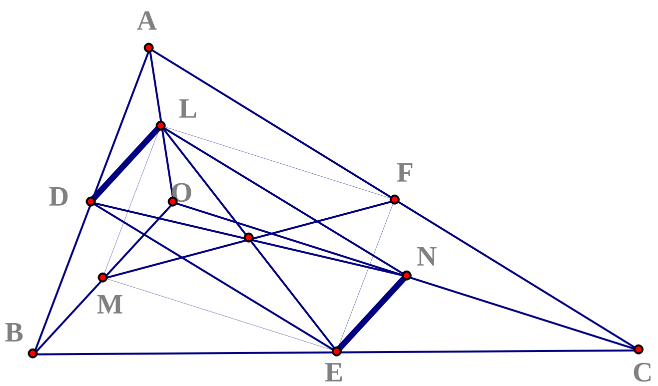
b). Ta có AC và BD cắt nhau tại O, ta đi chứng minh AC cắt EF tại O

+) $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 (a) \Rightarrow AE // CF$

+) Ta có: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow \Delta ABE = \Delta CDF \Rightarrow AE = CF$

Vậy $\lozenge AECF$ là hình bình hành $\Rightarrow AC \cap BD \equiv O$

Bài 5:Cho tam giác ABC và O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC Chứng minh rằng EL, EM, DN đồng quy.



HD :

Gọi I là trung điểm cảu LE, ta có: DL // EN // OB

Và $DL = EN = \frac{1}{2}OB \Rightarrow \lozenge DENL$ là hình bình hành

Chứng minh tương tự ta có: LMEF là hình bình hành $\Rightarrow EL, FM, DN$ đồng quy tại 1 điểm.

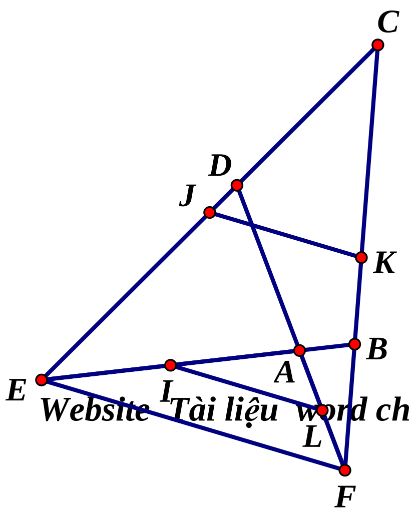
Bài 6:Cho hình bình hành *ABCD*, gọi O là giao điểm hai đường chéo. Trên *AB* lấy điểm *K*, trên CD lấy điểm *I* sao cho *AK* = *CI*. Chứng minh ba điểm *K*, *O*, *I* thẳng hàng.

HD :

Chứng minh được AKCI là hình bình hành $\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 7:. Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại E, đường thẳng BC cắt đường thẳng AD tại F. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AE, CE, CF, AF. Chứng minh rằng IL//JK.

HD :



Xét ΔAEF, I là trung điểm của AE, L là trung điểm của AF nên IL là đường trung bình.

Ta có IL // EF (1).

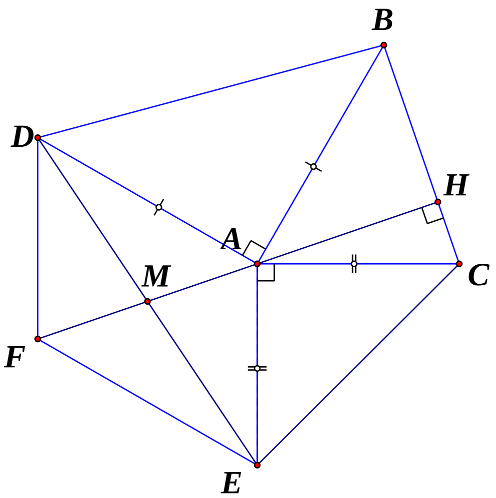
Tương tự, xét ΔCEF, JK là đường trung bình nên JK // EF (2).

Mặt khác, I, J, K lần lượt nằm trên ba cạnh của tam giác EBC nên I, J, K không thẳng hàng.

Vậy từ (1) và (2) suy ra IL // JK.

Bài 8: Cho tam giác nhọn ABC. Về phía ngoài tam giác, dựng các tam giác vuông cân ABD và ACE vuông tại A. Chứng tỏ rằng đường trung tuyến AM của tam giác ADE vuông góc với BC.

