BÀI 3: ĐỒ THỊ HÀM SỐ y = ax+ b (a ≠ 0)

I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đồ thị của hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất y = ax + b (a ≠ 0) có đồ thị là một đường thẳng, kí hiệu d: y = ax + b

(b gọi là tung độ gốc của đường thẳng)

Cắt trung tung tại điểm có tung độ bằng b

Song song với đường thẳng y = ax nếu b ≠ 0

Trùng với đường thẳng y = ax nếu b = 0

2. Cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất y = ax + b (a ≠ 0)

Xét đường thẳng d: y = ax + b (a ≠ 0)

Nếu b = 0 ta có: d: y = ax đi qua gốc tọa độ O (0;0) và đi qua điểm A (1;a)

Nếu b ≠ 0 thì ta làm như sau:

+) Cách 1: Cho $\left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=a+b \\ x=-1 \Rightarrow y=-a+b \end{array}\right.$

+) Cách 2: Cho $\left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=b \\ y=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b}{a} \end{array}\right.$

3. Chú ý:

Trục hoành là đường thẳng y = 0

Trục tung là đường thẳng x = 0

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất

Phương pháp giải: Có hai cách cơ bản

Xét đường thẳng d: y = ax + b (a ≠ 0)

Nếu b = 0 ta có: d: y = ax đi qua gốc tọa độ O (0;0) và đi qua điểm A (1;a)

Nếu b ≠ 0 thì ta làm như sau:

+) Cách 1: Cho $\left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=a+b \\ x=-1\Rightarrow y=-a+b \end{array}\right.$ +) Cách 2: Cho $\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=b \\ y=0\Rightarrow x=\dfrac{-b}{a} \end{array}\right.$

Giao điểm $B\left(\dfrac{-b}{a};0\right)$ của đồ thị với Ox (cho $y=0\Rightarrow x=\dfrac{-b}{a}$)

Giao điểm $A(0;b)$ của đồ thị với oy (cho $x=0\Rightarrow y=b$)

Khi đó đường thẳng nối AB là đồ thị của hàm số $y=ax+b$.

Chú ý: Nếu điểm A và B có tọa độ không nguyên, thì ta nên chọn điểm khác có tọa độ nguyên sẽ dễ xác định hơn và việc vẽ đồ thị sẽ chính xác hơn

Đối với hàm số có chưa dấu giá trị tuyệt đối, ta xét dấu giá trị tuyệt đối rồi đưa hàm số về dạng $y=ax+b$, ứng với từng miền giá trị của x.

Bài 1:Vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $y=2x+4$ b) $y=\dfrac{-3}{2}x-1$

c) $y=2x-1$ d) $y=\dfrac{-1}{2}x+3$

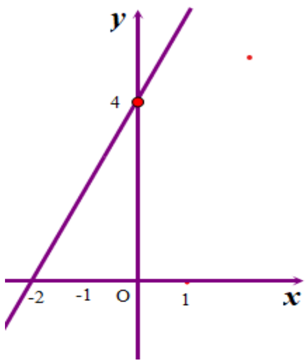
HD:

a) Xét hàm số $y=2x+4$

Với $x=0\Rightarrow y=4$, ta có điểm $A(0;4)$

Với $y=0\Rightarrow x=-2$, ta có điểm $B(-2;0)$

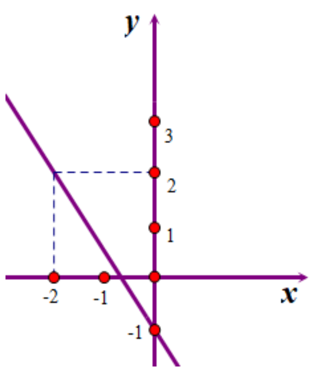
Ta có đồ thị hàm số như hình vẽ sau



b) Xét hàm số $y=\dfrac{-3}{2}x-1$

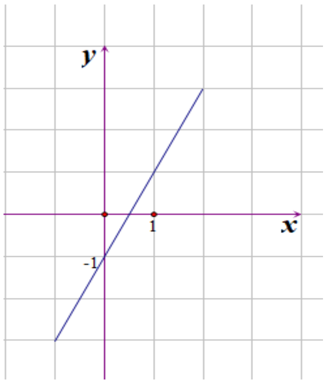
Với $x=0\Rightarrow y=-1$, ta có điểm $C(0;-1)$

