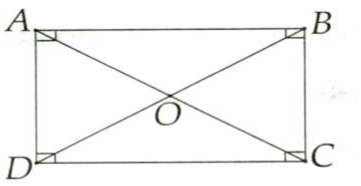
BÀI 9: ÔN TẬP HÌNH CHỮ NHẬT

I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông



$\lozenge ABCD$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow \begin{cases} \lozenge ABCD \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} \end{cases}$

Nhận xét: Hình chữ nhật cũng là 1 hình bình hành, 1 hình thang cân

2. Tính chất: Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân

Tính chất về cạnh: Các cạnh đối bằng nhau, song song với nhau

Tính chất về góc: Bốn góc bằng nhau

Tính chất về đường chéo: Hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

3. Dấu hiệu nhận biết

Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật

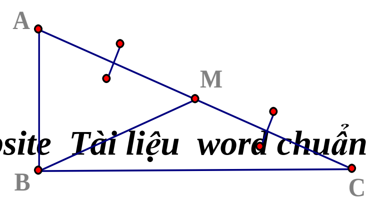
Hình thang cân có 1 góc vuông là hình chữ nhật

Hình bình hành có 1 góc vuông là hình chữ nhật

Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật

4. Ứng dụng vào tam giác vuông

Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền, ta có: $BM = \frac{1}{2}AC$



Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông: $BM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông

II.CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh 1 tứ giác là hình chữ nhật

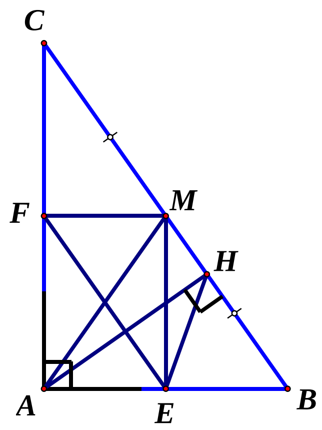
Phương pháp giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh 1 tứ giác là hình chữ nhật

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), trung tuyến AM. E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC.

a) Chứng minh rằng AEMF là hình chữ nhật.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh EHMF là hình thang cân.

HD:



a) Theo tính chất tam giác vuông, ta có AM = MC = MB.

Tam giác CMA cân tại M và F là trung điểm AC suy ra MF $\perp$ AC.

Chứng minh tương tự: ME $\perp$ AB.

Vậy AEMF là hình chữ nhật.

b) Ta có EF là đường trung bình trong tam giác ABC,

Suy ra EF // BC.

Theo giả thiết, AB < AC suy ra HB < HA, do đó H thuộc đoạn MB.

Vậy EHMF là hình thang.

Tam giác HAB vuông tại H, ta có HE = EA = EB = MF,

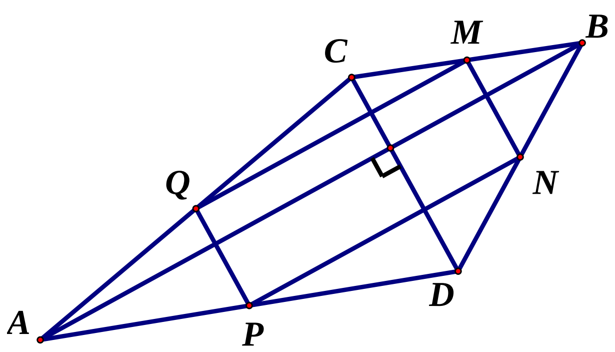
Từ đó suy ra EHMF là hình thang cân.

Bài 2:. Cho tứ giác ACBD có $AB \perp CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, BD, AD, AC. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

b) Biết BC // AD, BC = 4cm, AD = 16cm. Tính MP.

HD:



a)Trong tam giác ACD, PQ là đường trung bình,

Suy ra PQ // CD.

Tương tự, MN // CD, MQ // AB, NP // AB.

Từ đó ta có MN // PQ và NP // MQ

Suy ra MNPQ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MN \perp MQ$.

Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

b) Ta có MP = NQ.

Theo giả thiết thì BCAD là hình thang với hai đáy BC, AD và QN là đường trung bình nên

$MP = NQ = \frac{1}{2}(BC + AD) = 10cm$.

Bài 3: Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K.

a) Chứng minh tứ giác AHCE là hình chữ nhật.

b) Chứng minh HG = GK = KE.

HD:

a)AHCE là hình bình hành(hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Mà AH vuông góc CB nên AHCE là hình chữ nhật.

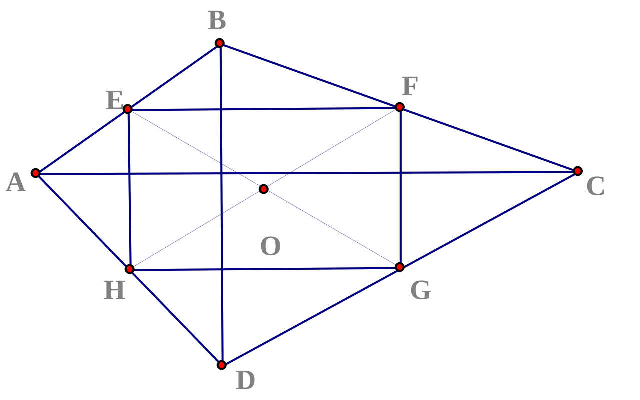
b) ΔEAC có K là trọng tâm nên EK = 2KI

Tương tự: GH = 2GI mà IE = IH nên HG = GK = KE

Bài 3:Cho tứ giác ABCD có $AC \perp BD \equiv O$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng

a). OE + OF + OG + OH bằng nửa chu vi tứ giác ABCD

b). Tứ giác EFGH là hình chữ nhật



HD:

a). Ta có $OE + \text{OF+OG+OH=}\dfrac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) = \dfrac{1}{2}P_{ABCD}$

b. Có $\begin{cases}\text{EF//GH}\\ \text{EF=G}\end{cases} \Rightarrow \Diamond\text{EFGH}$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC // \text{EF} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{EF} \perp \text{BD} \\ \text{BD//EH} \end{cases} \Rightarrow EH \perp \text{EF} \Rightarrow \lozenge\text{EFGH}$ là hình chữ nhật (dhnb)

Bài 3: Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA; D, E, F lần lượt là trung điểm các đoạn HA, HB và HC.

a) Chứng minh rằng các tứ giác MNFD và MEFP là các hình chữ nhật.

b) Để các đoạn MD, ME và DP bằng nhau thì tam giác ABC phải là tam giác gì?

HD:

a), MNFD là hình bình hành mà MD//BH; DF//AC

Mà BH vuông góc AC

Nên MD vuông góc DF

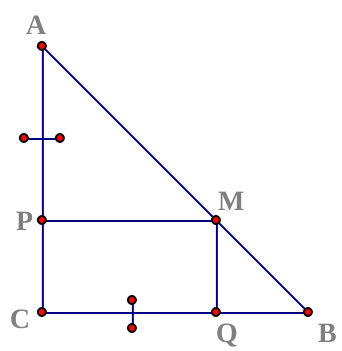
Suy ra MNFD là hình chữ nhật.

b) 2MD=BH; 2EM=HA; 2DP=HC

Nên MD=ME=DP khi HA=HB=HC

Suy ra ΔABC là tam giác đều.

Bài 4:Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho AP = CQ. Từ điểm P vẽ PM // BC (M thuộc AB). Chứng minh tứ giác PCQM là hình chữ nhật



HD:

Ta có ΔABC vuông cân $\Rightarrow \hat{A} = 45^0 \Rightarrow \Delta APM$ vuông cân $\Rightarrow AP = PM$

Theo giải thiết $AP = CQ \Rightarrow PM = CQ$

Lại có $PM // CQ \Rightarrow \lozenge PMCQ$ là hình bình hành

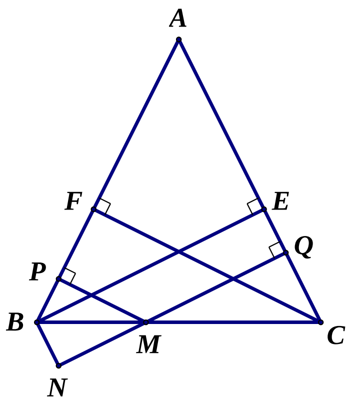
Mặt khác $\hat{C} = 90^0 \Rightarrow \lozenge PMCQ$ là hình chữ nhật (dhnb)

Bài 5:. Cho tam giác ABC cân tại A (AB > BC) có hai đường cao BE, CF và điểm M bất kỳ trên cạnh BC. Vẽ MP $\perp$ AB tại P, MQ $\perp$ AC tại Q. Trên tia đối của tia MQ lấy điểm N sao cho MN = MP. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BEQN là hình chữ nhật.

b) MP + MQ = CF.

HD:



a) Ta có $\mathrm{PMB} + \mathrm{PBM} = 90^0$; $\mathrm{QMC} + \mathrm{QCM} = 90^0$

Vì $\mathrm{PBM} = \mathrm{QCM} \Rightarrow \mathrm{PMB} = \mathrm{QMC}$

Do đó ta có: $\mathrm{PMB} = \mathrm{NMB}$

Kết hợp giả thiết MP = MN, suy ra P và N đối xứng nhau qua đường thẳng BM.

$\mathrm{NBM} = \mathrm{PBM} = \mathrm{QCM} \Rightarrow$ BN // QC (góc so le trong bằng nhau).

Mặt khác, BE // NQ (cùng vuông với AC), suy ra BNQE là hình bình hành.

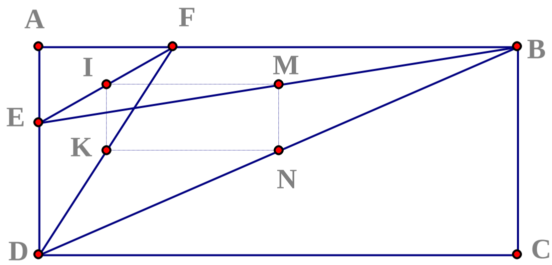
Vì hình bình hành BNQE có một góc vuông nên BNQE là hình chữ nhật.

b) Ta có MP + MQ = MN + MQ = NQ = BE.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta ECB = \Delta FBC \Rightarrow BE = CF$.

Vậy MP + MQ = CF.

Bài 6: Cho hình chữ nhật ABCD, E thuộc AD, F thuộc AB. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của EF, DF, BE, BD. Chứng minh rằng IN = KM



HD:

Ta đi chứng minh tứ giác IKMN là hình chữ nhật

+) Theo giả thiết có : $\begin{cases} IM \,//\, KN (//\, FB) \\ IM = KN = \dfrac{1}{2} FB \end{cases} \Rightarrow \lozenge IMKN$

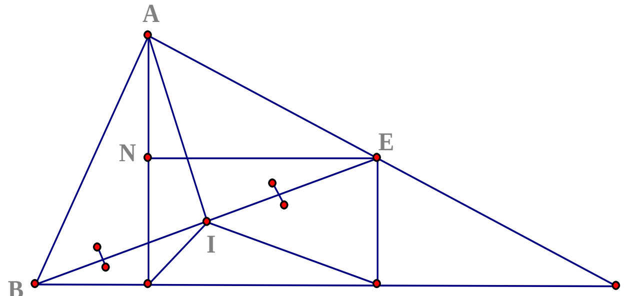
Là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

+) $\begin{cases} IK \,//\, DA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IK \perp AB \\ IM \,//\, AB \end{cases} \Rightarrow IM \perp IK \Rightarrow \lozenge IKMN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IN = KM$

Bài 7:Cho tam giác ABC vuông tại A, AB < AC, đường cao AH. Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho AE = AB. Gọi I là trung điểm của BE, kẻ $EK \perp BC (K \in BC), EN \perp AH (N \in AH)$

a). Chứng minh tứ giác NEKH là hình chữ nhật

b). $I\hat{H}A = I\hat{H}C$



HD:

a). Tứ giác NEKH có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật

b). Ta đi chứng minh $\Delta IHA = \Delta IHK$

Xét $\Delta IHA, \Delta IHK$: IH cạnh chung , $AI = IK = \frac{1}{2}BE$

Cần thêm AH = HK hoặc AH = NE (do HK = NE)

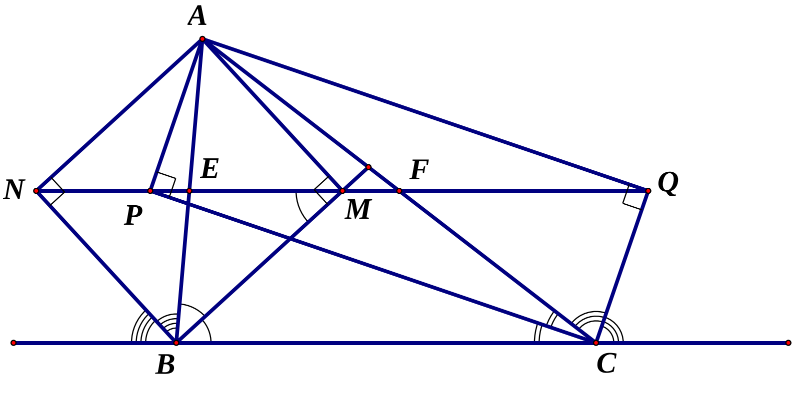
$\Delta ABH = \Delta AEN(ch - gn) \Rightarrow AH = NE \Rightarrow AH = HK \Rightarrow \Delta IHA = \Delta IHK \Rightarrow I\hat{H}A = I\hat{H}C$

Bài 8:. Cho Δ ABC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của A lên hai đường phân giác trong và ngoài của góc B và C. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác AMBN, APCQ là các hình chữ nhật.

b) M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.