HD :



Gọi H là giao điểm của AM và BC.

Dựng hình bình hành ADFE.

Ta có $BAC + DAE = 180^0$.

Suy ra $FEA = BAC$ (cùng bù với góc DAE).

Hai tam giác CAB và AEF có:

AC = EA.

CAB = AEF (theo trên).

AB = EF.

Suy ra $\Delta CAB = \Delta AEF$ (c-g-c)

$\Rightarrow ACB = EAF$.

Mặt khác $CAH + EAF = 90^0$

Do đó $CAH + ACB = 90^0$

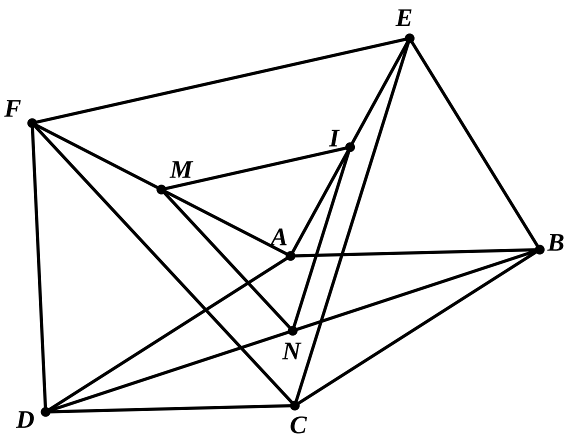
Vậy $AHC = 90^0$.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD. Dựng các tam giác đều ABE, ADF ở ngoài hình bình hành ABCD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AF, BD, AE. Chứng minh rằng:

a) Tam giác CEF là tam giác đều.

b) $MNI = 60^o$.

HD :



a) Ta có: $EBC = EBA + ABC = 60^0 + ABC$, $FDC = FDA + ADC = 60^0 + ADC$.

Mặt khác, vì tứ giác ABCD là hình bình hành nên $ABC = ADC$,

Suy ra $EBC = FDC$.

Hai tam giác EBC và FDC có:

EB = CD (cùng bằng AB), $EBC = CDF$, BC = DC (cùng bằng AD)

Suy ra $\Delta EBC = \Delta FDC$ (c-g-c), từ đó ta có EC = FC (1).

$$EAF = 360^0 - \left(EAB + FAD + DAB\right) = 240^0 - DAB$$
$$= 240^0 - \left(180^0 - ABC\right) = 60^0 + ABC$$

Do đó $EAF = EBC$. Hai tam giác EAF và EBC có:

EA = EB, $EAF = EBC$ và AF = BC, do vậy $\Delta EAF = \Delta EBC$,

Từ đó ta có EF = EC (2).

Từ (1) và (2) suy ra EC = CF = FE. Vậy ΔCEF đều.

b) N là trung điểm của BD cũng là trung điểm của AC.

Như vậy, MN, IN, MI lần lượt là đường trung bình trong các tam giác AFC, AEC và AEF.

Ta có:

$$MN = \frac{1}{2}FC,\ IN = \frac{1}{2}EC,\ MI = \frac{1}{2}EF.$$

Theo trên, $FC = EC = EF \Rightarrow MN = IN = MI$. Suy ra MNI là tam giác đều.

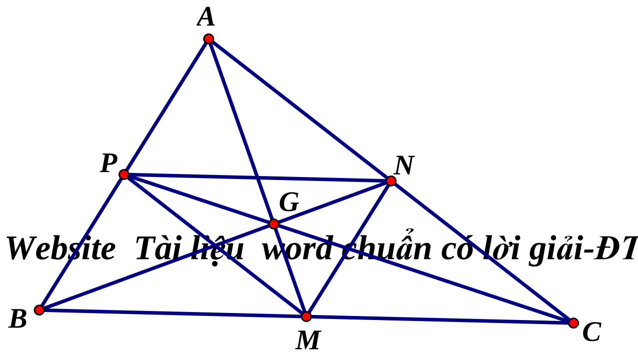
Vậy $MNI = 60^o$.

Bài 10:. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Lấy điểm G trên AM sao cho AG = 2GM.

a) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Gọi N, P lần lượt là trung điểm của CA, AB. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của tam giác MNP.

HD :



a)AG = 2GM

Suy ra AM = AG + GM = AG + $\frac{1}{2}$AG = $\frac{3}{2}$AG.