Với $x=-2\Rightarrow y=2$, ta có điểm $D(-2;2)$

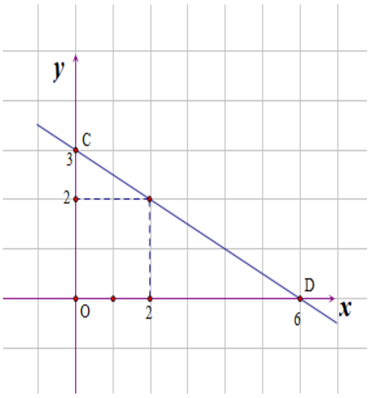


Ta có đồ thị hàm số như hình vẽ sau

c)Hàm số $y=2x-1$ có đồ thị là đường thẳng cắt trục Oy tại điểm $A(0;-1)$ và đi qua điểm $B(1;1)$



d) Hàm số $y=\frac{-1}{2}x+3$ có đồ thị là đường thẳng cắt trục Oy tại điểm $C(0;3)$, cắt trục Ox tại điểm $D(6;0)$



Bài 2:Vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $y=|x-1|$

b) $y=|x+1|+\left|\frac{1}{2}x-1\right|$

c) $y=|2x+1|$

d) $y=|x-2|+|2x+3|$

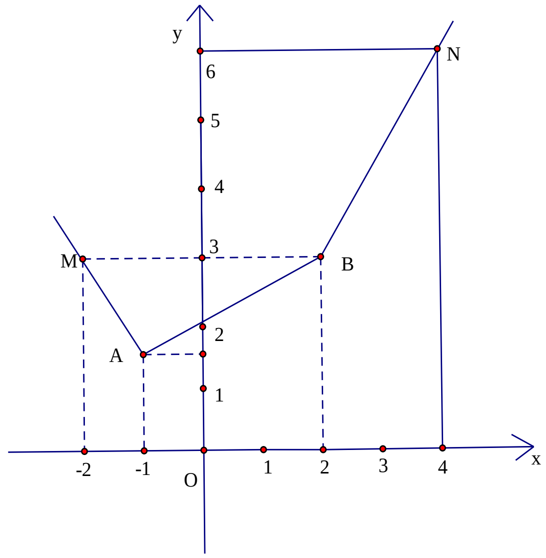
HD:

a) Ta có $y=|x-1|=\begin{cases} x-1,(x\ge 1)(1) \\ -x+1,(x\le 1)(2) \end{cases}$

Đồ thị là hàm số là hai tia AB và AC trong đó $A(1;0);B(2;1);C(0;1)$

Chú ý: Tia AB là một phần đồ thị (1) ứng với $x \geq 1$. Tia AC là một phần của đồ thị (2) ứng với $x \leq 1$

b) Ta có bảng xét dấu sau



x	1	2
$x+1$	- 0 +	+
$\frac{1}{2}x-1$	-	- 0 +

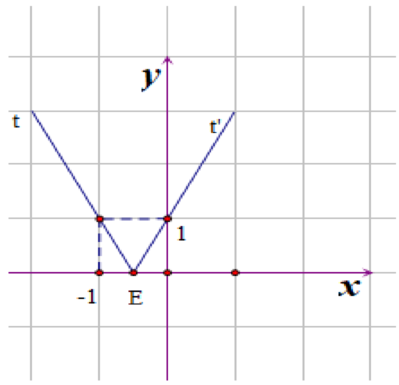
Do đó $y=|x+1|+\left|\frac{1}{2}x-1\right|=\begin{cases}\frac{-3}{2}x, x\leq 1\\ \frac{1}{2}x+2, -1\leq x\leq 2\\ \frac{3}{2}x, x\geq 2\end{cases}$

