HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN THEO THAM SỐ m

HPT bậc nhất hai ẩn phụ thuộc tham số có dạng: $\begin{cases} a_m x + b_m y = c_m \\ a'_m x + b'_m y = c'_m \end{cases}$

Trong đó: a_m ; b_m ; c_m ; a'_m ; b'_m ; c'_m là những hệ số phụ thuộc tham số m.

I.Các dạng bài tập

Dạng 1: Giải và biện luận hệ phương trình

Phương pháp giải: Cho hệ phương trình hai ẩn : (I) $\begin{cases} a_m x + b_m y = c_m & (1) \\ a'_m x + b'_m y = c'_m & (2) \end{cases}$

Bước 1: Đưa hệ phương trình về phương trình bậc nhất dạng $ax+b=0$ (Dùng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số,…)

Bước 2: Xét phương trình $ax+b=0$ (1) $(a,b$ là hằng số)

TH 1: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$.

TH 2: Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

TH 3: Phương trình (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$.

Bước 3: Kết luận.

Bài tập minh họa

Bài 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 & (1) \\ mx+y=3m-1 & (2) \end{cases}$ Giải và biện luận hệ phương trình trên theo m.

Hướng Dẫn:

Từ phương trình (2) ta có $y=3m-1-mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x+m(3m-1-mx)=m+1 \Leftrightarrow (m^2-1).x=3m^2-2m-1 \quad (3)$$

Trường hợp 1: $m \neq \pm 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x=\dfrac{3m^2-2m-1}{m^2-1}=\dfrac{(m-1)(3m+1)}{(m-1).(m+1)}=\dfrac{3m+1}{m+1} \\ y=3m-1-m.\dfrac{3m+1}{m+1}=\dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m=1$. Khi đó phương trình (3) thành: $0.x=0$.

Vậy hệ có vô số nghiệm dạng $(x;2-x),x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 3: $m=-1$ khi đó phương trình (3) thành: $0.x=4$ (3) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(a+1)x-y=a+1 & (1)\\ x+(a-1)y=2 & (2)\end{cases}$ (a là tham số). Giải và biện luận hệ phương trình.

Hướng Dẫn:

Từ PT (1) ta có: $y=(a+1)x-(a-1)$ (3) thế vào PT (2) ta được:

$$x+(a+1)\left[(a+1)x-(a-1)\right]=2\Leftrightarrow x+(a^2-1)x-(a^2-1)=2\Leftrightarrow a^2x=a^2+1 \qquad (4)$$

TH1: $a\neq 0$, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{a^2+1}{a^2}$. Thay vào (3)ta có:

$$y=(a+1)\frac{a^2+1}{a^2}-(a+1)=\frac{(a+1)(a^2+1)-a^2(a+1)}{a^2}=\frac{a^3+a+a^2+1-a^3-a^2}{a^2}=\frac{a+1}{a^2}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất$(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

TH2: Nếu $a=0$, phương trình (4) vô nghiệm. Suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

KL: $a\neq 0$ hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất$(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

$a=0$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}mx-y=2m-1\\ x-(m+1)y=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-2y=m+3\\ mx-3y=-5\end{cases}$ c) $\begin{cases}ax-y=2\\ x-ay=2\end{cases}$

d) $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} ax + y = 3 \\ 4x + ay = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} mx - 2my = m+1 \\ x + (m+1)y = 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - my = 2 \\ mx - 4y = m - 2 \end{cases}$

Dạng 2: Điều kiện của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất, vô số nghiệm, vô nghiệm.

Thường trong bài toán tìm m để hệ có nghiệm, vô nghiệm còn liên quan đến các ý b), ý c) của bài toán nên ta thường làm theo các bước như bài toán Giải và biện luận hệ:

Sau đó lập luận để tìm m theo yêu cầu bài toán.

Từ đó cũng tìm được luôn nghiệm x, y theo m để làm các ý tiếp theo.

Bài tập minh họa

Bài 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$. Tìm điều kiện của m để p/trình có nghiệm duy nhất.

Hướng Dẫn:

Với $m = 0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, hệ có nghiệm.

Với $m \neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{m} \neq \dfrac{-m}{2} \Leftrightarrow -m^2 \neq 2 \Leftrightarrow m^2 \neq -2$ (luôn đúng).

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.

Nhận xét: Khi lập tỉ số $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ nếu a' hoặc b' có tham số m thì ta phải xét thêm trường hợp $a' = 0$ hoặc $b' = 0$.