Điểm G trên đoạn AM thỏa mãn AG = $\frac{2}{3}$AM,

Do đó G là trọng tâm tam giác ABC

b) Ta có PN = $\frac{1}{2}$ BC = MC và PN // MC,

Do đó tứ giác CMPN là hình bình hành.

Suy ra đường thẳng CP đi qua trung điểm của MN.

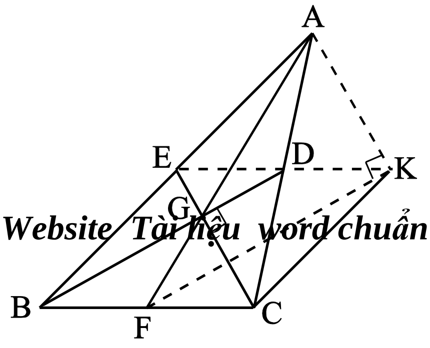
Vì CP là đường trung tuyến trong tam giác ABC nên CP đi qua G,

Do vậy PG là đi qua trung điểm của MN.

Chứng minh tương tự, NG đi qua trung điểm của MP.

Vậy G là trọng tâm tam giác MNP.

Bài 11: Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến vuông góc với nhau thì tổng các bình phương của hai đường trung tuyến này bằng bình phương đường trung tuyến thứ ba.



HD:

Tìm cách giải

Kết luận của bài toán gợi ý cho ta vận dụng định lí Py-ta-go.

Muốn vậy phải vẽ hình phụ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng ba đường trung tuyến.

Trình bày lời giải

Giả sử tam giác ABC là tam giác có hai đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau.

Ta phải chứng minh $BD^2 + CE^2 = AF^2$ (AF là đường trung tuyến thứ ba).

Trên tia ED lấy điểm K sao cho D là trung điểm của EK.

Tứ giác AKCE có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

$\Rightarrow$ AK // CE và AK = CE.

Ta có DE // BC và $DE = \frac{1}{2}BC$ $\Rightarrow$ DK // BF và DK = BF.

Vậy tứ giác DKFB là hình bình hành $\Rightarrow$ KF // BD và KF = BD.

Mặt khác, $BD \perp CE$ nên $AK \perp KF$.

Do đó ΔKAF vuông tại A $\Rightarrow AK^2 + KF^2 = AF^2 \Rightarrow CE^2 + BD^2 = AF^2$.

Bài 74. Cho hình chữ nhật ABCD. Tia phân giác góc A cắt tia phân giác góc D tại M, tia phân giác góc B cắt tia phân giác góc C tại N. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của DM, CN với AB. Chứng minh rằng:

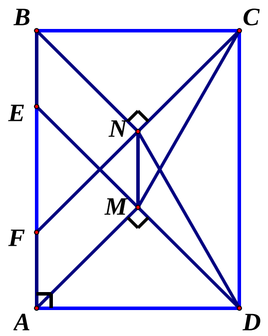
a) AM = DM = BN = CN = ME = NF.

b) Tứ giác DMNC là hình thang cân.

c) AF = BE.

d) AC, BD, MN đồng quy.

HD:



a) Dễ thấy các tam giác ADM, BCN, AME, BNF là các tam giác vuông cân với các đỉnh lần lượt là M, N, M, N.

Do đó AM = DM = EM và BN = CN = FN.

Mặt khác, vì AD = BC nên $\Delta AMD = \Delta CNB \Rightarrow AM = BN$.

Vậy AM = DM = EM = BN = CN = FN.

b) Tam giác ADE vuông tại A có $ADE = 45^0 \Rightarrow AED = 45^0$.

Lại có $ABN = 45^0$, do đó BN // EM.

Theo trên BN = EM, do vậy BNME là hình bình hành,

Suy ra MN // BE // CD.

Mặt khác CN = DM. Vậy CDMN là hình thang cân.

c) Chứng minh tương tự như trên, ta có AFNM cũng là hình bình hành.