HD:



a) Ta có đường phân giác trong và ngoài của một góc trong tam giác thì vuông góc với nhau nên $NBM = 90^0$.

Trong tứ giác ANBM có $B = N = M = 90^0$ nên ANBM là hình chữ nhật.

Chứng minh tương tự, ta cũng có APCQ là hình chữ nhật.

b) Vì ANBM là hình chữ nhật nên ta có $NMB = ABM = MBC$, Suy ra NM // BC (hai góc so le trong bằng nhau).

ANBM là hình chữ nhật suy ra E là trung điểm của AB, cũng là trung điểm của NM.

NM qua E, song song với BC nên NM là đường trung bình trong tam giác ABC,

Do đó NM đi qua F.

Chứng minh tương tự, PQ là đường trung bình trong tam giác ABC.

Vậy các điểm M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.

Bài 9: Cho ΔABC ($A = 90^0$) có AB < AC. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ MD vuông góc với AB tại D và ME vuông góc với AC tại E. Vẽ đường cao AH của ΔABC.

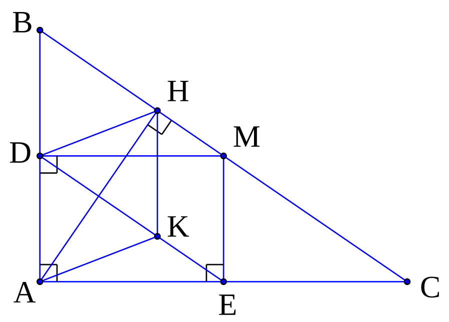
a) Chứng minh ADME là hình chữ nhật.

b) Chứng minh CMDE là hình bình hành.

c) Chứng minh MHDE là hình thang cân.

d) Qua A kẻ đ/thẳng song song với DH cắt DE tại K. Chứng minh HK vuông góc với AC.

HD:



a) Tứ giác ADME có:

$A = D = E = 90^0$ nên ADME là hình chữ nhật.

b) $MD \perp AB$, $AC \perp AB$, suy ra MD // AC.

Vì M là trung điểm cảu BC nên MD là đường trung bình của ΔABC.

Tương tự, ME cũng là đường trung bình của ΔABC.

Từ đó ta có A, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra MD // CE và DE // MC. Vậy CMDE là hình chữ nhật.

c) Theo trên thì DE // HM (1).

Xét tam giác ABH vuông tại H, có HD là trung tuyến nên $HD = \frac{1}{2}AB$.

Mặt khác, trong tam giác ABC, ME là đường trung bình nên $ME = \frac{1}{2}AB$.

Suy ra HD = ME (2).

Từ (1) và (2) suy ra MHDE là hình thang cân.

d) Xét hai tam giác ADK và DBH, có:

DE // BC $\Rightarrow ADK = DBH$ (Hai góc đồng vị).

AD = DB (vì D là trung điểm của AB)

DH // AK $\Rightarrow DAK = BDH$ (Hai góc đồng vị).

Suy ra $\Delta ADK = \Delta DBH \Rightarrow$ AK = DH.

Lại có AK // DH, do đó ADHK là hình bình hành, suy ra HK // DA.

Vì $DA \perp AC$ nên $HK \perp AC$.

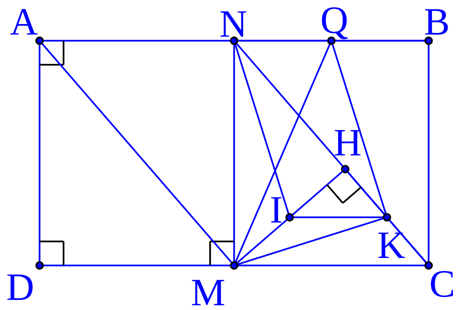
Bài 10: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh DC. Từ M vẽ đường thẳng vuông góc với DC và cắt cạnh AB tại N.

a) Chứng minh ADMN là hình chữ nhật.

b) Chứng minh AMCN là hình bình hành.

c) VẼ MH vuông góc với NC tại H; Gọi Q và K lần lượt là trung điểm của NB và HC. Chứng minh QK vuông góc với MK.

HD:



a) Tứ giác ADMN có $A = D = M = 90^0$, do đó ADMN là hình chữ nhật.

b) Vì ADMN là hình chữ nhật nên:

AN = DM = MC.

Lại có AN // MC, do đó AMCN là hình bình hành.

c) Trong tứ giác BCMN, $B = C = M = 90^0$ nên BCMN là hình chữ nhật.

Ta có NQ // CM và NQ = $\frac{1}{2}$CM (1).

Gọi I là trung điểm của MH, thì KI là đường trung bình trong tam giác HCM.

Do đó: KI // CM và KI = $\frac{1}{2}$CM (2).

Từ (1) và (2) suy ra NQ = KI và NQ // KI, hay NQKI là hình bình hành.

Xét tam giác MNC có: $MH \perp NC$; $KI \perp MN$ (vì KI // CM và $CM \perp MN$).

Suy ra I là trực tâm tam giác MNC, do đó $NI \perp MK$ (3).

Theo trên NQKI là hình bình hành nên NI // QK (4).

Từ (3) và (4) suy ra $MK \perp QK$.

Bài 11: Cho ΔABC vuông tại A (AB < AC). Gọi I, M, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA.

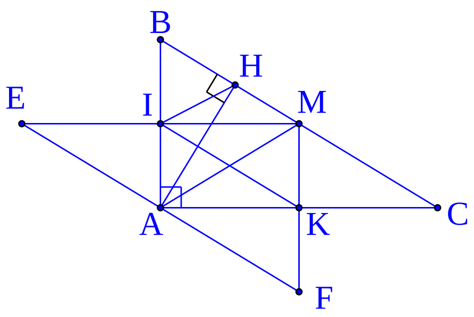
a) Chứng minh AIMK là hình chữ nhật.

b) Trên tia MI lấy điểm E sao cho I là trung điểm của ME, trên tia MK lấy điểm F sao cho K là trung điểm của MF. Chứng minh IF // EF và EF = 2IK.

c) Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Chứng minh tứ giác IKMH là hình thang cân.

d) Cho IK = 2MH. Tính ABC.

HD:



a) Ta có MI là đường trung bình trong tam giác ABC nên MI // AC, do đó MI $\perp$ AB.

Tương tự, MK $\perp$ AC.

Tứ giác AIMK có $A = \hat{I} = K = 90^0$ nên AIMK là hình chữ nhật.

b) Vì I, K lần lượt là trung điểm của ME, MF nên IK là đường trung bình trong tam giác MEF,

Từ đó ta có IK // EF và EF = 2IK.

c) Theo trên, IK // HM (a).

Vì MK là đường trung bình trong tam giác ABC nên MK = $\frac{1}{2}$AB (1).

Xét tam giác ABH vuông tại H, có HI là đường trung tuyến nên HI = $\frac{1}{2}$AB (2).

Từ (1) và (2) suy ra MK = HI (b).

Từ (a) và (b) suy ra IKMH là hình thang cân với hai đáy IK, HM.

d) Giả sử IK = 2HM. Vì AIMK là hình chữ nhật nên IK = AM.

Mà AM là trung tuyến trong tam giác vuông ABC nên AM = MB.

Từ đó suy ra MB = 2HM.

Theo giả thiết AB < AC nên H nằm giữa M và B,

Do vậy H là trung điểm của MB.

Trong tam giác ABM có AH là đường cao và là trung tuyến nên tam giác ABM cân tại A.

Như vậy ta có AB = AM = MB, hay ΔABM là tam giác đều.

Vậy $ABC = 60^0$.

Bài 12:. Cho ΔABC vuông tại A có AB =4cm, AC = 3cm. Gọi O là trung điểm của BC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

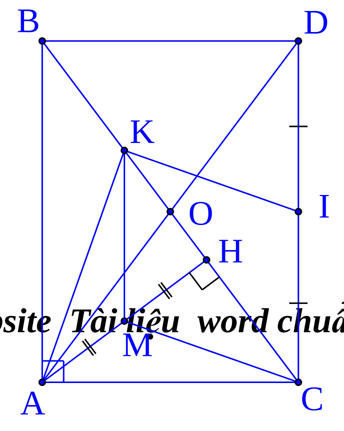
a) Tính BC, AO.

b) Chứng minh ABDC là hình chữ nhật.

c) Vẽ AH$\perp$BC (H thuộc BC). Gọi M, K, I lần lượt là trung điểm của AH, BH, CD. Chứng minh CM = IK.

d) Chứng minh ΔAKI vuông.

HD:



a) Trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = 5(cm).$$

Vì AO là trung tuyến trong tam giác vuông ABC nên AO = $\frac{1}{2}$BC = $\frac{5}{2}$ (cm).

b) Tứ giác ABDC có hai đường chéo BC và AD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn, nên ta có ABDC là hình bình hành.

Mà $BAC = 90^0$ nên ABDC là hình chữ nhật.

c) Dễ thấy KM là đường trung bình trong tam giác ABH nên KM // AB và KM = $\frac{1}{2}$AB.

Lại có CI // AB và CA=$\frac{1}{2}$CD = $\frac{1}{2}$AB.

Như vậy ta có KM = CI và KM //CI, nên KMCI là hình bình hành $\Rightarrow$ CM = IK.

d) Theo trên, KM // AB nên KM$\perp$AC. Lại có AM$\perp$KC, nên M là trực tâm tam giác ACK.

Do đó CM$\perp$AK (1).

Mà KMCI là hình bình hành nên IK // CM (2).

Từ: (1), (2) $\Rightarrow$ AK$\perp$IK, hay ΔAKI vuông.

Bài 13: Cho ΔABC vuông tại A có AH là đường cao. Từ H vẽ HD vuông góc với cạnh AB tại D; vẽ HE vuông góc với cạnh AC tại E. Biết AB = 15cm; BC = 25cm.

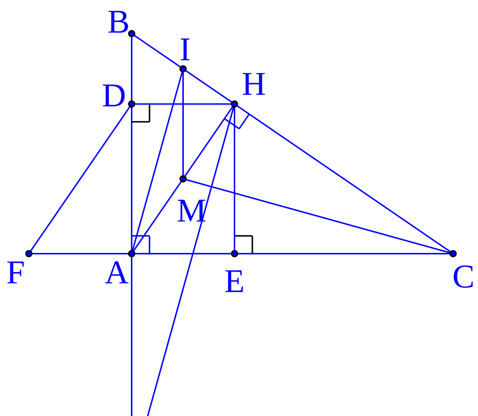
a) Tính độ dài cạnh AC và diện tích ΔABC.

b) Chứng minh ADHE là hình chữ nhật.

c) Trên tia đối của tia AC lấy điểm F sao cho AF = AE. Chứng minh tứ giác AFDH là hình bình hành.

d) Gọi K là điểm đối xứng của B qua A. Gọi M là trung điểm của AH. Chứng minh CM vuông góc với HK.

HD:



a) Áp dụng định lí Pytago trong tam giác ABC vuông tại A, có:

$AC^2 = BC^2 – AB^2 = 25^2 – 15^2 = 400$. Suy ra AC = 20(cm).

Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}AB.\ AC = \frac{1}{2}.\ 15.\ 20 = 150\ (cm^2)$.

b) Tứ giác ADEH có $A = D = H = 90^0$ nên ADEH là hình chữ nhật.

c) Ta có AF // DH và AF = DH (vì cùng bằng AE), nên AFDH là hình bình hành.

d) Gọi I là trung điểm của HB. IM là đường trung bình trong ΔABH nên IM // AB,

Do đó IM $\perp$ AC.

Lại có AM $\perp$ IC nên suy ra M là trực tâm của ΔACI,

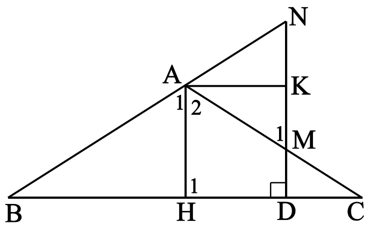
Do đó ta có CM $\perp$ AI (1).

Xét ΔBKH có AI là đường trung bình nên AI // KH (2).

Từ (1) và (2) cho ta CM $\perp$ KH.

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại M và N. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của BC và MN. Chứng minh rằng tứ giác AKDH là hình chữ nhật.

HD:



Tìm cách giải

Dễ thấy tứ giác AKDH có hai góc vuông là $H = D = 90^{o}$ nên chỉ cần chứng minh tứ giác này có một góc vuông nữa là thành hình chữ nhật.

Trình bày lời giải

ΔABC cân tại A, AH là đường trung tuyến nên cũng là đường cao, đường phân giác.

Do đó $H_1 = 90^{o}$ và $A_1 = A_2$.

Ta có AH // DN (vì cùng vuông góc với BC)

$\Rightarrow N = A_1$ (cặp góc đồng vị); $M_1 = A_2$ (cặp góc so le trong).

Do đó $N = M_1$ (vì $A_1 = A_2$).

Vậy ΔAMN cân tại A mà AK là đường trung tuyến nên AK cũng là đường cao, $K = 90^o$.

Tứ giác AKDH có $K = H = D = 90^o$ nên nó là hình chữ nhật.