Bài 2: Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 2x + ay = -4 \\ ax - 3y = 5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $a = 1$

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Hướng Dẫn:

a) Với $a=1$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y=-4\\x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+3y=-12\\x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=-7\\x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\-1-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$$

Vậy với $a=1$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=(-1;-2)$.

b) Ta xét 2 trường hợp:

Nếu $a=0$, hệ có dạng: $\begin{cases}2x=-4\\-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-\dfrac{5}{3}\end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất

Nếu $a\neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\dfrac{2}{a}\neq\dfrac{a}{-3}\Leftrightarrow a^2\neq -6$ (luôn đúng, vì $a^2\geq 0$ với mọi a)

Do đó, với $a\neq 0$, hệ luôn có nghiệm duy nhất.

Tóm lại hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất với mọi a.

Bài 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+my=1 & (1)\\2mx+m(m-1)y=3 & (2)\end{cases}$.Tìm giá trị của m để hệ phương trình:

a)Có nghiệm duy nhất.

b)Vô nghiệm.

Hướng Dẫn:

a)Với $m=0$ thì (2) là $0x+0y=3$, vô nghiệm.

Với $m\neq 0$, điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất là $\dfrac{2m}{1}\neq\dfrac{m(m-1)}{m}\Leftrightarrow 2m\neq m-1\Leftrightarrow m\neq -1$.

Vậy giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất là $m\neq 0$ và $m\neq -1$.

b)Với $m=0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Với $m\neq 0$, điều kiện để hệ vô nghiệm là $\dfrac{2m}{1}=\dfrac{m(m-1)}{m}\neq\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 2m=m-1\neq\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy giá trị của m để hệ vô nghiệm là $m=0$ hoặc $m=-1$.

Lưu ý: Có thể giải bằng cách rút x từ (1) rồi thay vào (2) và rút gọn được $m(m+1)y=2m-3$.

Với $m\neq 0$ và $m\neq -1$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Với $m=0$ hoặc $m=-1$ thì hệ vô nghiệm.

Bài 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m-2)x-3y=-5\\ x+my=3\end{cases}(I)$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình (I) với $m=1$.

b) Chứng minh hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất với mọi m. Tìm nghiệm duy nhất đó theo m.

Hướng Dẫn:

a) Thay $m=1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-x-3y=5\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2y=-2\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=3-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=3-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=2\end{cases}$$

b) $\begin{cases}(m-2)x-3y=-5\\ x+my=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2)(3-my)-3y=-5\\ x=3-my\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m-m^2y-6+2my-3y=-5\\ x=3-my\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m^2-2m+3)y=3m-1 & (1)\\ x=3-my & (2)\end{cases}$$

Ta có: $m^2-2m+3=(m-1)^2+2>0\forall m$ nên PT (1) có nghiệm duy nhất $\forall m$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\forall m$

Từ (1) ta có: $y=\dfrac{3m-1}{m^2-2m+3}$ thay vào (2) ta có $x=\dfrac{9-5m}{m^2-2m+3}$

Bài 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=m+1 & (1)\\ mx+y=3m-1 & (2)\end{cases}$. Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

Hướng Dẫn:

Từ phương trình (2) ta có $y=3m-1-mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x+m(3m-1-mx)=m+1\Leftrightarrow(m^2-1)x=3m^2-2m-1 \quad (3)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất , tức là

$m^2-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq \pm 1$.

Ta cũng có thể lập luận theo cách khác: Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi :

$\frac{1}{m}\neq \frac{m}{1}\Leftrightarrow m^2\neq 1\Leftrightarrow m\neq \pm 1$.

Vậy : $m\neq \pm 1$

Bài 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=2m \\ -2x+y=m+1 \end{cases}$. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó.

Hướng Dẫn:

Hệ $\begin{cases} mx-2y=2m \quad (1) \\ -2x+y=m+1 \ (2) \end{cases}$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{m}{-2}\neq \frac{-2}{1}\Leftrightarrow m\neq 4$.

Từ phương trình (2) ta có: $y=2x+m+1$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$mx-2\left(2x+m+1\right)=2m\Leftrightarrow \left(m-4\right)x=4m+2\Leftrightarrow x=\frac{4m+2}{m-4},\left(m\neq 4\right)$$

$$\Rightarrow y=2.\left(\frac{4m+2}{m-4}\right)+m+1=\frac{m^2+5m}{m-4}.$$

Vậy với $m\neq 4$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(\frac{4m+2}{m-4};\frac{m^2+5m}{m-4}\right)$.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Tìm m để hệ phương trình sau: Vô nghiệm ; Vô số nghiệm: $\begin{cases} x-my=m & (1) \\ mx-9y=m+6 & (2) \end{cases}$

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+4y=9 \\ x+my=8 \end{cases}$. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất, vô nghiệm.