Đồ thị gồm đoạn thẳng AB, tia AM và tia BN, trong đó

$$A\left(-1;\frac{3}{2}\right); M(-2;3); B(2;3); N(4;6)$$

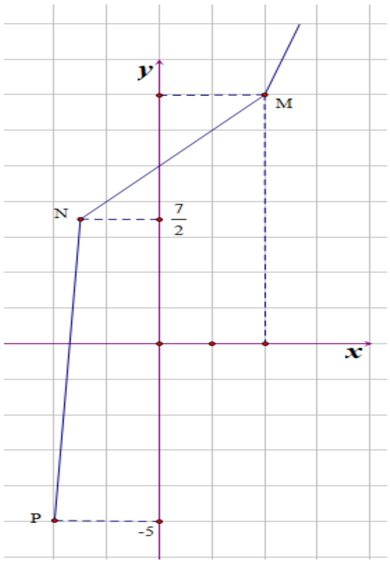
c) Hàm số $y=|2x+1|=\begin{cases}2x+1\left(x\geq\frac{-1}{2}\right)\\ -2x-1\left(x\leq\frac{-1}{2}\right)\end{cases}$

Đồ thị là hàm số gồm tia Et và tia Et'



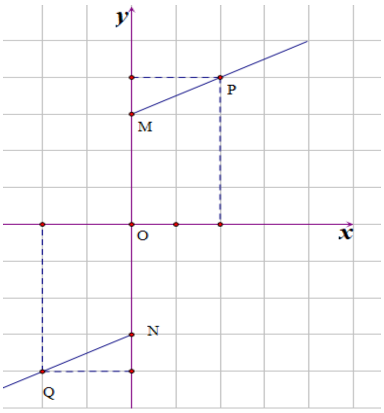
d) Hàm số $y=|x-2|+|2x+3|=\begin{cases}3x+1\left(x\ge 2\right)\\ -3x-1\left(x\le \dfrac{-3}{2}\right)\\ x+5\left(\dfrac{-3}{2}\le x\le 2\right)\end{cases}$

Đồ thị là hàm số gồm tia Nt, tia Mt' và đoạn MN



Bài 3:Vẽ đồ thị các hàm số sau $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3\sqrt{x^2}}{x}$

HD:



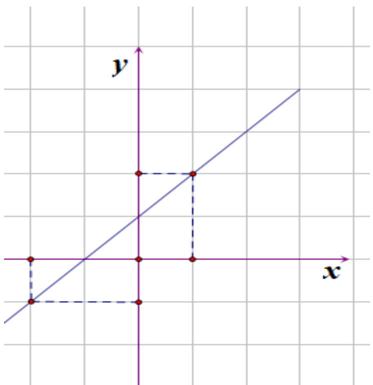
Ta có $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3\sqrt{x^2}}{x}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+3\left(x>0\right)\\ \dfrac{1}{2}x-3\left(x<0\right)\end{cases}$

Đồ thị hàm số gồm tia MP (trừ điểm $M\left(0;-3\right)$) và tia NQ (trừ điểm $N\left(0;-3\right)$) với $P\left(2;4\right)$ và $Q\left(-2;-4\right)$

Bài 4:Vẽ đồ thị các hàm số sau $y=\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$

HD:

Điều kiện $x\ne -2; x\ne 1$



Ta có $y=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)}\Rightarrow y=x+1$

Đồ thị hàm số là đường thẳng PQ trừ hai điểm $P(-2;-1)$ và $Q(1;2)$.

Bài 5: Cho hàm số bậc nhất y = ax + 5

a) Tìm a để đồ thị hàm số đi qua điểm A (-2; 3)

b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được ở câu a).

