BÀI 8: ĐỐI XỨNG TÂM

I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hai điểm đối xứng qua một điểm:

Định nghĩa: Hai điểm M, M’ gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng MM’.

Quy ước: Nếu điểm M trùng với điểm O thì điểm đối xứng với điểm M là điểm M’ cũng trùng với điểm O.

Tính chất: M đối xứng với M’ qua O $\Rightarrow$ OM = OM’

2. Hai hình đối xứng qua một điểm:

Định nghĩa: Hai hình H và H’ gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình H có điểm đối xứng qua O thuộc hình H’. Khi đó, điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình H và H’.

Định lí: Nếu điểm A và A’, B và B’, C và C’ đối xứng với nhau qua tâm O thì:

Đoạn thẳng AB đối xứng với đoạn thẳng A’B’ qua tâm O và AB = A’B’.

ABC, $A'B'C'$ đối xứng với nhau qua tâm O và $ABC = A'B'C'$

ΔABC, $\Delta A'B'C'$ đối xứng với nhau qua tâm O và $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

Đường thẳng AB đối xứng với đường thẳng A’B’ qua O và AB//A’B’ (tính chất này sử dụng phải chứng minh, dựa vào tính chất của hình bình hành)

3. Hình có tâm đối xứng:

Định nghĩa: Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H (hay hình H có tâm đối xứng là O) nếu mỗi điểm thuộc hình H có điểm đối xứng cũng thuộc hình H.

Định lí: Giao điểm 2 đường chéo của hb hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

Nhận xét: Từ định lí trên, ta suy ra rằng "Nếu có một đường thẳng đi tâm đối xứng của hình bình hành và cắt 2 cạnh đối diện của hình bình hành tại A, B thì A và B đối xứng với nhau qua tâm O."

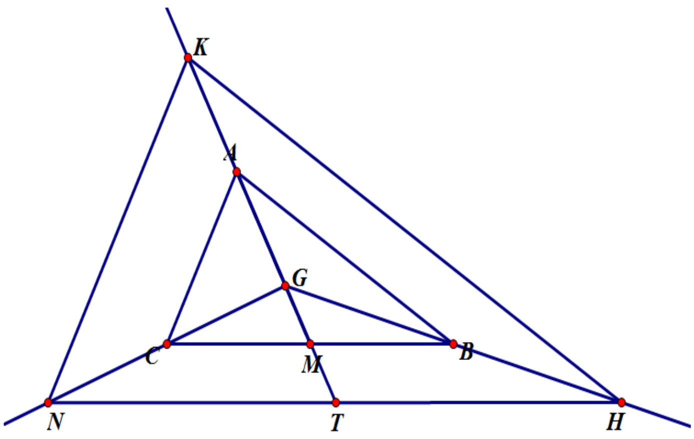
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC trung tuyến AM và G là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi K, H, N lần lượt là các điểm đối xứng của G qua A, B, C. Gọi T là giao điểm của tia KG với NH.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của GT.

b) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác KNH.

HD:



a) Dễ thấy A, B, C lần lượt là trung điểm của GK, KH, GN.

Xét tam giác NGH có BT là đường trung bình

$\Rightarrow$BT// GN và BT = $\frac{1}{2}$GN hay BT//GC và BT = GC

Suy ra BTCG là hình bình hành.

M là giao điểm 2 đường chéo GT và BC nên M là trung điểm của GT.

b) Xét tam giác GNT có CM là đường trung bình nên CM = $\frac{1}{2}$NT

Tương tự, ta có BM = $\frac{1}{2}$HT.

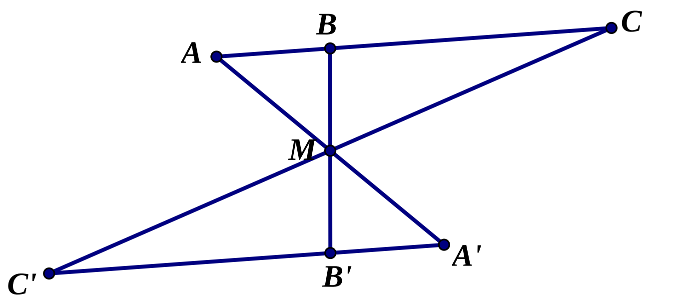
Mà CM = BM nên NT = HT $\Rightarrow$T là trung điểm NH. (1)

Ta lại có KA = AG = 2GM = GT, suy ra KG = 2GT hay KG = $\frac{2}{3}$KT. (2)

Từ (1) và (2) suy ra G là trọng tâm tam giác KNH.

Bài 2:. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm M không thuộc đường thẳng đó. Gọi A’, B’, C’ lần lượt là điểm đối xứng của A, B, C qua M. Chứng minh A’, B’, C’ thẳng hàng.