Bài 3: Cho hệ phương trình (m là tham số) : $\begin{cases} mx - y = 3 \\ -x + 2my = 1 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 1.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Dạng 3: Điều kiện của tham số m để hệ có nghiệm thỏa mãn điều kiện đã cho.

Bước 1: Tìm đ/kiện của m để hệ có nghiệm duy nhất rồi suy ra nghiệm x ; y của hệ theo m

Bước 2: Giải điều kiện bài toán:

Hệ có nghiệm nguyên:

Viết Viết x, y của hệ về dạng: n + $\frac{k}{f(m)}$ với n, k nguyên

Tìm m nguyên để f(m) là ước của k

Hệ có nghiệm x, y dương (âm):

Giải bất phương trình ẩn m => Tập giá trị của m

Hệ có nghiệm x, y thỏa mãn một hệ thức đã cho:

Thay biểu thức nghiệm x , y vào hệ thức rồi giải phương trình ẩn m

=> Giá trị của m

Bước 4: Giải điều kiện trên kết hợp với giá trị m để hệ có nghiệm duy nhất

=> Kết luận giá trị m (tập giá trị m) thỏa mãn điều kiện.

Bài tập minh họa

Bài 1:Tìm a,b biết hệ phương trình: $\begin{cases}2x+by=a\\bx+ay=5\end{cases}$ có nghiệm $x=1;\ y=3$.

Hướng Dẫn:

Thay $x=1;\ y=3$ vào hệ ta có:

$$\begin{cases}2.1+b.3=a\\b.1+a.3=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3b=2\\3a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-9b=6\\3a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10b=-1\\3a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{-1}{10}\\a=\dfrac{17}{10}\end{cases}.$$

Vậy $a=\frac{-1}{10};\ y=\frac{17}{10}$ thì hệ phương trình có nghiệm $x=1;\ y=3$.

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}2x-ay=5b-1\\bx-4y=5\end{cases}$. Tìm a,b biết hệ có nghiệm $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Hướng Dẫn:

Hệ phương trình: $\begin{cases}2x-ay=5b-1\\bx-4y=5\end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-2a=5b-1\\b-8=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a=5b-3\\b=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a=62\\b=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-31\\b=13\end{cases}$$

Vậy a = -31, b = 13 thì hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Bài 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(a+1)x-y=a+1 & (1)\\x+(a-1)y=2 & (2)\end{cases}$ (a là tham số)

a)Tìm các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên

b)Tìm a để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn $x+y$ đạt GTNN.

Hướng Dẫn:

Từ PT (1) ta có: $y=(a+1)x-(a-1)$ (3) thế vào PT (2) ta được:

$$x+(a+1)\left[(a+1)x-(a-1)\right]=2\Leftrightarrow x+(a^2-1)x-(a^2-1)=2\Leftrightarrow a^2x=a^2+1 \qquad (4)$$

Với $a\neq 0$, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{a^2+1}{a^2}$. Thay vào (3)ta có:

$$y=(a+1)\frac{a^2+1}{a^2}-(a+1)=\frac{(a+1)(a^2+1)-a^2(a+1)}{a^2}=\frac{a^3+a+a^2+1-a^3-a^2}{a^2}=\frac{a+1}{a^2}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

a)Với $a\neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

Hệ phương trình có nghiệm nguyên: $\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a^2+1}{a^2}\in\mathbb{Z}\\\dfrac{a+1}{a^2}\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $(a\in\mathbb{Z})$

Điều kiện cần: $x=\dfrac{a^2+1}{a^2}=1+\dfrac{1}{a^2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a^2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=\pm1$

Điều kiện đủ:

$a=-1\Rightarrow y=0\in\mathbb{Z}$ (nhận)

$a=1\Rightarrow y=2\in\mathbb{Z}$ (nhận)

Vậy $a=\pm1$ hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

b)Với $a\neq0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

Ta có $x+y=\dfrac{a^2+1}{a^2}+\dfrac{a+1}{a^2}=\dfrac{a^2+a+2}{a^2}=1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}$.

Đặt $t=\dfrac{1}{a}$ ta được:

$$x+y=2t^2+t+1=2\left(t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\geq\frac{7}{8}$$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $t=-\dfrac{1}{4}$, khi đó $a=-4$

Vậy $a=-4$ thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn $x+y$ đạt GTNN bằng $\dfrac{7}{8}$

Bài 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=m+3\\2x-3y=m\end{cases}(I)$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m=1$.

b) Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x+y=-3$.