Bài 15: Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho AP = CQ. Từ điểm P vẽ PM song song với BC ($M \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác PCQM là hình chữ nhật.

b) Gọi I là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng khi P di chuyển trên cạnh AC, Q di chuyển trên cạnh BC thì điểm I di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.

HD:

a) Học sinh tự giải

b) Vì I là trung điểm QP nên I là trung điểm CM.

Gọi E và F là trung điểm AC và BC,

Suy ra : IE//MA; FI//MB; mà EF//AB

Suy ra E,F,I thẳng hàng nên I di chuyển trên đường trung bình của ΔABC.

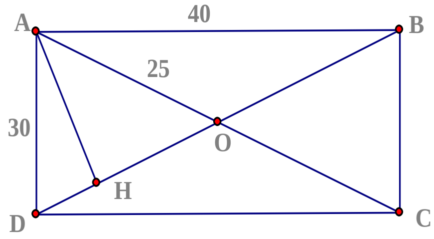
Dạng 2: Vận dụng tính chất của HCN để chứng minh qua hệ bằng nhau, song song, vuông góc, tính độ dài các đoạn thẳng

Phương pháp giải:

Áp dụng các tính chất của hình chữ nhật

Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông

Bài 1: Cho hình chữ nhật ABCD, AB = 40cm, AD = 30cm, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD. Tính độ dài đoạn DH, OH, OB



HD:

Áp dụng định lý Pytago $\Rightarrow BD = 50cm$

$$OA = OB = OC = OD = 25cm$$

$$AD^2 - DH^2 = AH^2 = AO^2 - HO^2 = AO^2 - (DO^2 - DH)^2$$

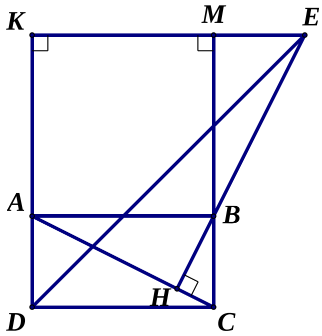
Hay

$$30^2 - DH^2 = 25^2 - (25 - DH)^2 \Leftrightarrow 30^2 - DH^2 = 25^2 - (625 - 50DH + DH^2) \Leftrightarrow 50DH = 900$$
$$\Rightarrow DH = 18 \Rightarrow HO = 7CM$$

Cách 2: $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD.AB = 600 = \frac{1}{2}AH.BD \Rightarrow 600 = \frac{1}{2}.50.AH \Rightarrow AH = 24 \Rightarrow DH = 18cm$

Bài 2: Cho hình nhữ nhật ABCD, vẽ BH vuông góc AC tại H. Trên tia đối của tia BH lấy điểm E sao cho BE = AC. Vẽ EK vuông góc với đường thẳng AD tại K, EK cắt đường thẳng BC tại M. Chứng minh rằng góc ADE bằng 45^0.

HD:



$\mathrm{BAC} = \mathrm{CBH} = EBM$ (cùng phụ với góc ABH).

Tam giác ABC và BME là hai tam giác vuông có AC = BE và $BAC = MBE$

Suy ra $\Delta ABC = \Delta BME \Rightarrow ME = BC$.

Dễ dàng chứng minh được ABMK là hình chữ nhật,

Suy ra AK = BM = AB= KM.

KD = KA + AD = KM + ME = KE.

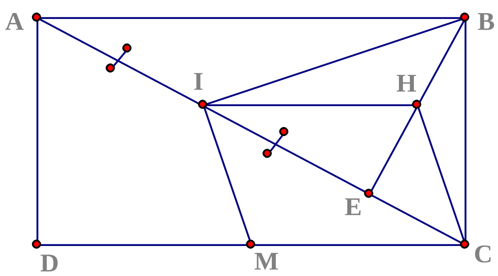
Do vậy tam giác KFE vuông cân tại K.

Vậy $ADE = 45^0$

Bài 3: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC. I là trung điểm của AE, M là trung điểm của CD, H là trung điểm của BE

a). Chứng minh rằng CH // IM

b). Tính góc BIM



HD:

a). Ta có IH là đường trung bình $\Delta AEB \Rightarrow \begin{cases} IH // AB \\ IH = \frac{1}{2}AB \end{cases}$ Lại có $\begin{cases} MC // AB \\ MC = \frac{1}{2}AB \end{cases} \Rightarrow \lozenge IMCH$ là hình bình hành $\Rightarrow CH // IM$

Ta có: $IH // MC, MC \perp BC \Rightarrow IH \perp BC$

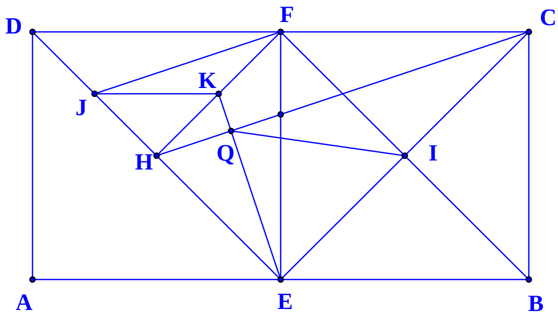
Xét ΔIBC có H là trực tâm $\Rightarrow \begin{cases} CH \perp BI \\ CH // IM \end{cases} \Rightarrow B\hat{I}M = 90^0$

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2BC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. H, K lần lượt là trung điểm của DE, HF; I là trung điểm của BF và Q là giao điểm của CH và EK.

a) Chứng minh CH ⊥ EK tại Q.

b) Chứng minh QI = IE = IC = IB.

HD:



a) Gọi J là trung điểm HD.

Ta có JK // DF nên JK ⊥ EF.

FK ⊥ DE (vì ADFE là hình vuông)

K là trực tâm tam giác EFJ

Suy ra EK ⊥ FJ, mà FJ // CH nên EK ⊥ CH.

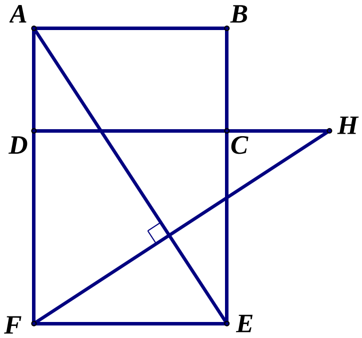
b) Theo trên, tam giác CQE vuông tại Q, từ đó suy ra QI = IE = IC = IB.

Bài 5: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia CB và DA lấy lần lượt hai điểm E và F sao cho CE = DF = CD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho CH = CB. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CEFD là hình chữ nhật.

b) AE ⊥ FH.

HD:



a) Theo giả thiết, DF = CE và DF // CE, suy ra tứ giác CDEF là hình bình hành.

Mặt khác, $CDF = 90^0$. Vậy CDFE là hình chữ nhật.

b) Ta có AF = AD + DF = CH + CD = DH.

Hai tam giác AFE và HDF có:

AF =HD, $AFE = HDF = 90^0$, FE = DF.

Do đó $\Delta AFE = \Delta HDF \Rightarrow FAE = DHF$.

Mặt khác $DHF + DFH = 90^0 \Rightarrow FAE + DFH = 90^0$

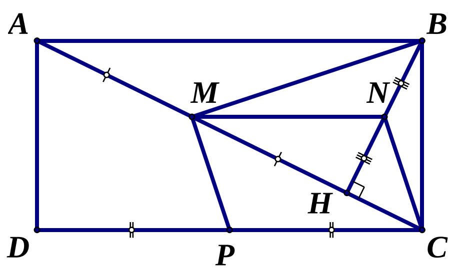
Vậy $AE \perp FH$

Bài 6:. Cho hình chữ nhật ABCD, $BH \perp AC$ tại H. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AH, BH, CD. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CNMP là hình bình hành.

b) $BMP = 90^0$.

HD:



a) Trong tam giác ABH, MN là đường trung bình nên MN = $\frac{1}{2}$AB và MN // AB.

$\Rightarrow$MN = CP, MN // CP. Vậy MNCP là hình bình hành.

b) Xét tam giác BCM, $BH \perp CM$, $MN \perp BC$ (vì MN // PC, $PC \perp BC$),

Suy ra N là trực tâm tam giác BCM, do đó $CN \perp BM$.

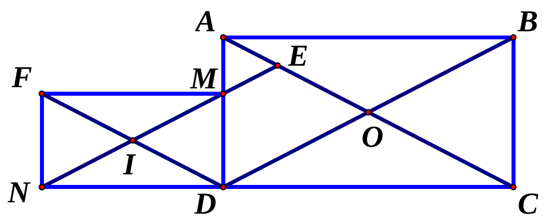
Mặt khác, vì PM // CN nên $PM \perp BM$, hay $BMP = 90^0$.

Bài 7:. Cho hình chữ nhật ABCD, $E\in AC$. Đường thẳng qua E và song song với BD cắt các đường thẳng AD, CD lần lượt lại M, N. vẽ hình chữ nhật DMFN. Gọi O, I lần lượt là giao điểm của 2 đường chéo của hai hình chữ nhật ABCD, DMFN. Chứng minh:

a) Tứ giác EIDO là hình bình hành.

b) E là trung điểm của BF.

HD:



a) Ta có $EAM = ADO = EMA$ (1).

Vì DMFN là hình chữ nhật nên $IDM = IMD = AME$ (1)

Từ: (1), (2) $\Rightarrow EAM = IDM$. Suy ra: OE // DI.

Mặt khác theo giả thiết thì EI // DO. Vậy EIDO là hình bình hành.

b) Ta có O, I lần lượt là trung điểm của BD và FD.

Theo trên, AC // DF, NE // BD.

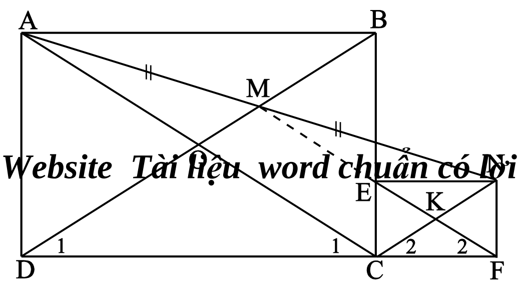
Xét tam giác DFB, đường thẳng AC và NE lần lượt là hai đường trung bình,

Suy ra AC và NE cùng đi qua trung điểm của BF.

Vì E là giao điểm của AC và NE nên E là trung điểm của BF.

Bài 8: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy một điểm M. Trên tia AM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của AN. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của N trờn đường thẳng BC và CD. Chứng minh rằng ba điểm M, E, F thẳng hàng.

HD:



Tìm cách giải

Xét ΔCAN, đường thẳng EF đi qua trung điểm của CN, muốn cho EF đi qua trung điểm M của AN ta cần chứng minh EF // AC.

Trình bày lời giải

Tứ giác ENFC có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

Gọi O là giao điểm của AC và BD và K là giao điểm của EF và CN.

Theo tính chất hình chữ nhật ta có:

OA = OB = OC = OD; KC = KN = KE = FF.

Xét ΔCAN có OM là đường trung bình nên OM // CN, đo đó BD // CN.

ΔOCD, ΔKCF cân, suy ra $D_1 = C_1$, $C_2 = F_2$.

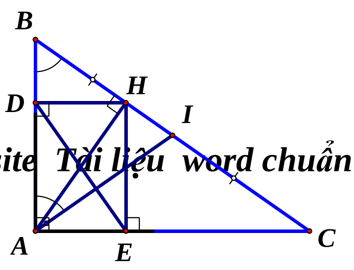
Mặt khác, $D_1 = C_2$ (cặp gúc đồng vị) nên $C_1 = F_2$.

Suy ra AC // EF.

Xét ΔCAN có đường thẳng EF đi qua trung điểm K của CN và EF // AC nên EF đi qua trung điểm của AN, tức là đi qua M. Vậy ba điểm M, E, F thẳng hàng.

Bài 9:. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, I là trung điểm BC. Vẽ HD$\perp$AB tại D, HE$\perp$AC tại E. Chứng minh AI$\perp$DE.

HD:



Vì tam giác ABC vuông tại A nên AI = IB = IC.

Do đó $\mathrm{ABI} = \mathrm{DAI}$ (1).

Dễ thấy ADHE là hình chữ nhật ($\mathrm{A} = \mathrm{D} = \mathrm{H} = 90^0$).

Suy ra $\mathrm{ADE} = \mathrm{AHE} = \mathrm{BHD}$ (cùng phụ với AHD) (2)

Mặt khác $\mathrm{ABI} + \mathrm{DHB} = 90^0$ (3).

Từ: (1), (2), (3) suy ra $\mathrm{ADE} + \mathrm{DAI} = 90^0$. Vậy $\mathrm{AI} \perp \mathrm{DE}$.