HD:



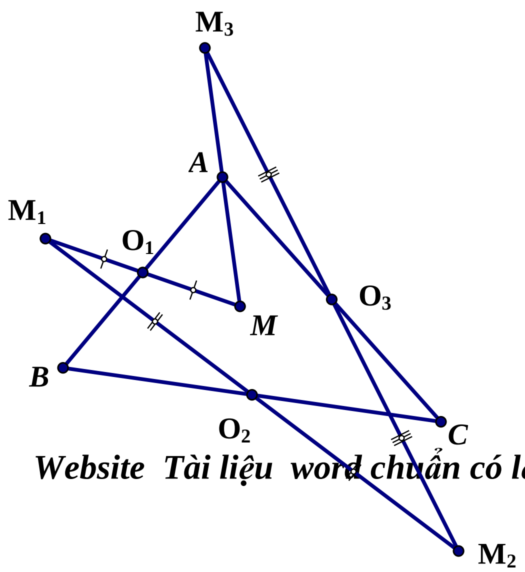
Giả sử A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó, ta có AB + BC = AC (1).

Các đoạn thẳng A’B’, B’C’ và A’C’ lần lượt đối xứng với các đoạn thẳng AB, BC, AC qua điểm M nên ta có A’B’ = AB, B’C’ = BC, A’C’ = AC.

Kết hợp đẳng thức (1) ta được A’B’ + B’C’ = A’C’. Vậy A’, B’, C’ thẳng hàng.

Bài 3:. Cho tam giác ABC. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. M là một điểm tùy ý không thuộc các cạnh của tam giác ABC. Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua O_1, M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua O_2, M_3 là điểm đối xứng của M_2 qua O_3. Chứng M_3 đối xứng với M qua A.

HD:



Để dàng chứng minh được các tứ giác $AMBM_1$, BM_2CM_1, CM_2AM_3 là các hình bình hành (dựa vào tính chất các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

Từ đó ta có: $AM = M_1B = M_2C = M_3A$,

$AM // M_1B // M_2C$, $AM_3 // M_2C$

Từ đó $AM = AM_3$ và A, M, M_3 thẳng hàng.

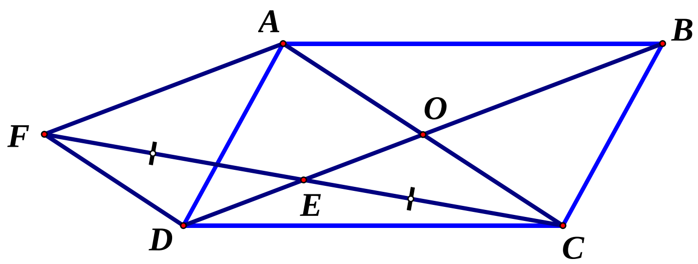
Vậy A là trung điểm của MM_3, hay A và M_3 đối xứng nhau qua A.

Bài 4:. Cho hình bình hành ABCD có tâm đối xứng O, E là điểm bất kỳ trên cạnh OD. Gọi F là điểm đối xứng của C qua E.

a) Chứng minh rằng AF // BD.

b) Điểm E ở vị trí nào trên OD để tứ giác ODFA là hình bình hành.

HD:



a) Ta có O là trung điểm AC và E là trung điểm CF nên OE là đường trung bình trong tam giác ACF,

Từ đó ta có AF // BC.

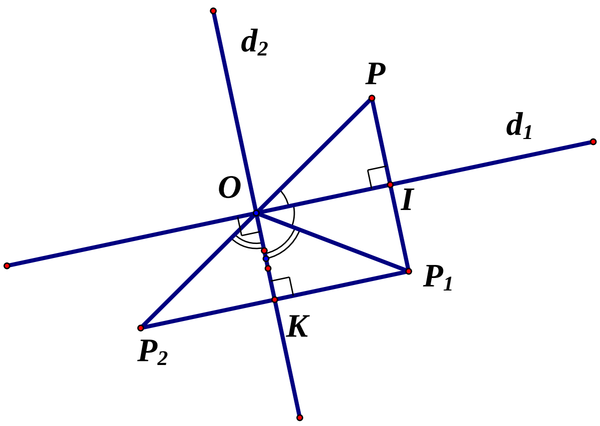
b) ODFA là hình bình hành khi và chỉ khi FD = AO và FD // AO, khi và chỉ khi FD = OC và FD // OC, hay OCDF là hình bình hành.

Vì E là trung điểm của CF, do đó OCDF là hình bình hành khi và chỉ khi E là trung điểm của OD.

Vậy ODFA là hình bình hành khi và chỉ khi E là trung điểm của DO.

Bài 5:. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc nhau tại O và một điểm P không nằm trên d_1, d_2. Gọi P_1 là điểm đối xứng của P qua d_1, P_2 là điểm đối xứng của P_1 qua d_2. Chứng minh hai điểm P_1 và P_2 đối xứng nhau qua O.

HD:



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của PP_1, P_1P_2.

Dễ dàng nhận thấy $OP = OP_1 = OP_2$ (1).

$$POP_2 = POP_1 + P_1OP_2$$

$$= 2\left(IOP_1 + P_1OK\right) = 2IOK = 180^0 \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm PP_1.