Hướng Dẫn:

a) Với $m=1$, hệ phương trình (I) có dạng:

$$\begin{cases}x+2y=4\\2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=8\\2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(2;1)$.

b) $\begin{cases} x+2y=m+3 \\ 2x-3y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=2m+6 \\ 2x-3y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=m+3 \\ 7y=m+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5m+9}{7} \\ y=\dfrac{m+6}{7} \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{5m+9}{7};\dfrac{m+6}{7}\right)$.

Lại có $x+y=-3$ hay $\dfrac{5m+9}{7}+\dfrac{m+6}{7}=-3 \Leftrightarrow 5m+9+m+6=-21 \Leftrightarrow 6m=-36 \Leftrightarrow m=-6$

Vậy với $m=-6$ thì hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất (x,y) thỏa mãn $x+y=-3$.

Bài 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$.Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn: $x^2-2y^2=-2$

Hướng Dẫn:

$$\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5m-1-2x \\ x-2(5m-1-2x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5m-1-2x \\ 5x=10m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2m \\ y=m-1 \end{cases}$$

Thay vào ta có

$$x^2-2y^2=-2 \Leftrightarrow (2m)^2-2(m-1)^2=-2 \Leftrightarrow 2m^2+4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{-2;0\}$.

Bài 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x+y=2m+9 \\ x+y=5 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$. Tìm m để biểu thức $A=xy+x-1$ đạt giái trị lớn nhất.

Hướng Dẫn:

$$\begin{cases} 3x+y=2m+9 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m+2 \\ y=3-m \end{cases} \Rightarrow A=xy+x-1=8-(m-1)^2 \Rightarrow A_{max}=8 \text{ khi } m=1.$$

Bài 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 \\ mx+y=2m \end{cases}$ (m là tham số)

a)Giải hệ phương trình khi $m=2$.

b)Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $\begin{cases} x\ge 2 \\ y\ge 1 \end{cases}$

Hướng Dẫn:

a)Thay $m=1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=3\\2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\4x+2y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=5\\2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

b)Xét hệ $\begin{cases}x+my=m+1 & (1)\\mx+y=2m & (2)\end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow y=2m-mx$ thay vào (1) ta được $x+m(2m-mx)=m+1\Leftrightarrow 2m^2-m^2x+x=m+1$

$\Leftrightarrow(1-m^2)x=-2m^2+m+1\Leftrightarrow(m^2-1)x=2m^2-m-1$ (3)

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow(3)$ có nghiệm duy nhất $m^2-1\neq0\Leftrightarrow m\neq\pm1$ $(*)$

Khi đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=\dfrac{2m+1}{m+1}\\y=\dfrac{m}{m+1}\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}x\geq2\\y\geq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m+1}{m+1}\geq2\\\dfrac{m}{m+1}\geq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-1}{m+1}\geq0\\\dfrac{-1}{m+1}\geq0\end{cases}\Leftrightarrow m+1<0\Leftrightarrow m<-1$

Kết hợp với $(*)$ ta được giá trị m cần tìm là $m<-1$.

Bài 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\mx+y=m+1\end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$;

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn: $2x+y\leq3$.

Hướng Dẫn:

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

Ta có: $\begin{cases}x+y=2\\2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

b) Ta có $y=2-(m-1)x$ thế vào phương trình còn lại ta được phương trình:

$mx+2-(m-1)x=m+1\Leftrightarrow x=m-1$ suy ra $y=2-(m-1)^2$ với mọi m

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(m-1;2-(m-1)^2\right)$

$$2x+y=2(m-1)+2-(m-1)^2=-m^2+4m-1=3-(m-2)^2\le 3$$ với mọi m.

Bài 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=5 & (1) \\ mx-y=4 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) trong đó x,y trái dấu.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x=|y|$.

Hướng Dẫn:

a) Với $m=2$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 2(2y+5)-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 3y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

b) Từ phương trình (1) ta có $x=2y+5$. Thay $x=2y+5$ vào phương trình (2) ta được:

$$m(2y+5)-y=4 \Leftrightarrow (2m-1).y=4-5m \quad (3)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với:

$$2m-1\ne 0 \Leftrightarrow m\ne \frac{1}{2}.$$

Từ đó ta được: $y=\dfrac{4-5m}{2m-1}$; $x=5+2y=\dfrac{3}{2m-1}$.

Ta có: $x.y=\dfrac{3(4-5m)}{(2m-1)^2}$.

Do đó $x,y<0 \Leftrightarrow 4-5m<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

c) Ta có: $x=|y| \Leftrightarrow \dfrac{3}{2m-1}=\left|\dfrac{4-5m}{2m-1}\right|$ (4)

Từ (4) suy ra $2m-1>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$. Với điều kiện $m>\dfrac{1}{2}$ ta có:

$$(4) \Leftrightarrow |4-5m|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-5m=3 \\ 4-5m=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{5}(l) \\ m=\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$$. Vậy $m=\dfrac{7}{5}$.