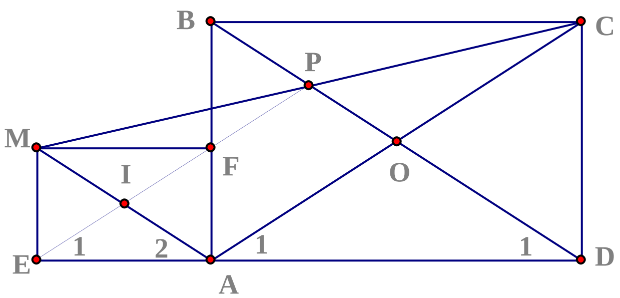
Bài 10: Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy điểm P tùy ý trên đường chéo BD. Gọi M là điểm đối xứng của C qua P

a) Chứng minh AM // BD

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD, AB. Chứng minh AEMF là hình chữ nhật

c) EF // AC

d) E, F, P thẳng hàng



HD:

a). Gọi O là giao điểm của BD và AC

Ta có OP là đường trung bình của $\Delta AMC \Rightarrow OP // AM$

b). Xét $\lozenge AEMF$, có $\hat{E} = \hat{A} = \hat{F} = 90^0 \Rightarrow \lozenge AEMF$ là hình chữ nhật c). Ta có $\hat{A}_2 = \hat{D}_1(slt), \hat{A}_2 = \hat{E}_1, \hat{D}_1 = \hat{A}_1(dvi) \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{A}_1 \Rightarrow$ EF //AC

d). E, F, P thẳng hàng $IE // AC$, IP//AC $\Leftarrow$ IP là đường trung bình ΔAMC

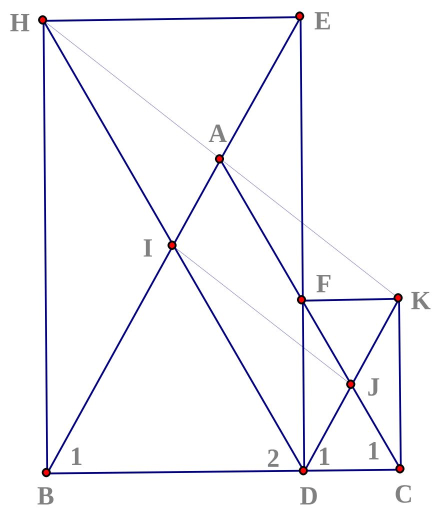
Lại có EF // AC $\Rightarrow IE // AC$

Theo tiên đề Ơclit thì E, F, P thẳng hàng

Bài 11: Cho tam giác ABC cân tại A. Từ điểm D trên đáy BC kẻ đường vuông góc với BC cắt AB ở E và AC ở F. Vẽ các hình chữ nhật DBHE và CDFK. Gọi I là tâm của hình chữ nhật BDEH, J là tâm của hình chữ nhật CDFK. Chứng minh rằng

a). AIDJ và AHIJ là các hình chữ nhật

b). A, H, K thẳng hàng và A là trung điểm của HK



HD:

a). $\lozenge AIDJ$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AI // DJ(\hat{B}_1 = \hat{D}_1 = \hat{C}_1) \\ \text{AJ//DI}(\hat{C}_1 = \hat{D}_2 = \hat{B}_1) \end{cases}$

$\lozenge AHIJ$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} HI // AJ(HD // AC) \\ \text{AJ//HI(=ID)} \end{cases}$

b). A, H, K thẳng hàng $\Rightarrow \lozenge$AIJK là HBH $\Rightarrow \begin{cases} AI // KJ(AI // DJ) \\ AI = KJ(AI = DJ) \end{cases}$

Vậy qua A có HA // IJ, KA // IJ nên A, H, K thẳng hàng.

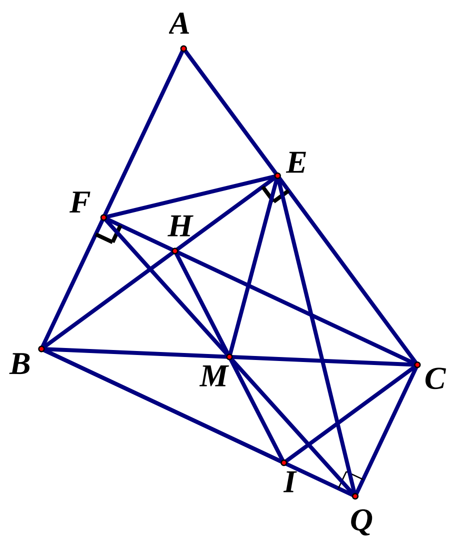
Bài 12:.Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BE và CF cắt nhau tại H. lấy M là trung điểm của BC và I là điểm đối xứng của H qua M.

a) Chứng minh rằng: IC = BH và IB $\perp$ AB.

b) Chứng minh rằng ΔMEF là tam giác cân.

c) Vẽ CQ $\perp$ BI tại Q. Chứng minh rằng ΔFEQ là tam giác vuông.

HD:



a)Tứ giác BHCI là hình bình hành (vì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Từ đó suy ra IC = BH.

IB // CH, CH $\perp$ AB $\Rightarrow$ IB $\perp$ AB.

b) Hai tam giác EBC và FBC là tam giác vuông tại E và F,

Suy ra EM = FM = $\frac{1}{2}$BC.

Vậy MEF là tam giác cân tại M.

c) $CQ \perp BI \Rightarrow CQ$ // BF, dễ dàng chứng minh được CQBF là hình chữ nhật,

Suy ra M là trung điểm của QF.

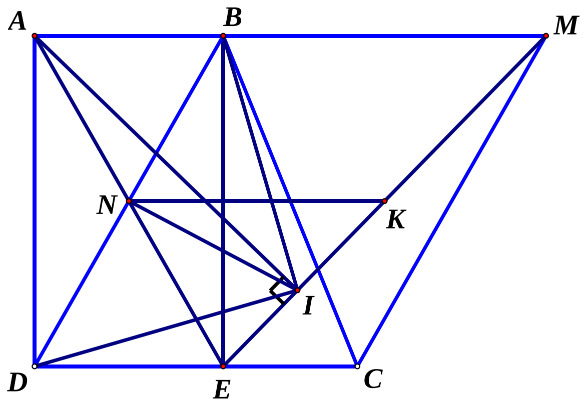
Theo trên thì EM = FM = MQ.

Trong tam giác EFQ, MF là đường trung tuyến và MF = $\frac{1}{2}$FQ.

Do vậy tam giác EFQ vuông tại E.

Bài 13:. Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^0$) (AB < CD). Vẽ BE vuông góc CD tại E. trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho BM = CD. Gọi N là giao điểm của AE và BD, K là trung điểm của EM. Vẽ AI vuông góc ME tại I. Chứng minh rằng NK // AM và $BID = 90^0$.

HD:



Trong tam giác AEM, NK là đường trung bình,

Do đó NK // AM.

Dễ thấy tứ giác ABED là hình chữ nhật,

Do đó N là trung điểm của AE và BD và AE = BD.

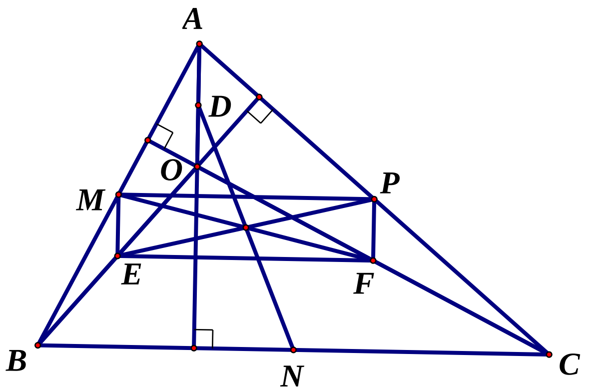
Tam giác IAE vuông tại I, có IN là đường trung tuyến,

Do đó: IN = NA = NE = NB = ND.

Tam giác IBD có IN là trung tuyến thỏa mãn IN = IB = ID, Do đó BID là tam giác vuông tại I.

Bài 14:. Các đường cao của tam giác ABC gặp nhau tại O. Gọi M, N, P, D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA, OA, OB, OC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng DN, MF, EF đồng quy và cùng độ dài.

HD:



MP và EF lần lượt là đường trung bình trong tam giác ABC và OBC.

Ta có MP // EF và MP = EF (vì cùng bằng $\frac{1}{2}$BC và cùng song song BC),

Suy ra MPFE là hình bình hành.

ME // AO, EF // BC và AO$\perp$BC,

Suy ra ME$\perp$EF, ta được tứ giác MPEF là hình chữ nhật.

Do đó MF = PE và MF cắt PE tại trung điểm mỗi đoạn.

Chứng minh tương tự, DN = PE và DN cắt PE tại trung điểm mỗi đoạn.

Vậy ba đoạn DN, MF, PE đồng quy và cùng độ dài.

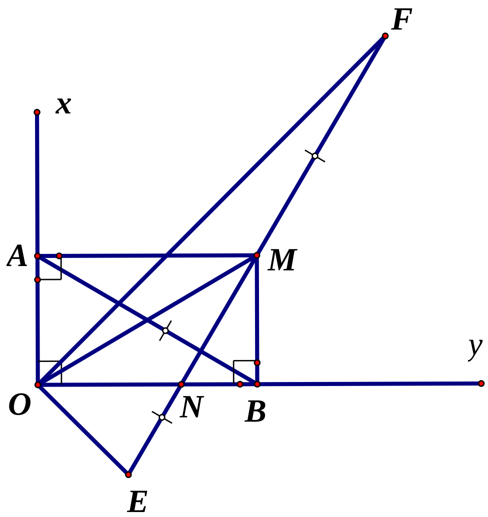
Bài 15:. Cho góc $xOy = 90^0$, M nằm trong góc đó. Vẽ MA$\perp$Ox tại A, MB$\perp$Oy tại B. Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB, lấy các điểm E, F sao cho ME = MF = AB. Chứng minh rằng:

a) $EOF = 90^0$, $MOA = EMA$, $MOA + FMA = 180^0$.

b) $EOy = OMA + MOF$, $BOF = OMA + MOF$.

Từ đó suy ra Oy là tia phân giác của góc EOF.

HD:



a) Dễ dàng chứng minh được OAMB là hình chữ nhật. Ta có M là trung điểm của EF.

ME = MF = AB = MO, từ đó suy ra tam giác EOF vuông tại O.

$EMA + MAB = 90^0$, $MOA + MAB = 90^0$, suy ra $EMA = MOA$.

$MOA + FMA = EMA + FMA = 180^0$.

b) Tam giác OMF cân tại M nên $MOF = MFO$.

EF cắt Oy tại N, $ONE = MNB$, suy ra $OMA + ONE = BMN + MNB = 90^0$.

Vì tam giác OEF vuông tại O nên $MFO + OEN = 90^0$.

$$OMA + MOF + ONE + OEN = OMA + ONE + MFO + OEN = 180^0.$$

Do đó $OEy = OMA + MOF$; $BOF = BOM + MOF = OMA + MOF$

Từ đây suy ra $OEy = BOF$. Vậy Oy là phân giác góc EOF

Bài 16:. Cho hình bình hành ABCD, tia phân giác góc A cắt tia phân giác góc B và tia phân giác góc D lần lượt tại P, Q.

a) Chứng minh rằng: BP // DQ và AP $\perp$ BP, AQ $\perp$ DQ.

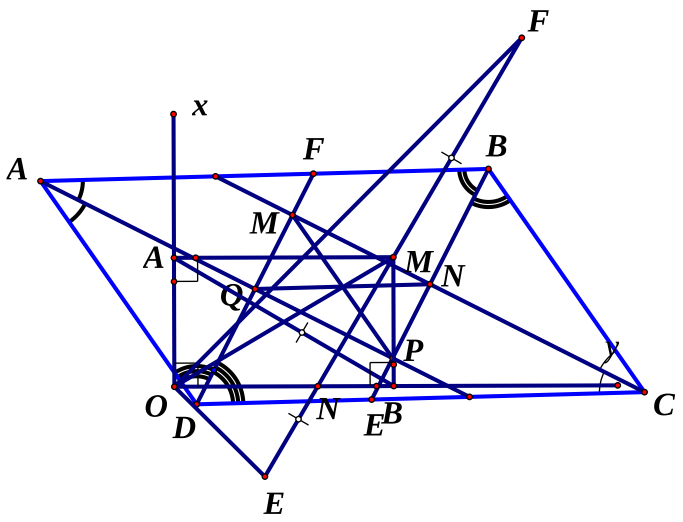
b) Tia phân giác góc C cắt BP, DQ lần lượt tại N và M. Tứ giác MNPQ là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh rằng: NQ // AB, MP // AD.

d) Giả sử AB > AD. Chứng minh rằng MP = NQ = AB $-$ AD.

e) Chứng minh rằng AC, BD, EF, MP, NQ đồng quy.

HD:



a) Chứng minh BP // DQ.

Gọi E là giao điểm của BP và CD, F là giao điểm của DQ và AB. Ta có:

$ABE = BEC$ (so le trong)

và $FDC = ABE = \frac{1}{2}ABC$.

Suy ra $FDE = BEC \Rightarrow$ BP // DQ (hai góc đồng vị bằng nhau).

Chứng minh AP $\perp$ BP, AQ $\perp$ DQ.

$AFD = FDC = FDA$, suy ra tam giác AFD cân tại A. AQ là đường phân giác cũng là đường cao nên AQ $\perp$ DQ. Vì theo trên, BP // DQ nên suy ra AP $\perp$ BP.

b) Chứng minh tương tự như trên, ta có CN $\perp$ BN, CM $\perp$ DM. tứ giác MNPQ có bốn góc vuông nên MNPQ là hình chữ nhật.

c) Tứ giác BEDF là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song).

Theo chứng minh trên thì Q là trung điểm của DF,

Chứng minh tương tự, N là trung điểm của BE.

Từ đó suy ra NQ // BF, hay NQ // AB.

Vì NQ // AB $\Rightarrow BAQ = NQP$.