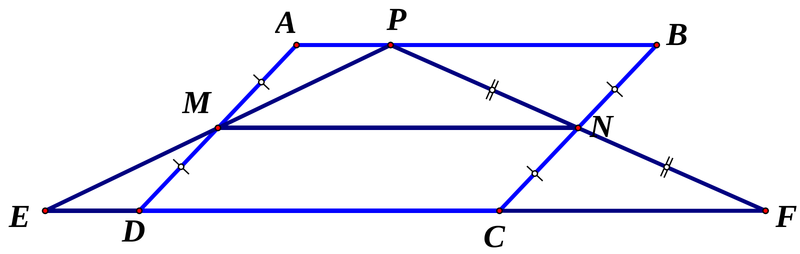
Vậy hai điểm P và P_1 đối xứng nhau qua O.

Bài 6:. Cho hình bình hành ABCD, điểm P trên AB. Gọi M, N là các trung điểm của AD, BC; E, F lần lượt là điểm đối xứng của P qua M, N. Chứng minh rằng:

a) E, F thuộc đường thẳng CD.

b) EF = 2CD

HD:



a)M là trung điểm của AD và PE

Suy ra tứ giác APDE là hình bình hành do đó DE // AP.

Tương tự BPCF là hình bình hành,

Suy ra FC // PB.

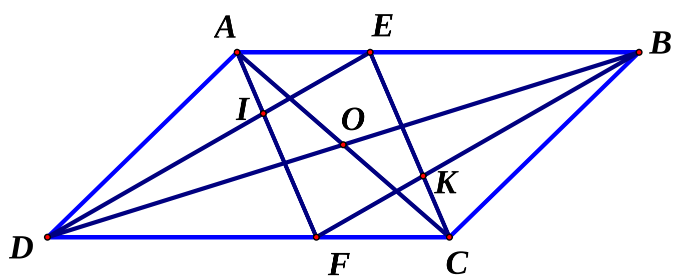
Mặt khác CD // AB nên suy ra các điểm E, F nằm trên đường thẳng CD.

b) Trong tam giác PEF, MN là đường trung bình

Suy ra EF = 2MN = 2CD.

Bài 7:. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm hai đường chéo. Lấy điểm E trên cạnh AB, F trên cạnh CD sao cho AE = CF. gọi I là giao điểm của AF và DE; K là giao điểm của BF và CE. Chứng minh I là điểm đối xứng của của K qua O.

HD:



Ta có AE = CF và AE // CD nên AECF là hình bình hành.

Tương tự, BEDC cũng là hình bình hành.

Do đó ta có O là trung điểm của EF và IEKF là hình bình hành (hai cặp cạnh đối diện song song).

Từ đó suy ra O là trung điểm của IK.

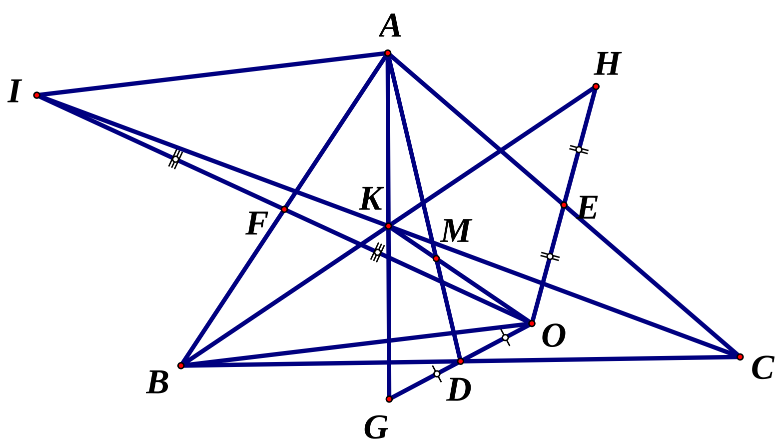
Vậy hai điểm I và K đối xứng nhau qua O.

Bài 8:. Cho điểm O tùy ý nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi G, H, I theo thứ tự là các điểm đối xứng với O qua D, qua E, qua F. Chứng minh rằng:

a) Ba đường AG, BH, CI đồng quy tại một điểm. (Gọi điểm đồng quy là K)

b) Khi O di chuyển trong tam giác ABC thì đường thẳng OK luôn đi qua một điểm cố định.

HD:



a) Ta có các tứ giác AIBO và BGCO là các hình bình hành (vì các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Suy ra AI = OB, AI // OB và CG = BO, CG // BO ; AI = CG, AI // CG.

Ta được tứ giác AIGC cũng là hình bình hành,

Suy ra AG cắt CI tại trung điểm mỗi đoạn.

Chứng minh tương tự, ta cũng có AI cắt BH tại trung điểm mỗi đoạn.

Vậy AG, BH, CI đồng quy tại K, là trung điểm của mỗi đoạn.

b) Trong tam giác AGO, AD và OK là hai đường trung tuyến.

Gọi M là giao điểm của OK và AD thì M là trọng tâm tam giác AGO.

Ta có điểm M trên cạnh AD, thỏa mãn AM = 2MD, suy ra M là trọng tâm tam giác ABC, là điểm cố định.

Vậy khi O thay đổi, đường thẳng OK luôn đi qua trọng tâm tam giác ABC.