Bài 10: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 & (1) \\ mx+y=3m-1 & (2) \end{cases}$

a) Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) mà x,y đều là số nguyên.

b) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x,y) thì điểm $M(x,y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

c) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng Dẫn:

a) Từ phương trình (2) ta có $y=3m-1-mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x+m(3m-1-mx)=m+1 \Leftrightarrow (m^2-1)x=3m^2-2m-1 \quad (3)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất , tức là :

$$m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 1.$$

Ta cũng có thể lập luận theo cách khác: Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi :

$$\frac{1}{m}\neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m^2\neq 1 \Leftrightarrow m\neq \pm 1.$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m\neq \pm 1$.

Ta có: $\begin{cases} x=\dfrac{3m+1}{m+1}=3-\dfrac{2}{m+1} \\ y=\dfrac{m-1}{m+1}=1-\dfrac{2}{m+1} \end{cases}$.

Vậy x,y nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{2}{m+1}$ nguyên.

Do đó $m+1$ chỉ có thể là $-2;-1;1;2$. Vậy $m=-3;-2;0$ (thỏa mãn) hoặc $m=1$ (loại)

Vậy m nhận các giá trị là $-3;-2;0$.

b) Khi hệ có nghiệm duy nhất (x,y) ta có: $x-y=3-\dfrac{2}{m+1}-\left(1-\dfrac{2}{m+1}\right)=2$

Vậy điểm $M(x;y)$ luôn chạy trên đường thẳng cố định có phương trình $y=x-2$.

c) Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ theo (d) ta có: $y=x-2$. Do đó:

$$xy = x.(x-2) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1 \ge -1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x = 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{m+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m+1} = 2 \Leftrightarrow m+1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy với $m = 0$ thì $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ $x - y = 2$ theo cách khác:

Khi hệ phương trình $\begin{cases} x + my = m+1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(m \ne \pm 1)$ lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) của hệ ta thu được: $(m-1)x - (m-1)y = 2(m-1) \Rightarrow x - y = 2$

Bài 11:. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 3 & (1) \\ mx + y = 2m+1 & (2) \end{cases}$.Hệ có nghiệm duy nhất (x, y), hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây:

a) $P = x^2 + 3y^2$ (1).

b) $Q = x^4 + y^4$ (2).

Hướng Dẫn:

Từ phương trình (2) ta suy ra: $y = 2m + 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x + m(2m + 1 - mx) = 3 \Leftrightarrow (m^2 - 1).x = 2m^2 + m - 3 \quad (3).$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, điều đó xảy ra khi và chỉ khi: $m^2 - 1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \pm 1$.

Khi đó $\begin{cases} x = \dfrac{2m^2 + m - 3}{m^2 - 1} = \dfrac{(m-1)(2m+3)}{(m-1).(m+1)} = \dfrac{2m+3}{m+1} = 2 + \dfrac{1}{m+1} \\ y = 2m + 1 - m.\dfrac{2m+3}{m+1} = \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$.

a) Ta có: $P = x^2 + 3(x-2)^2 = 4x^2 - 12x + 12 = (2x-3)^2 + 3 \ge 3$

$$P = 3 \text{ khi } x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2m+3}{m+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4m + 6 = 3m + 3 \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

b) Ta có: $Q = x^4 + y^4 = x^4 + (x-2)^4$

đặt $t = x - 1$.

Khi đó

$$Q=(t+1)^4+(t-1)^4=t^4+4t^3+6t^2+4t+1+t^4-4t^3+6t^2-4t+1=2t^4+12t^2+2\ge 2$$

$$Q=2\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow x=1\Leftrightarrow \frac{2m+3}{m+1}=1\Leftrightarrow 2m+3=m+1\Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng 2.

Bài 12: Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=m & (1)\\ mx-(m+1)y=2m+2 & (2)\end{cases}$.Tìm giá trị của để hệ phương trình có nghiệm (x,y) duy nhất thỏa mãn tích xy nhỏ nhất.

Hướng Dẫn:

Rút từ (1) ta được $y=m-2x$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&mx-(m+1)(m-2x)=2m+2\\ &\Leftrightarrow mx-3m(m+1)+(2m+2)x=2m+2\\ &\Leftrightarrow (3m+2)x=2m+2+3m^2+3m\\ &\Leftrightarrow (3m+2)x=5m+2+3m^2\\ &\Leftrightarrow (3m+2)x=(3m+2)(m+1)\end{aligned}$$

Nếu $m\ne -\frac{2}{3}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=m+1\\ y=m-2\end{cases}$

Khi đó $xy=(m-1)(m+2)=m^2-m-2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\ge -\frac{9}{4}$.