Lại có $BAQ = BCM = \frac{1}{2}BCD$ và $NQP = NMP$ (vì MNPQ là hình chữ nhật).

Từ đó suy ra $NMP = BCM \Rightarrow$ MN // BC (hai góc so le trong bằng nhau).

d) Vì AB >AD nên F thuộc canh AB, E thuộc cạnh CD.

Theo chứng minh trên, BEDF là hình bình hành và Q, N lần lượt là trung điểm của DF, BE,

Suy ra QN = BF = DE = AB – AF

Vì tam giác ADF cân tại A nên AB – AF = AB – AD $\Rightarrow$ QN = AB – AD.

Lại có MNPQ là hình chữ nhật nên QN = MP.

Vậy NQ = MP = AB – AD.

e) ABCD là hình bình hành nên AC cắt BD tại trung điểm mỗi đoạn.

BEDF là hình bình hành nên BD cắt EF tại trung điểm mỗi đoạn.

MNPQ là hình bình hành nên MP cắt NQ tại trung điểm mỗi đoạn.

Q, N lần lượt là trung điểm của DF và BE nên dễ thấy BNDQ cũng là hình bình hành.

Suy ra BD cắt NQ tại trung điểm của mỗi đoạn.

Từ đó ta có kết luận AC, BD, EF, MP, NQ đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

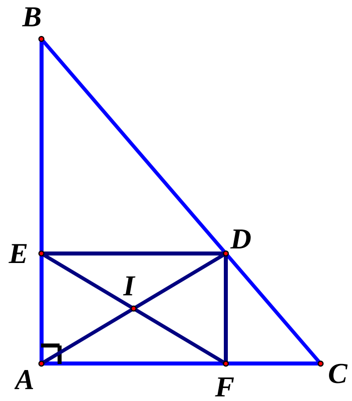
Bài 17:. Cho tam giác ABC vuông tại A, D thuộc cạnh BC. Vẽ DE $\perp$ AB tại E, DF $\perp$ AC tại F.

a) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng A, I, D thẳng hàng.

b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì EF có độ dài ngắn nhất? Vì sao?

c) Dựng điểm D trên cạnh BC sao cho $CFE = 150^0$.

HD:



a)Tứ giác AEDF có $A = E = F = 90^0$, do đó AEDF là hình chữ nhật.

Suy ra I là trung điểm EF, cũng là trung điểm của AD.

b) Ta có EF = AD. EF nhỏ nhất khi AD nhỏ nhất, hay điểm D là hình chiếu vuông góc của A lên BC.

c) $CFE = 150^0 \Rightarrow EFA = DAC = 30^0$.

Bài 18:. Cho ΔABC vuông tại A (AB > AC). Đường trung tuyến AO. Trên tia đối của tia OA lấy điểm D sao cho OD = OA. Từ B kẻ BH vuông góc với AD tại H. Từ C kẻ CK vuông góc với AD tại K. Tia BH cắt CD ở M, tia CK cắt AB ở N.

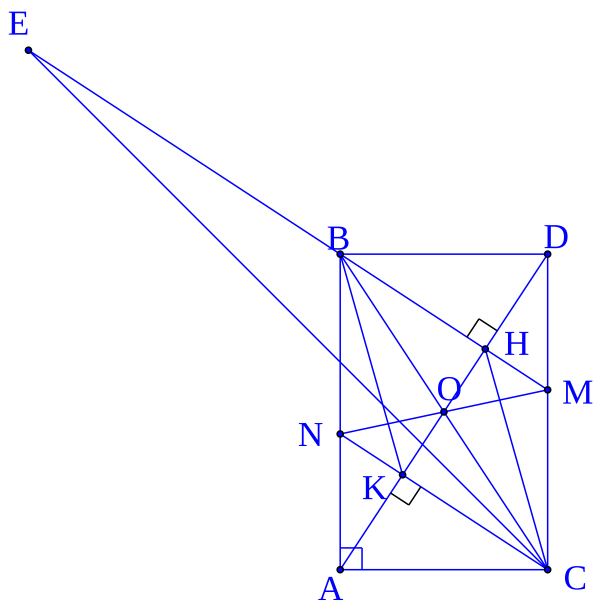
a) Chứng minh ABDC là hình chữ nhật.

b) Chứng minh BH = CK và BK // CH.

c) Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.

d) Trên tia đối của tia BH lấy điểm E sao cho BE = AD. Chứng minh $DCE = 45^0$.

HD:



a)Theo giả thiết, O là trung điểm của BC và AD.

Tứ giác ABDC có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn nên ABCD là hình bình hành. Hơn nữa $A = 90^0$ nên ABCD là hình chữ nhật.

b) Xét hai tam giác ACK là DBH lần lượt vuông tại K và H, có AC = BD; $KAC = HDB$ (vì ABDC là hình chữ nhật).

Suy ra $\Delta ACK = \Delta DBH$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow CK = BH$.

Ta có BH // CK (vì cùng vuông góc với AD) và BH = CK (theo trên).

Do đó BHCK là hình bình hành, suy ra BK // CH.

c) BM // CN, BN // CM, do đó BMCN là hình bình hành.

Vì O là trung điểm của BC nên O cũng là trung điểm của MN, suy ra điều phải chứng minh.

d)Vì ABDC là hình chữ nhật nên ta có AD = BC = BE,

Suy ra tam giác BEC cân tại B, nên $BEC = BCE$.

Lại có BM // CN nên $BEC = NCE$ (so le trong). Suy ra $BCE = NCE$ (1).

Theo trên ABDC là hình chữ nhật nên dễ dàng suy ra $CBD = CAD$

Suy ra $ACN = DCB$ (2) (hai góc cùng phụ với góc $CAD,\ CBD$).

Từ (1) và (2) cho ta $CAN + NCE = DCB + BCE$, suy ra $ACE = DCE$.

CE là tia phân giác của góc vuông DCA nên $DCE = 45^0$.

Bài 19:. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E là điểm đối xứng của B qua C. Vẽ BH vuông góc với AE tại H. Gọi I là trung điểm của HE.

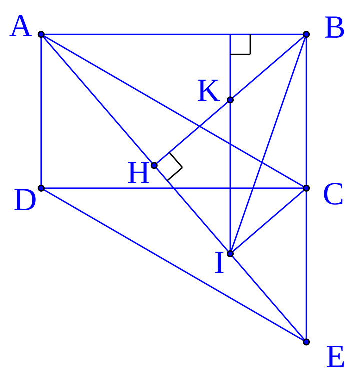
a) Chứng minh tứ giác ACED là hình bình hành.

b) Gọi K là trực tâm của ABI. Chứng minh K là trung điểm của HB.

c) Chứng minh tứ giác BCIK là hình bình hành.

d) Chứng minh AC, BD và đường trung trực của IC đồng qui tại một điểm.

HD:



a) Ta có AD // CE và AD = BC = CE. Do vậy ADEC là hình bình hành.

b) K là giao điểm của BH và đường thẳng qua I, vuông góc với AB.

$EB \perp AB,\ IK \perp AB \Rightarrow IK\ //\ EB$.

Mà I là trung điểm của EH nên IK là đường trung bình trong tam giác BHE.

Vậy K là trung điểm của BH.

c) IK // BC; IK = BC (cùng bằng $\frac{1}{2}$BE) $\Rightarrow$ BCIK là hình bình hành.

d) BCIK là hình bình hành $\Rightarrow$ CI // BK $\Rightarrow$ CI $\perp$ AE. Tam giác ACI vuông tại I nên đường trung trực của CI cũng là đường trung bình của tam giác ACI. Do vậy đường trung trực của CI đi qua trung điểm của AC.

Mặt khác vì ABCD là hình chữ nhật nên AC cắt BD tại trung điểm của mỗi đoạn. từ đó ta có AC, BD, CI đồng qui tại trung điểm của AC.

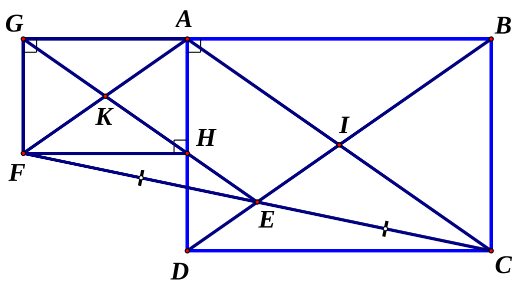
Bài 20:. Cho hình chữ nhật ABCD, E thuộc đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho CE = EF. Vẽ FG $\perp$ AB tại G, FH $\perp$ AD tại H.

a) Chứng minh rằng tứ giác AHFG là hình chữ nhật.

b) AF // BD.

c) * E, G, H thẳng hàng.

HD:



a) Tứ giác AHFG có $\widehat{A} = \widehat{H} = \widehat{G} = 90^0$ nên AHFG là hình chữ nhật.

b) Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có I là trung điểm của AC.

Theo giả thiết thì E là trung điểm của CF. do đó đường thẳng BD là đường trung bình trong tam giác ACF. Vậy AF // BD.

c) Gọi K là giao điểm của AF và GH, suy ra K là trung điểm của AF.

Dễ thấy AIEK là hình bình hành, suy ra KE // AC. Ta sẽ chứng minh GH // AI.

Vì AHFG là hình chữ nhật nên $AGH = GAF$ (1).

Vì AF // BD nên $GAF = ABD$(2).

Vì ABCD là hình chữ nhật nên $ABD = BAC$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $AGH = BAC$.

Do đó GH // AC (hai góc so le trong bằng nhau).

Vì GH qua K nên hai đường thẳng GH và KE trùng nhau.

Vậy ba điểm G, H, E thẳng hàng.

Bài 21:. Cho ΔABC vuông tại A (AB < AC). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Vẽ MD vuông góc AB tại D; Vẽ ME vuông góc AC tại E.

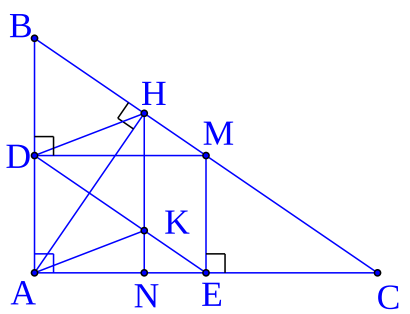
a) Chứng minh rằng tứ giác ADME là hình chữ nhật.

b) Chứng minh CMDE là hình bình hành.

c) Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Tứ giác MHDE là hình gì? Vì sao?

d) Qua A vẽ đường thẳng song song với DH cắt DE tại K, đường thẳng HK cắt AC tại N. Chứng minh rằng $HN^2 = NA.CN$.

HD:



a) Tứ giác ADME có $A = D = E = 90^0$ do đó ADME là hình chữ nhật.

b) Ta có MD // AC, ME // AB và M là trung điểm của BC nên D và E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Vì ADME là hình chữ nhật, ta có MD // EC và MD = AE = EC,

Do đó CMDE là hình bình hành.

c) Vì AB < AC nên H nằm giữa B và M.

DE là đường trung bình trong tam giác ABC nên DE // BC.

Ta có MH // ED (1).

$ME = AD = \frac{1}{2}AB$ (2).

Trong tam giác ABH vuông tại H có HD là trung tuyến nên $HD = \frac{1}{2}AB$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra MHDE là hình thang cân.

d) DE // BC $\Rightarrow HBD = KDA$ (hai góc so le trong);

BD = DA;

DH // AK $\Rightarrow BDH = DAK$

Từ đó ta có $\Delta HBD = \Delta KDA \Rightarrow DH = AK$, suy ra DHKA là hình bình hành.

Do đó HN // AB $\Rightarrow$ $HN \perp AC$.

Tam giác HAN vuông tại N có: $HN^2 = HA^2 - NA^2$.

Tam giác HCN vuông tại N có: $HN^2 = HC^2 - NC^2$

Suy ra $2HN^2 = \left(HA^2 + HC^2\right) - \left(NA^2 + NC^2\right)$ (4)

Tam giác HAC vuông tại H có: $HA^2 + HC^2 = AC^2$(5)

$$NA^2 + NC^2 = (NA + NC)^2 - 2NA.NC = AC^2 - 2NA.NC \text{ (6)}$$

Từ (4), (5), (6) suy ra $2HN^2 = AC^2 - (AC^2 - 2NA.NC) = 2NA.NC$

Vậy $HN^2 = NA.NC$.

Bài 22:. Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AB và E là điểm đối xứng của H qua M.

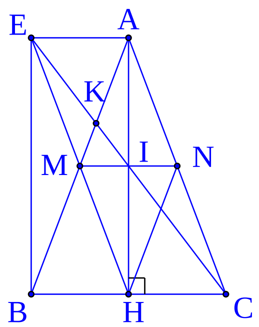
a) Chứng minh AHBE là hình chữ nhật.

b) Chứng minh ACHE là hình bình hành.

c) Gọi N là trung điểm của AC. Chứng minh ba đường thẳng AH, CE, MN đồng qui.

d) CE cắt AB tại K. Chứng minh AB = 3AK.

HD:



a)Theo giả thiết thì M là trung điểm của AB và HE.

Tứ giác AHBE có hai đường chéo AB và HE cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn nên AHBE là hình bình hành.

Mặt khác $AHB = 90^0$ nên AHBE là hình chữ nhật.

b) Vì tam giác ABC cân tại A nên H là trung điểm của BC. Suy ra BH = CH.