Từ đó suy ra AF = BE = MN.

d) Theo chứng minh trên ta có BN // MD và BN = MD,

Do đó BNDM là hình bình hành,

Suy ra BD và MN cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

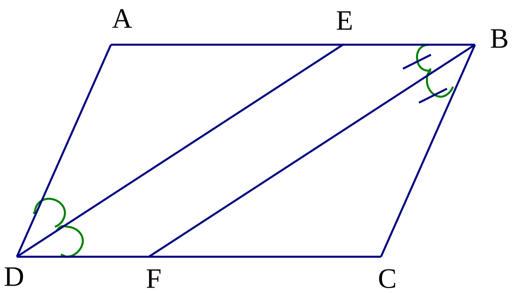
Mặt khác BD và AC cũng cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Vậy AC, BD, MN đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho hình bình hành *ABCD* (*AB* > *BC*). Tia phân giác của góc D cắt *AB ở E*, tia phân giác của góc *B* cắt CD ở *F*.

a) Chứng minh *DE//BE*. b) Tứ giác *DEBF* là hình gì?



HD :

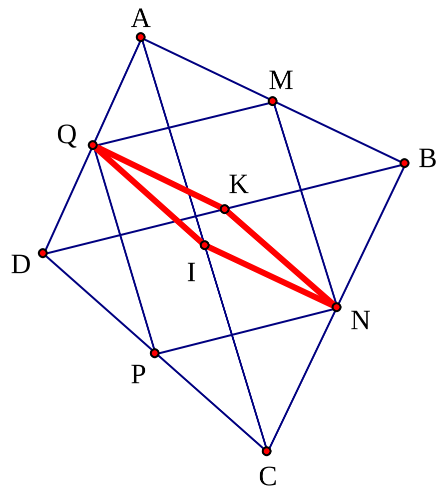
a) Ta có $AED = EDC$ và $ABF = EDC \Rightarrow DE // BF$ (có góc ở vị trí đồng vị bằng nhau).

b) Từ câu a) suy ra DEBF là hình bình hành.

Bài 2:Cho tứ giác *ABCD*. Gọi *M*, *N*, *P*, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DA* và *I*, *K* là trung điểm các đường chéo *AC*, *BD*. Chứng minh:

a) Các tứ giác *MNPQ*, *INKQ* là hình bình hành.

b) Các đường thẳng *MP, NQ, IK* đồng quy.



HD :

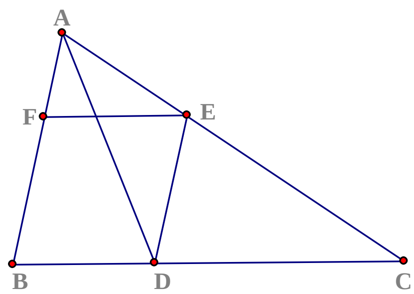
a) Tứ giác có các cạnh đối song song hoặc tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành

b) Sử dụng tính chất đường chéo của hình bình hành ta có đpcm

Bài 3: Cho tam giác ABC. Từ 1 điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D. Giả sử AE = BF, chứng minh

a. Tam giác AED cân

b. AD là phân giác của góc A



HD :

a. Chứng minh BDEF là hình bình hành $\Rightarrow ED = BF = AE \Rightarrow \Delta AED$ cân tại E

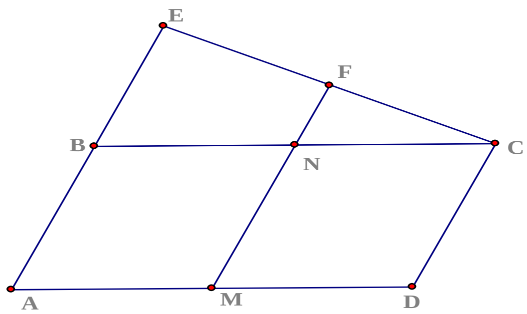
b. Ta có $B\hat{A}D = D\hat{A}C (= ADE) \Rightarrow AD$ là phân giác của góc A

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD có AD = 2AB. Từ C vẽ CE vuông góc với AB. Nối E với trung điểm M của AD. Từ M vẽ MF vuông góc với CE cắt BC tại N

a. Tứ giác MNCD là hình gì?

b. Tam giác EMC là tam giác gì?

c. Chứng minh $\hat{BAD} = 2\hat{AEM}$



HD :

a. Ta có MNCD là hình bình hành

b. Chứng minh được F là trung điểm của CE $\Rightarrow \Delta ECM$ cân tại M

c. Chứng minh được $A\hat{E}M = FME = F\hat{M}C \Rightarrow C\hat{M}D = D\hat{C}M = M\hat{C}B$ cân tại M

mà AE // MF nên $B\hat{A}D = F\hat{M}D = 2C\hat{M}D = 2A\hat{E}M$