$\min(xy)=-\frac{9}{4}$ tại $m=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn $m\ne -\frac{2}{3}$).

Bài 13: Định m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên: $\begin{cases}mx+2y=m+1\\ 2x+my=2m-1\end{cases}$

Hướng dẫn

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}mx+2y=m+1\\ 2x+my=2m-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2mx+4y=2m+2\\ 2mx+m^2y=2m^2-m\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(m^2-4)y=2m^2-3m-2\\ 2x+my=2m-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m^2-4)y=(m-2)(2m+1) & (1)\\ 2x+my=2m-1 & (2)\end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất ⇔ Phương trình (1) có nghiệm y duy nhất

⇔ $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Vậy với $m \neq \pm 2$ thì hệ có nghiệm duy nhất (x,y) là:

$$\begin{cases} y = \dfrac{(m-2)(2m+1)}{m^2-4} = \dfrac{2m+1}{m+2} = 2 - \dfrac{3}{m+2} \\ x = \dfrac{m-1}{m+2} = 1 - \dfrac{3}{m+2} \end{cases}$$

Để x, y là những số nguyên thì m + 2 $\in$ Ư(3) = $\{1;-1;3;-3\}$

Vậy: m + 2 = ± 1, ± 3 => m = -1; -3; 1; -5

Bài 14: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 2m+3 \\ x + 2y = 3m+1 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 5$.

Hướng Dẫn:

a) Với $m = 2$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 14 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ hệ phương trình có nghiệm là $(3;2)$.

b) Vì $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-1}{2}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$.

$$\begin{cases} 3x - y = 2m+3 \\ x + 2y = 3m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 4m+6 \\ x + 2y = 3m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7m+7 \\ 3x - y = 2m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \\ y = 3(m+1) - 2m - 3 = m \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (m+1;m)$.

Theo đề bài, ta có: $x^2 + y^2 = 5$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 = 5 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(m-1)(m+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = -2$ thì phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài.

Bài 15: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + ay = 3a \\ -ax + y = 2 - a^2 \end{cases}$ (I) (a là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $a = 1$.

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $\dfrac{2y}{x^2+3}$ là số nguyên.

Hướng Dẫn:

a) Với $a = 1$, ta có hệ: $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 4 \\ x = 3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy với $a = 1$ hệ phương trình có nghiệm là $(1; 2)$.

b) Với $a = 0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, hệ có nghiệm.

Với $a \neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{-a} \neq \dfrac{a}{1} \Leftrightarrow -a^2 \neq 1 \Leftrightarrow a^2 \neq -1$ (luôn đúng).

Hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi a.

$$\begin{cases} x + ay = 3a \\ -ax + y = 2 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a - ay \\ -a(3a - ay) + y = 2 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a - ay \\ (a^2+1)y = 2a^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = a \end{cases}.$$

(Vì $a^2 + 1 > 0$ nên rút gọn được ta có $y = 2$).

Hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y) = (a; 2)$.

Xét: $A = \dfrac{2y}{x^2+3} = \dfrac{4}{a^2+3}$

Ta có: $a^2 + 3 \geq 3,\ \forall a \Rightarrow \dfrac{4}{a^2+3} \leq \dfrac{4}{3},\ \forall a \Rightarrow 0 < A \leq \dfrac{4}{3}$.

Mà theo đề bài để $A \in \mathbb{Z}$ thì $A = 1 \Rightarrow a^2 + 3 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right.$.

Vậy $a = 1$ hoặc $a = -1$ thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: Đối với bài toán tìm a để biểu thức A nhận giá trị nguyên thì ta đi tìm khoảng giá trị của biểu thức A, tìm các giá trị nguyên của A trong khoảng này rồi thay vào tìm a. Phân biệt với bài toán tìm a là số nguyên để A nhận giá trị nguyên thì khi đó mới có $a^2 + 3 \in$ Ư (4).

Bài 16: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=3-m \\ x-my=2m \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Khi đó, hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Hướng Dẫn:

Với $m=0$, ta có hệ: $\begin{cases} y=-3 \\ x=0 \end{cases}$. Hệ có nghiệm duy nhất.

Với $m\neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{m}{1}\neq\frac{-1}{-m}\Leftrightarrow m^2\neq 1\Leftrightarrow m\neq\pm 1$.