Ta có AE // CH và AE = BH = CH nên ACHE là hình bình hành.

c) HN là đường trung bình trong tam giác ABC, ta có HN // AM và HN = AM nên AMHN là hình bình hành.

AEHC và AMHN là hai hình bình hành nên AH, CE, MN đồng qui tại trung điểm I của mỗi đoạn.

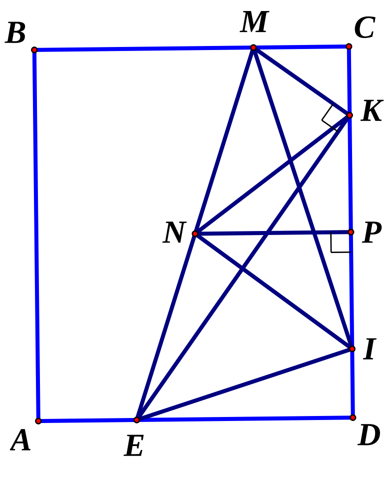
d)Trong tam giác AEH có AM và EI là hai đường trung tuyến, do đó K là trọng tâm tam giác AEH.

Suy ra $AK = \frac{2}{3}AM = \frac{1}{3}AB$.

Vậy AB = 3AK.

Bài 23:. Cho hình chữ nhật ABCD. Hai điểm I, K trên cạnh CD sao cho DI = CK, E là điểm bất kỳ trên cạnh AD. Đường thẳng vuông góc với EK tại K cắt BC ở M. Tính $\widehat{EIM}$.

HD:



Gọi N, P lần lượt là trung điểm của ME và CD,

Suy ra NP là đường trung bình trong hình thang vuông CMED.

Do đó ta có $NP \perp CD$.

Mặt khác, theo giả thiết DI = CK, suy ra PK = PI.

Trong tam giác NIK có NP là đường cao và trung tuyến, do đó NIK cân tại N.

Khi đó ta có IN = NK = NM = NE.

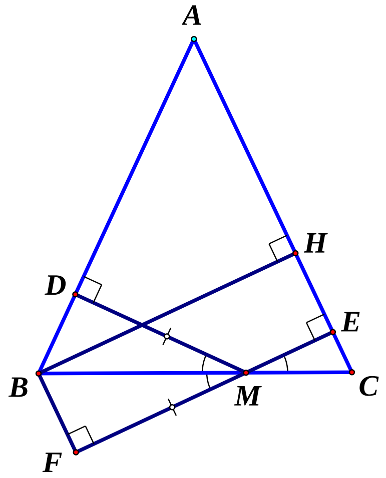
Tam giác IME có IN là trung tuyến và IN = NM = NE nên tam giác MIE vuông tại I.

Vậy $EIM = 90^0$.

Bài 24:. Cho ΔABC cân tại A có đường cao BH, M thuộc cạnh BC. Vẽ MD$\perp$AB tại D và ME$\perp$AC tại E. Trên tia đối của tia ME lấy điểm F sao cho MF = MD.

Chứng minh rằng: MD + ME = BH.

HD:



Ta có:

$$\begin{cases} DMB + DBM = 90^0 \\ EMC + ECM = 90^0 \\ DBM = ECM \end{cases} \Rightarrow DMB = EMC = FMB.$$

Mặt khác, theo giả thiết DM = FM, từ đó ta chứng minh được D và F đối xứng nhau qua BC.

Suy ra $BFM = 90^0$.

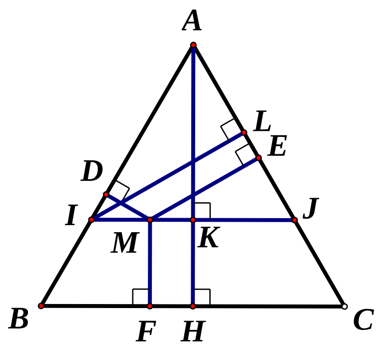
MD + ME = MF + ME = EF.

Tứ giác BHEF có $H = E = F = 90^0$, do đó BHEF là hình chữ nhật, suy ra BH = EF.

Vậy ta có MD + ME = BH.

Bài 25:. Cho tam giác ABC đều có đường cao AH, M nằm trong ΔABC (M có thể thuộc các cạnh của tam giác). Vẽ MD$\perp$AB tại D, ME$\perp$AC tại E, MF$\perp$BC tại F. Chứng minh rằng: MD + ME + MF = AH.

HD:



Đường thẳng qua M, song song với BC, cắt AB, AC, AH lần lượt tại I, J , K. Vì M nằm trong tam giác ABC nên M thuộc đoạn IJ và K thuộc đoạn AH.

Tứ giác MFHK có $F = H = K = 90^0$,

Suy ra MFHK là hình chữ nhật.

Ta có MF = KH.

Dễ thấy tam giác AIJ đều.

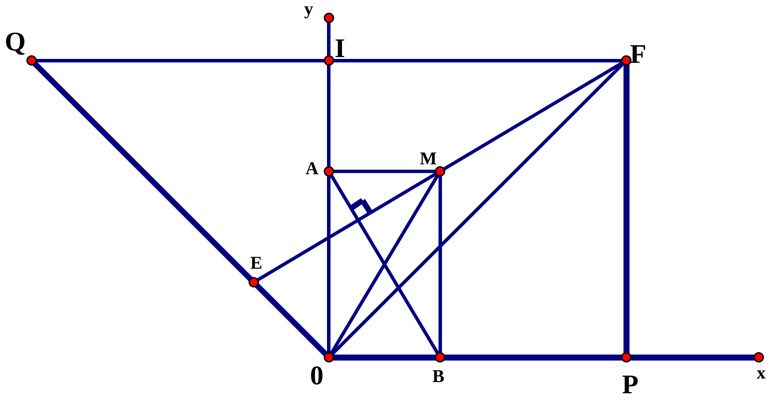
Dựng IL$\perp$AJ, L thuộc AJ, ta có IL = AK.

Theo bài tập trên, MD + ME = IL = AK.

Từ đó: MD + ME + MF = AK + KH = AH.

Bài 26: Cho góc $xOy = 90^0$ và một điểm M nằm trong góc đó. Vẽ MA vuông góc với Ox tại A; MB vuông góc với Oy tại B. trên đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB, lấy điểm E và F sao cho ME = MF = AB. Chứng minh Oy là tia phân giác của góc EOF.

HD:



Ta có tứ giác AMBO là hình chữ nhật

Suy ra AB=OM

Xét tam giác EOF ta có AB=OM=$\frac{1}{2}$EF

Suy ra tam giác EFO là tam giác vuông tại O

Suy ra $EOA + \text{AOF} = 90^0$

Mà $\text{xOy} = 90^0$ suy ra $\text{AOF} + FOX = 90^0$

Suy ra $EOA = FOX$

Qua F dựng đường thẳng vuông góc với OI cắt OE tại Q

Xét hai tam giác vuông QOI và FOP ta có $IOQ = FOP$ và OI=PF

Suy ra ΔQOI=ΔFOP

Suy ra OQ=OF $\Rightarrow \Delta$QOF cân tại O

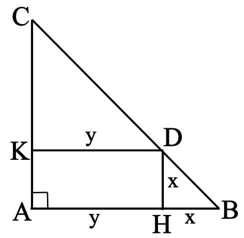
Mà OI$\perp$QF $\Rightarrow$OI là đường cao của tam giác QOF

Trong tam giác cân đường cao cũng là đường phân giác

Vậy Oy là tia phân giác của góc EOF.

Bài 27: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh huyền BC lấy điểm D. Vẽ DH ⊥ AB, DK ⊥ AC. Biết AB = a, tính giá trị lớn nhất của tích DH . DK.

HD:



Tìm cách giải

Ta thấy DH + DK = AB (không đổi). Dựa vào các hằng đẳng thức ta có thể tìm được mối quan hệ giữa tích DH . DK với tổng DH + DK. Mối quan hệ này được biểu diễn như sau:

Ta có $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$

$$\Leftrightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}.$$

Trình bày lời giải

Tứ giác AHDK có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Tam giác HBD có $H = 90^o;\ B = 45^o$ nên là tam giác vuông cân.

Ta đặt DH = x, DK = y thì HB = x, AH = y và x + y = a.

Ta có $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y $\Leftrightarrow$ D là trung điểm của BC.

Vậy giá trị lớn nhất của tích DH . DK là $\frac{a^2}{4}$ khi D là trung điểm của BC.

Dạng 3: Sử dụng định lý thuận và đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông

Phương pháp giải: Sử dụng định lý về tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh các hình bằng nhau hoặc chứng minh tam giác vuông

Bài 1: Tính độ dài trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 7cm và 24cm.

HD:

Biết hai cạnh góc vuông, dùng Pytago để tính cạnh huyền , trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền nên trung tuyến $AM = 12,5(cm)$.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A, CH là đường cao (H $\in$ AB). Gọi D là điểm đối xứng với điểm B qua A.

a) Chứng minh tam giác DCB là tam giác vuông.

b) Chứng minh DCA=HCB .

HD:

a) Vì A là trung điểm BD mà AB=AC=AD

Nên ΔDCB vuông tại C(tính chất trung tuyến)

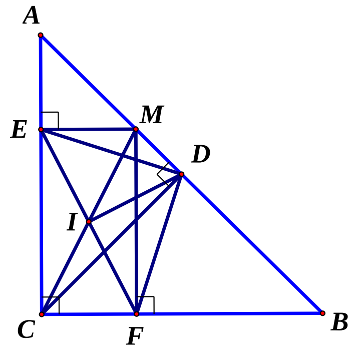
b) DCA=CDA mà CDA =HCB (cùng phụ góc B) nên DCA=HCB .

Bài 1:. Cho tam giác ABC vuông cân tại C, M là điểm bất kỳ trên cạnh AB. Vẽ ME $\perp$ AC tại E, MF $\perp$ BC tại F. Gọi D là trung điểm của AB.Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CFME là hình chữ nhật.

b) Δ DEF vuông cân.

HD:



a) Theo giả thiết thì tứ giác CFME có $C = F = E = 90^0$

Do đó MECF là hình chữ nhật.

b) Gọi I là giao điểm của EF và CM, I là trung điểm của EF và CM.

Vì tam giác ABC vuông cân tại C nên $CD \perp AB$. Xét tam giác DCM vuông tại D, có DI là trung tuyến nên:

DI = $\frac{1}{2}$MC = $\frac{1}{2}$EF. Mà DI cũng là trung tuyến trong tam giác DEF, do vậy tam giác DEF vuông tại D.

Trong tứ giác CEDF có $CED + CFD = 180^0 \Rightarrow CED = BFD$ (1).

Dễ thấy $ECD = FBD = 45^0$(2) và EC = MF = BF (3) (tam giác BFM vuông cân tại F).

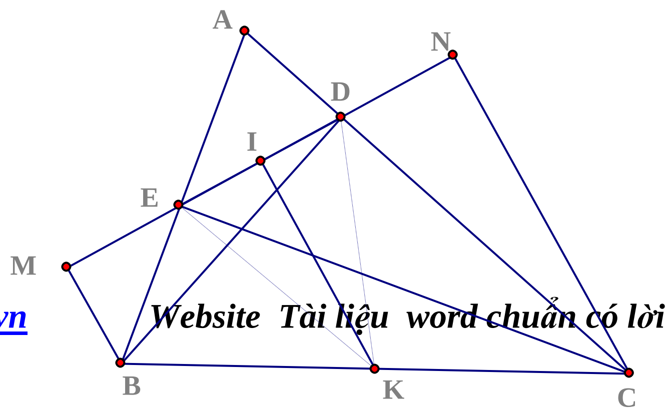
Từ (1), (2), (3) suy ra hai tam giác CED và BFD bằng nhau (g-c-g).

Từ đó, DE = DF. Vậy tam giác DEF vuông cân tại D.

Bài 2: Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Gọi M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C đến DE. Gọi I là trung điểm của DE, K là trung điểm của BC. Chứng minh rằng

a). $IK \perp ED$

b). EM = DN



HD:

a). Ta có $EK = DK = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \begin{cases} \Delta EKD(KE = KD) \\ IE = ID \end{cases}$

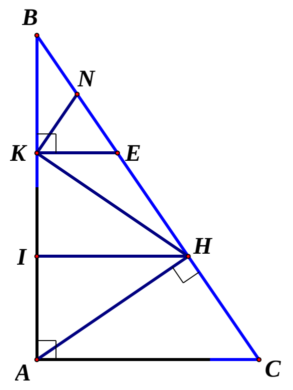
$\Rightarrow IK \perp ED(dpcm)$

b). $\begin{cases} KB = KC(K \in BC) \\ KI // BM // NC \end{cases} \Rightarrow KI$ là đường trung bình của hình thang MBNC

$\Rightarrow \begin{cases} IM = IN \\ IE = ID \end{cases} \Rightarrow ME = DN$

Bài 3:. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC). Kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Gọi E là điểm đối xứng của C qua H, vẽ EK vuông góc với AB tại K. Gọi I là trung điểm AK, N là trung điểm của BE. Chứng minh rằng: KE // IH và HK vuông góc KN.

HD:



Ta có $EK \perp AB \Rightarrow EK //$ AC, tứ giác EKAC là hình thang vuông tại K và A.

Lại có H là trung điểm EC, I là trung điểm AK nên HI là đường trung bình của hình thang EKAC. Từ đó ta có EK // HI.