Vậy với $m\neq\pm 1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} mx-y=3-m \\ x-my=2m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=mx+m-3 \\ x-m(mx+m-3)=2m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=mx+m-3 \\ (1-m^2)x=m^2-m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-\frac{m}{m+1} \\ y=\frac{-m^2}{m+1}+m-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=-\frac{m}{m+1} \\ y=\frac{-2m-3}{m+1} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1+\frac{1}{m+1} \\ y=-2-\frac{1}{m+1} \end{cases}.$$

Cộng hai vế của hai phương trình ta khử được tham số m. Hệ thức cần tìm là $x+y=-3$.

Bài 17: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn:

$x^2-2y^2=-2$

Hướng Dẫn:

$$\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases} <=> \begin{cases} y=5m-1-2x \\ x-2(5m-1-2x)=2 \end{cases} <=> \begin{cases} y=5m-1-2x \\ 5x=10m \end{cases} <=> \begin{cases} x=2m \\ y=m-1 \end{cases}$$

Thay vào ta có

$x^2-2y^2=-2 <=> (2m)^2-2(m-1)^2=-2$

$<=> 2m^2+4m=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Vậy m ∈ {–2;0}

Bài 18: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+y=2 \\ mx+y=m+1 \end{cases}$ (m là tham số)

1)Giải hệ phương trình khi m = 2

2)Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ p/trình luôn có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa mãn: $2x + y \le 3$

Hướng Dẫn:

1)Giải hệ phương trình khi m = 2. Ta có $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

2)y = 2 – (m-1)x thế vào phương trình còn lại ta có:

$mx + 2 - (m-1)x = m + 1 \Leftrightarrow x = m - 1$ suy ra $y = 2 - (m-1)^2$ với mọi m

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y) = (m-1; 2-(m-1)^2)$

$2x + y = 2(m-1) + 2 - (m-1)^2 = -m^2 + 4m - 1 = 3 - (m-2)^2 \le 3$ với mọi m

Vậy với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm thỏa mãn: $2x + y \le 3$

Câu 19: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x=2 \\ mx+y=m^2+3 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để $x+y$ nhỏ nhất.

Hướng Dẫn:

$$\begin{cases} x=2 \\ mx+y=m^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2m+y=m^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=m^2-2m+3 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm với mọi *m*.

Ta có: $A = x+y = m^2-2m+5 = (m-1)^2+4$

$\Rightarrow A \ge 4, \forall m$.

Giá trị nhỏ nhất của $x+y$ là 4 đạt được khi $m=1$.

Câu 20: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y=2m-1 \\ x+2y=3m+2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x^2+y^2=13$.

Hướng Dẫn:

$$\begin{cases} 3x-y=2m-1 \\ x+2y=3m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=4m-2 \\ x+2y=3m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ y=m+1 \end{cases}$$

Theo đề bài $x^2+y^2=13 \Leftrightarrow 2m^2+2m+1=13 \Leftrightarrow m^2+m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Câu 21: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=3-m \\ 2x-my=2m \end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm m nguyên để $A = y-2x$ có giá trị nguyên.

Hướng Dẫn:

Với $m=0$ thì ta có hệ: $\begin{cases}-2y=3\\2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Hệ có nghiệm duy nhất.

Với $m\neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{m}{2}\neq\dfrac{-2}{-m}\Leftrightarrow m^2\neq 4\Leftrightarrow m\neq\pm 2$.

Khi đó:

$$\begin{cases}mx-2y=3-m\\2x-my=2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2mx-4y=6-2m\\2mx-m^2y=2m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m^2-4\right)y=6-2m-2m^2\\2x-my=2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{-2m^2-2m+6}{m^2-4}\\x=\dfrac{-m^2-m}{m^2-4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=y-2x=\frac{6}{m^2-4}$$

Với m nguyên, đề A nhận giá trị nguyên thì $m^2-4\in U(6)$.

Ta có các trường hợp sau:

Th1: $\left[\begin{array}{l}m^2-4=6\\m^2-4=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=10\\m^2=-2\end{array}\right.$ (loại).

Th2: $\left[\begin{array}{l}m^2-4=3\\m^2-4=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=7\\m^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Th3: $\left[\begin{array}{l}m^2-4=2\\m^2-4=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=6\\m^2=2\end{array}\right.$ (loại).

Th4: $\left[\begin{array}{l}m^2-4=1\\m^2-4=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=5\\m^2=3\end{array}\right.$ (loại).

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x-2y=5 & (1)\\mx-y=4 & (2)\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) trong đó x,y trái dấu.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x=|y|$.

Bài 2: Định m để hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = 9 \\ x + my = 8 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn hệ thức cho trước: 2x + y + $\dfrac{38}{m^2 - 4}$ = 3

Hướng dẫn

- Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm duy nhất: m $\neq \pm 2$

- Hệ $\begin{cases} mx + 4y = 9 \\ x + my = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 4y = 9 \\ mx + m^2 y = 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)y = 8m - 9 \\ x + my = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8m - 9}{m^2 - 4} \\ x = \dfrac{9m - 32}{m^2 - 4} \end{cases}$

- Thay x = $\dfrac{9m - 32}{m^2 - 4}$; y = $\dfrac{8m - 9}{m^2 - 4}$ vào hệ thức đã cho ta được:

$2.\dfrac{9m - 32}{m^2 - 4} + \dfrac{8m - 9}{m^2 - 4} + \dfrac{38}{m^2 - 4} = 3$

$\Leftrightarrow$ 18m – 64 +8m – 9 + 38 = 3m^2 – 12

$\Leftrightarrow$ 3m^2 – 26m + 23 = 0 $\Leftrightarrow$ $m_1 = 1$; $m_2 = \dfrac{23}{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy m = 1 ; m = $\dfrac{23}{3}$

Bài 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình với m = 1

b)Tìm m để hệ có nghiệm (x;y) thỏa mãn : $x^2 - 2y^2 = 1$.

Bài 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3m - 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm $(x;y)$ sao cho $\dfrac{x^2 - y - 5}{y + 1} = 4$.

Bài 5: Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx + 2y = 18 \\ x - y = -6 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x ;y) trong đó x = 2.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x ;y) thoả mãn 2x + y = 9.

Bài 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 9 \\ mx - 3y = 4 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

b) Với giá trị nào của m để hệ có nghiệm (x ; y) thỏa mãn hệ thức: x - 3y = $\frac{28}{m^2+3}$ - 3

Bài 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$. Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn hệ thức $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2+3}$.

Bài 8: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x - my = -9 \\ mx + 2y = 16 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

b) Tìm giá trị nguyên của m để hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại một điểm nằm trong góc phần tư thứ IV trên mặt phẳng tọa độ Oxy

c) Với trị nguyên nào của m để hệ có nghiệm (x ; y) thỏa mãn x + y = 7

Bài 9: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (m+1)x - y = m+1 \end{cases}$

a) Giải hệ với $m = \frac{1}{2}$

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) thỏa mãn điều kiện x > y

Bài 10: Cho hệ p/trình $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = m \end{cases}$ .Tìm m nguyên sao cho hệ có nghiệm (x; y) với x < 1, y < 1

Bài 11: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m-1)x-my=3m-1\\ 2x-y=m+5\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với m = 2

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho $x^2-y^2<4$

Bài 12: Định m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên: $\begin{cases}(m+1)x+2y=m-1\\ m^2x-y=m^2+2m\end{cases}$

Bài 13: Cho hệ phương trình $\begin{cases}(2m+1)x+y=2m-2\\ m^2x-y=m^2-3m\end{cases}$ Trong đó m ∈ Z ; m ≠ - 1. Xác định m để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

Bài 14: Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx-y=2m\\ x-my=m+1\end{cases}$

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất

b) Tìm m để hệ có nghiệm nguyên.

c) Chứng tỏ rằng điểm M(x ; y) (với (x ; y) là nghiệm của hệ đã cho) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 15: Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+2my=m+1\\ x+(m+1)y=2\end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng nếu hệ có nghiệm (x y) thì điểm điểm M(x ; y) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

b) Xác định m để điểm M thuộc góc phần tư thứ nhất.

Gợi ý: Điểm M thuộc góc phần tư thứ nhất ⇔ x > 0 và y > 0

c) Xác định m để điểm M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Gợi ý: Điểm thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

⇔ $x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$. Giải phương trình tìm được m.

Bài 16: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng nếu hệ có nghiệm (x y) thì điểm điểm M(x ; y) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

b) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x, y) với x, y là các số nguyên.

c) Xác định m để điểm M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 17: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Xác định các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) sao cho x > 0, y > 0

b) Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm (x;y) với x, y là các số nguyên dương

Bài 18: Cho hệ phương trình : $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo m

b) Với giá trị nguyên nào của m để hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại một điểm nằm trong góc phần tư thứ IV của hệ tọa độ Oxy

c) Định m để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) sao cho P = $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 19: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2y - x = m + 1 \\ 2x - y = m - 2 \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ phương trình (1) khi m =1.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình (1) có nghiệm (x ; y) sao cho biểu thức P = $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 20: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2y - x = m + 1 \\ 2x - y = m - 2 \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ phương trình (1) khi m =1.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình (1) có nghiệm (x ; y) sao cho biểu thức P = $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 21: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2a-1 \\ x^2+y^2=a^2+2a-3 \end{cases}$.Tìm giá trị của a để hệ phương trình thỏa mãn tích x.y đạt giá trị nhỏ nhất.