$HI \perp AK$, I là trung điểm AK, nên tam giác HKA cân tại H. Do đó $HKA = HAK$ (1)

Tam giác BEK vuông tại K, có KN là trung tuyến nên KN = NB = NE.

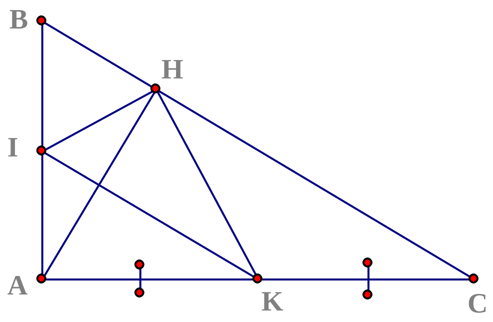
Tam giác KBN cân tại N, do đó $BKN = KBN$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $BKN + AKH = KBN + KAH = 90^0$.

Vậy $NKH = 90^0$.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Chứng minh

a). $I\hat{H}K = 90^0$ b). Chu vi tam giác IHK bằng nửa chu vi tam giác ABC



HD:

a) Ta có: $\Delta IAH, \Delta KAH$ cân tại I và K $\Rightarrow I\hat{A}H = I\hat{H}A, H\hat{A}K = A\hat{H}K$

$$\Rightarrow I\hat{H}A + A\hat{H}K = 90^0 \Rightarrow I\hat{H}K = 90^0$$

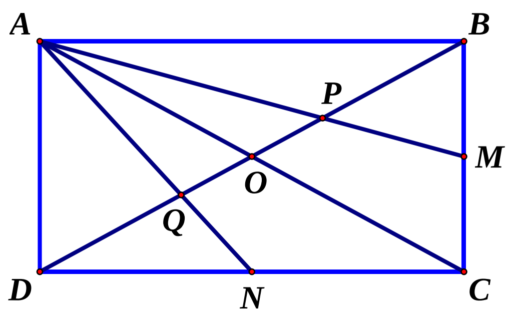
b). Ta có $IH = \frac{1}{2}AB, HK = \frac{1}{2}BC, IK = \frac{1}{2}BC \Rightarrow P_{IHK} = \frac{1}{2}P_{ABC} (dpcm)$

Bài 5:. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Gọi giao điểm của AM, AN với BD lần lượt là P, Q. Gọi AC cắt BD tại O. Chứng minh rằng:

a) AP = $\frac{2}{3}$AM, AQ = $\frac{2}{3}$AN.

b) BP = PQ = QD = 2.OP.

HD:



a) Ta có O là trung điểm của AC và BD.

Trong tam giác ABC, AM và BO là hai đường trung tuyến, do đó P là trọng tâm tam giác ABC. Từ đó ta có AP = $\frac{2}{3}$AM.

Chứng minh tương tự, ta có AQ = $\frac{2}{3}$AN.

b) Ta có: BP = $\frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}BD$; tương tự, $DQ = \frac{1}{3}BD$, suy ra $PQ = \frac{1}{3}BD$.

Mặt khác $OP = OQ = \frac{1}{3}OB$, do đó O là trung điểm PQ.

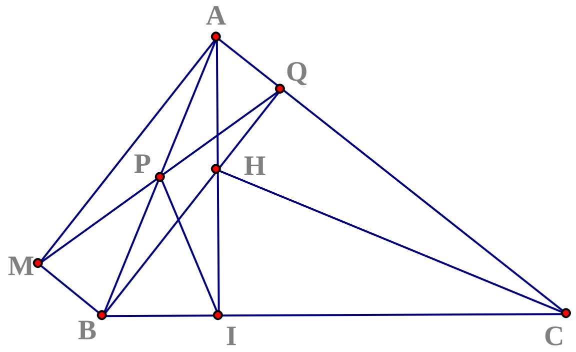
Vậy BP = PQ = QD = 2OP.

Bài 6: Cho tam giác ABC có đường cao AI. Từ A kẻ tia Ax vuông góc với AC, từ B kẻ tia By song song với AC. Gọi M là giao điểm của hai tia Ax và By. Nối M với trung điểm P của AB, đường MP cắt AC tại Q và BQ cắt AI tại H

a). Tứ giác AMBQ là hình gì

b). Chứng minh rằng CH vuông góc với AB

c). Chứng minh tam giác PIQ cân



HD:

a). Ta có tứ giác AMBQ là hình chữ nhật (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và bằng nhau)

b). Ta có H là trực tâm của $\Delta ABC \Rightarrow CH \perp AB$

c). có $PI = PQ = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta PIQ$ cân tại P.

Bài 7:. Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^0$, AB < CD). Vẽ BE vuông góc CD tại E. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho BM = DC.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABED là hình chữ nhật.

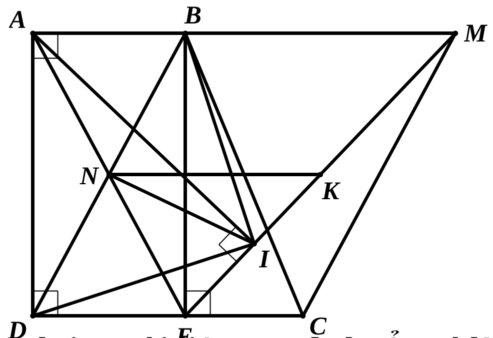
b) Chứng minh rằng AE = MC.

c) Gọi N là giao điểm của AE và BD, K là trung điểm của EM.

Chứng minh rằng NK = $\frac{1}{2}$AM.

d) Vẽ AI vuông góc với ME tại I. Chứng minh rằng BI$\perp$ID.

HD:



a) Tứ giác ABED có:

$A = D = E = 90^0$ nên ABED là hình chữ nhật.

b) Theo giả thiết ta có:

BM = DC và BM // DC.

Do đó BMCD là hình bình hành, suy ra MC = BD.

Mặt khác, vì ABED là hình chữ nhật nên BD = AE.

Từ đó ta có: AE = MC.

c) Ta có N là trung điểm của AE và BD.

Trong tam giác AME, NK là đường trung bình. Do đó NK = $\frac{1}{2}$AM.

d) Xét tam giác AIE vuông tại I, có IN là trung tuyến nên IN = $\frac{1}{2}$AE.

Vì AE = BD nên IN = $\frac{1}{2}$BD.

Xét tam giác BDI có IN là đường trung tuyến và IN = $\frac{1}{2}BD$, do đó ΔBDI vuông tại I.

Vậy $BI \perp ID$.

Bài 8:. Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^0$; AB < CD). Vẽ BE vuông góc với CD tại E. Trên tia đối tia BA lấy điểm M sao cho BM = DC. Gọi N là giao điểm của AE và BD; Gọi K là trung điểm của EM. Vẽ AI vuông góc với ME tại I.

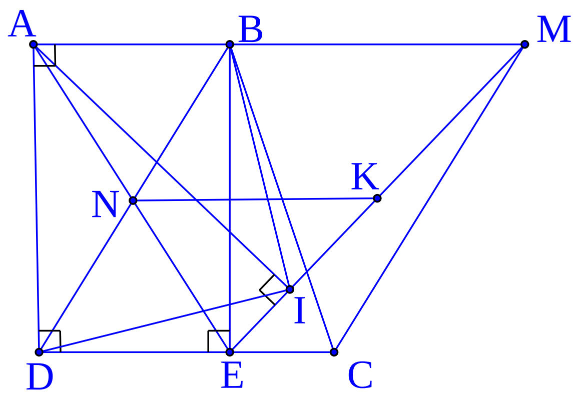
a) Chứng minh ABED là hình chữ nhật.

b) Chứng minh BMCD là hình bình hành.

c) Chứng minh NK song song AM.

d) Chứng minh ΔBID vuông.

HD:



a) Tứ giác ABED có $A = D = E = 90^0$ nên ABED là hình chữ nhật.

b) Theo giả thiết thì BM = CD. Vì ABCD là hình thang nên CD // BM.

Do đó ta có BMCD là hình bình hành.

c) Vì ABED là hình chữ nhật có N là giao điểm hai đường chéo nên N là trung điểm của AE và BD.

Xét tam giác EAM có NK là đường trung bình nên NK // AM.

d)Tam giác AIE có IN là trung tuyến nên $IN = \frac{1}{2}AE$.

Mà AE = BD nên ta được $IN = \frac{1}{2}BD$.

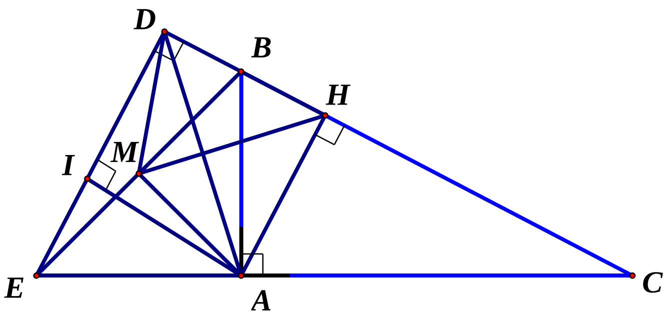
Trong tam giác IBD có IN là trung tuyến và $IN = \frac{1}{2}BD$ nên ΔBID vuông tại I.

Bài 9:. Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB), đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D so cho HD = HA, đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng AE = AB.

b) Gọi M là trung điểm của BE. Tính AHM.

HD:



a) Dựng $AI \perp DE$, I thuộc DE. Ta có AHDI là hình chữ nhật.

Suy ra AI = HD = AH.

Hai tam giác vuông AIE và AHB có:

$EAI = BAH$ (cùng phụ với góc IAB), AI = AH.

Do đó $\Delta AIE = \Delta AHB$, suy ra AE = AB.

b) Ta có tam giác DBE vuông tại D, tam giác ABE vuông tại A.

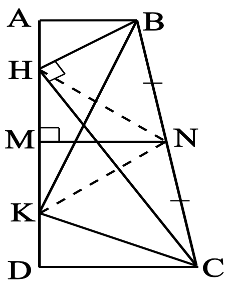
Vì M là trung điểm của BE nên AM = DM = $\frac{1}{2}$BE.

Từ đó dễ dàng thấy được $\Delta AMH = \Delta DMH$ (c-c-c).

Suy ra $MHA = MHD = 45^0$.

Bài 10: Cho hình thang ABCD, $A = D = 90^o$. Trên cạnh AD có một điểm H mà AH < DH và $BHC = 90^o$. Chứng minh rằng trên cạnh AD còn một điểm K sao cho $BKC = 90^o$.

HD:



Tìm cách giải

Giả sử đã chứng minh được $BKC = 90^{o}$ thì ΔBHC và Δ BKC là hai tam giác vuông chung cạnh huyền BC nên hai đường trung tuyến ứng với BC phải bằng nhau.

Do đó cần chứng minh hai đường trung tuyến này bằng nhau.

Trình bày lời giải

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Khi đó MN là đường trung bình của hình thang ABCD, suy ra MN // AB

⇒ MN ⊥ AD (vì AB ⊥ AD).

Trên cạnh AD lấy điểm K sao cho DK = AH ⇒ MK = MH.

ΔNHK có NM vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân

⇒ KN = HN.

Xét ΔHBC vuông tại H có $HN = \frac{1}{2}BC$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền).

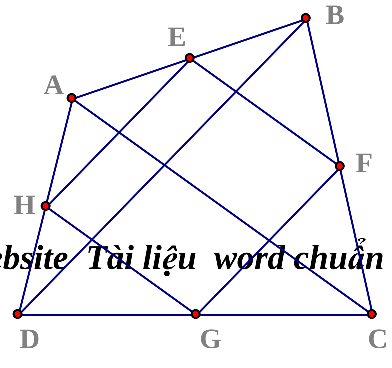
Suy ra $KN = \frac{1}{2}BC$ (vì KN = HN).

Do đó ΔKBC vuông tại K $\Rightarrow BKC = 90^{o}$.

Dạng 4: Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình chữ nhật

Bài 1: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để tứ giác EFGH là hình chữ nhật



HD:

Ta có tứ giác EFGH là hình bình hành

Để EFGH trở thành hình chữ nhật thì :

$$\Rightarrow H\text{EF}=90^0 \Rightarrow HE \perp \text{EF} \Rightarrow \text{AC} \perp \text{BD}$$

Vậy điều kiện là hai đường chéo của tứ giác ABCD vuông góc với nhau.

Bài 2:. Cho ABCD là hình bình hành có tâm O. Lấy E bất kì thuộc đoạn OD. Dựng F là điểm đối xứng của C qua E.

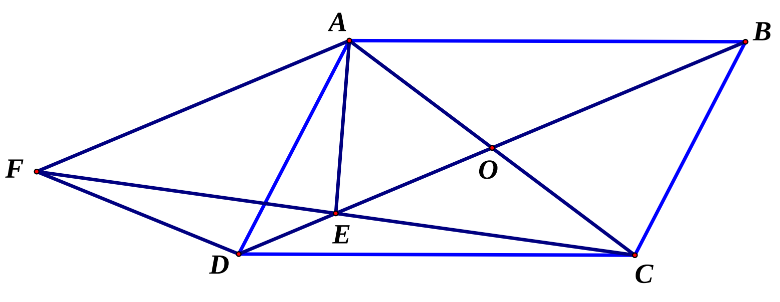
a) Chứng minh AFDE là hình thang.

b) Tìm vị trí của E trên OD để AFDE là hình bình hành.

c) Nếu E là trung điểm của OD. Chứng minh AFDO là hình bình hành.

d) Tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để AFDO là hình chữ nhật.

HD:



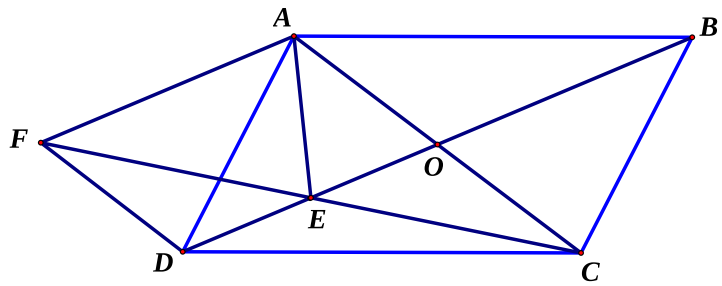
a)Theo giả thiết thì E là trung điểm của CF,

Do đó OE là đường trung bình trong tam giác ACF, Từ đó suy ra OE // AF, hay DE // AF. Vậy AFDE là hình thang.

b) Theo trên thì AFDE là hình bình hành khi và chỉ khi AF = DE.

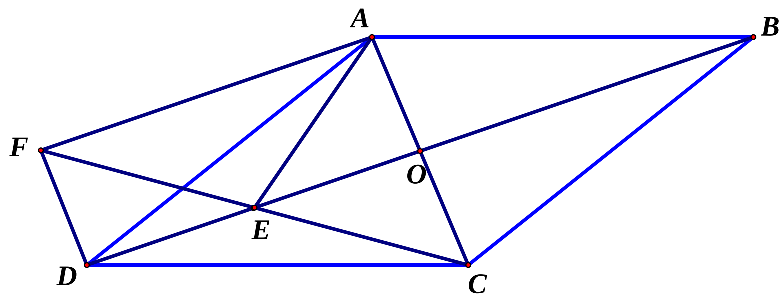
Mà AF = 2OE nên AFDE là hình bình hành khi và chỉ khi DE = 2OE, hay E là trọng tâm của tam giác ADC.

c) Trường hợp E là trung điểm của OD.



Ta có AF // OD và AF = 2OE = OD. Vậy nên AFDO là hình bình hành.

e) Trường hợp E là trung điểm của OD, tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để AFDO là hình chữ nhật.



Theo câu trên thì AFDO đã là hình bình hành, nên AFDO là hình chữ nhật khi và chỉ khi $AO \perp DO$, hay ABCD là hình thoi.

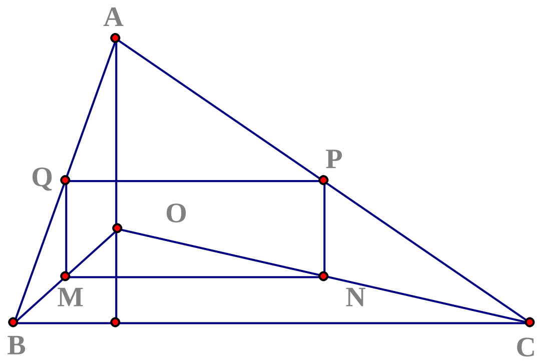
Bài 3: Cho tam giác ABC. Gọi O là 1 điểm thuộc miền trong của tứ giác. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB

a). Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành b). Xác định vị trí của điểm O để tứ giác MNPQ là hình chữ nhật

HD:

a). Ta có MNPQ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

b). Để MNPQ trở thành hình bình hành thì O nằm trên đường cao xuất phát từ đỉnh A của ΔABC

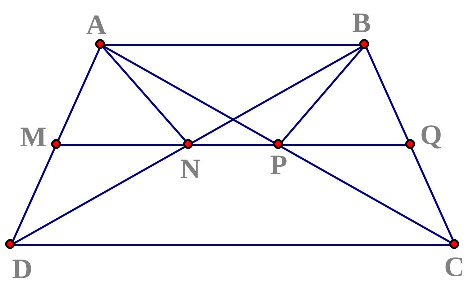


Bài 4: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AB < CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC

a). Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng

b). Chứng minh tứ giác ABPN là hình thang cân

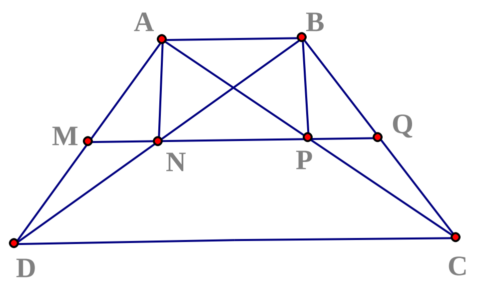
c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD để ABPN là hình chữ nhật



HD:

a). Ta có $MN // AB, MP // AB, PQ // AB, PN // AB \Rightarrow M, N, P, Q$ thẳng hàng nhau.

b). Hình thang ABPN có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân c). để ABPN là hình chữ nhật thì NP = AB hay CD = 3AB



Bài 5:. Cho ΔABC nhọn, các đường trung tuyến BN và CM cắt nhau tại G. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BG và CG.

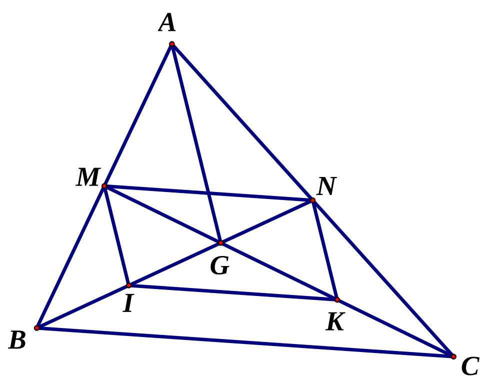
a) Chứng minh tứ giác MNCB là hình thang.

b) Chứng minh tứ giác MNKI là hình bình hành.

c) ΔABC cần thêm điều kiện gì để tứ giác MNKI là hình chữ nhật.

d) Tính diện tích ΔABC biết diện tích của ΔABN bằng $5cm^2$.

HD:



a)M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC,

Nên MN là đường trung bình trong tam giác ABC,

Suy ra MN // BC. Vậy MNCB là hình thang.

b) Trong ΔBCG, IK là đường trung bình,

Suy ra IK = $\frac{1}{2}$BC và IK // BC (1).

Theo trên: $MN = \frac{1}{2}BC$ và MN // BC (1).

Từ (1) và (2) suy ra MN = IK và MN // IK. Vậy MNKI là hình bình hành.

c) MNKI là hình chữ nhật khi và chỉ khi $MI \perp IK$.

Vì IK // BC nên $MI \perp IK \Leftrightarrow MI \perp BC$.

Trong ΔABG, MI là đường trung bình nên MI // AG.

Do đó $MI \perp BC \Leftrightarrow AG \perp BC$.

Vì AG là đường trung tuyến trong ΔABC nên $AG \perp BC$ khi ΔABC cân tại A.

Như vậy MNKI là hình chữ nhật khi và chỉ khi ΔABC cân tại A.

d) Gọi h là khoảng cách từ đỉnh B lên AC. Khi đó ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}h.AC \text{ và } S_{ABN} = \frac{1}{2}h.AN = \frac{1}{2}h.\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Như vậy $S_{ABC} = 2.S_{ABN}$.

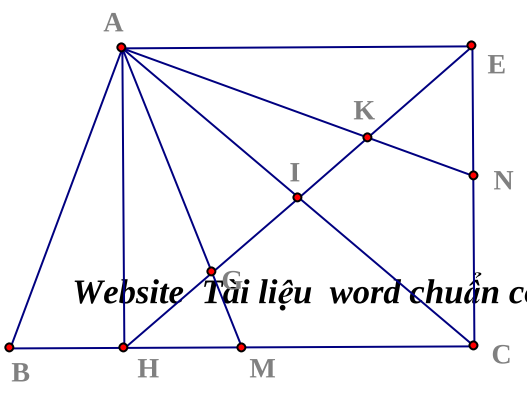
Theo giả thiết $S_{ABN} = 5cm^2$ nên $S_{ABC} = 10cm^2$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC. Lấy E là điểm đối xứng với H qua I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K

a). Chứng minh tứ giác AHCE là hình chữ nhật

b). Chứng minh HG = GK = KE



HD:

a). Chứng minh tứ giác AHCE là hình bình hành, có

$AHC = 90^0 \Rightarrow \Diamond AHCE$ là hình chữ nhật

b). Chứng minh G, K lần lượt là các trọng tâm của tam giác AHC, AEC và sử dụng tính chất 2 đường chéo của HCN

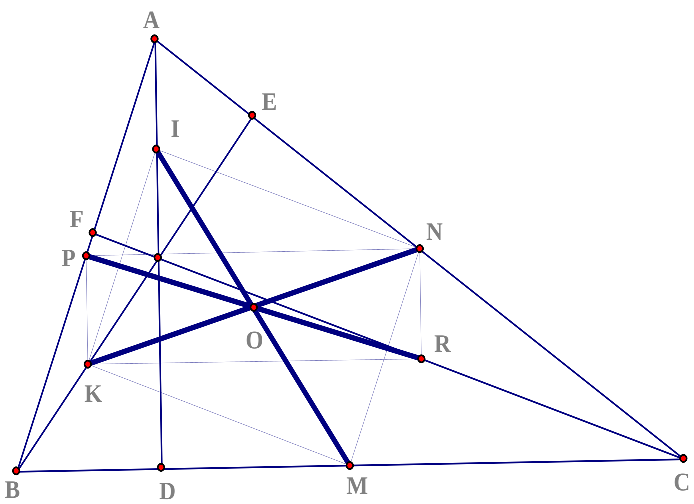
Bài 2: Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, gọi I, K, R theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Chứng minh rằng

a). Tứ giác MNIK, PNRK là các hình chữ nhật

b). P, N, R, K, M, I cùng thuộc 1 đường tròn

c). D, E, F cũng thuộc đường tròn trên

HD:



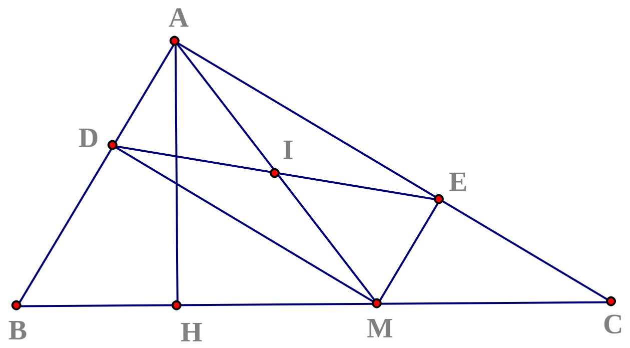
Ta có: $OD = \frac{1}{2}IM, OE = \frac{1}{2}KN, \text{OF}=\frac{1}{2}PR$

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, M thuộc BC. Gọi D và E là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC

a). Định dạng tứ giác ADME

b). Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh A, I, M thẳng hàng

c). Điểm M nằm ở đâu trên BC thì DE nhỏ nhất. Tính DE trong trường hợp đó biết AB = 15cm, AC =20cm



HD:

a). Tứ giác ADME có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật

c). DE nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất (DE = AM). AM nhỏ nhất khi và chỉ khi AM = AH khi M trùng H

Xét ΔABC vuông tại A

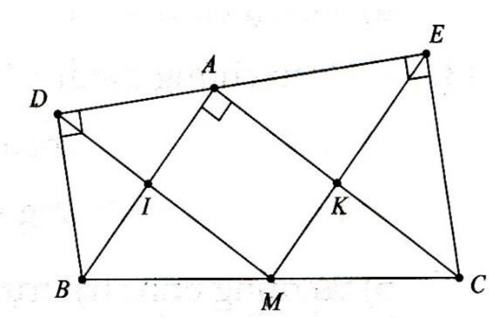
$$\Rightarrow BC = 25cm(pytago) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AB.AC \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{15.20}{25} = 12(cm)$$

Bài 4:Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ hai tam giác vuông cân ADB (DA = DB) và ACE (EA = EC). Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của DM với AB, và K là giao điểm của EM với AC. Chứng minh:

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) Tứ giác IAKM là hình chữ nhật.

c) Tam giác DME là tam giác vuông cân.



HD:

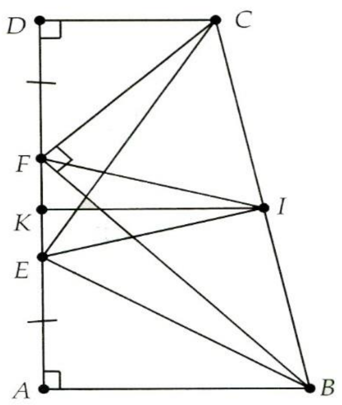
a) Chứng minh $\widehat{DEA} = 180^0$

b) Chứng minh $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = \widehat{IAK} = 90^0$

c) Chứng minh ΔDME có $\widehat{EDM} = \widehat{DEM} = 45^0$

$\Rightarrow$ΔDME vuông cân ở M.

Bài 5:Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$) có các điểm E và F thuộc cạnh AD sao cho AE = DF và $\widehat{BFC} = 90^0$. Chứng minh $\widehat{BEC} = 90^0$.



HD:

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC, AD.

Chú ý ΔFEI cân ở I.

Chứng minh: IE =IB = IC $\Rightarrow$ΔEBC vuông tại E$\Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0$