HD:

a) Để đồ thị hàm số y = ax + 5 đi qua điểm A (-2; 3)

$\Rightarrow$ 3 = a.(-2) + 5

$\Rightarrow$ -2a + 5 = 3

$\Rightarrow$ -2a = 3 - 5

$\Rightarrow$ -2a = - 2

$\Rightarrow$ a = 1

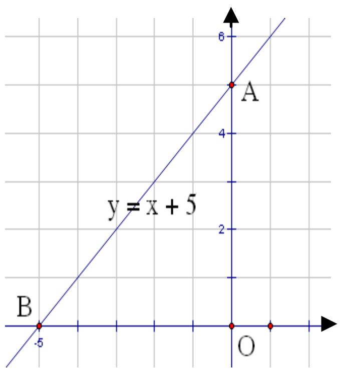
Vậy khi a = 1 thì đồ thị hàm số y = ax + 5 đi qua điểm A (-2; 3)

b) Khi a = 1 thì công thức hàm số là: y = x + 5

Cho x = 0 $\Rightarrow$ y = 5 $\Rightarrow$ A (0; 5)

y = 0 $\Rightarrow$ x = -5 $\Rightarrow$ B (-5; 0)

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số y = x + 5 là đường thẳng đi qua 2 điểm A (0; 5); B (-5; 0)



Bài 6: a)Vẽ đồ thị các hàm số y = - x + 2 và y = $\frac{1}{2}$x + 2

b) Gọi toạ độ giao điểm của đồ thị các hàm số với các trục toạ độ là A và B, giao điểm của đồ thị 2 hàm số trên là E. Tính chu vi và diện tích ΔABE .

HD:

a)Vẽ đồ thị các hàm số y = - x + 2 và y = $\frac{1}{2}$x + 2

Cho x = 0 $\Rightarrow$ y = 2$\Rightarrow$ E (0; 2)

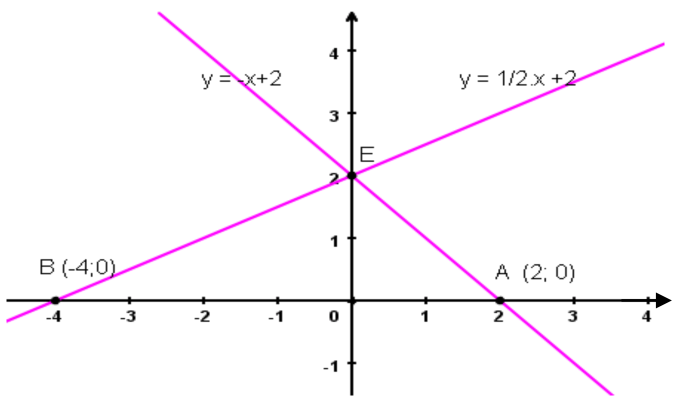
y = 0 $\Rightarrow$ x = 2 $\Rightarrow$ A (2; 0)

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số y = - x + 2 là đường thẳng đi qua 2 điểm E (0; 2); A (2; 0)

Cho x = 0 $\Rightarrow$ y = 2 $\Rightarrow$ E (0; 2)

y = 0 $\Rightarrow$ x = - 4 $\Rightarrow$ B (-4; 0)

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x + 2$ là đường thẳng đi qua 2 điểm E (0; 2); B(-4; 0)



b) Sử dụng công thức tính độ dài để tính các đoạn thẳng:

$$EB = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$EA = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (0-0)^2} = 6$$

Chu vi của tam giác AEB là: EB + EA + AB $= \sqrt{20} + \sqrt{8} + 6$

Diện tich của tam giác AEB là: $S_{AEB} = \frac{1}{2}.AB.OE$

Với: OE = | 2| = 2

AB = OB + OA = | -4| + |2| = 4 + 2 = 6

Vậy : $S_{AEB} = \frac{1}{2}.6.2 = 6$

Bài 7: Cho ba đường thẳng y = - x + 1 ; y = x + 1 ; y = -1

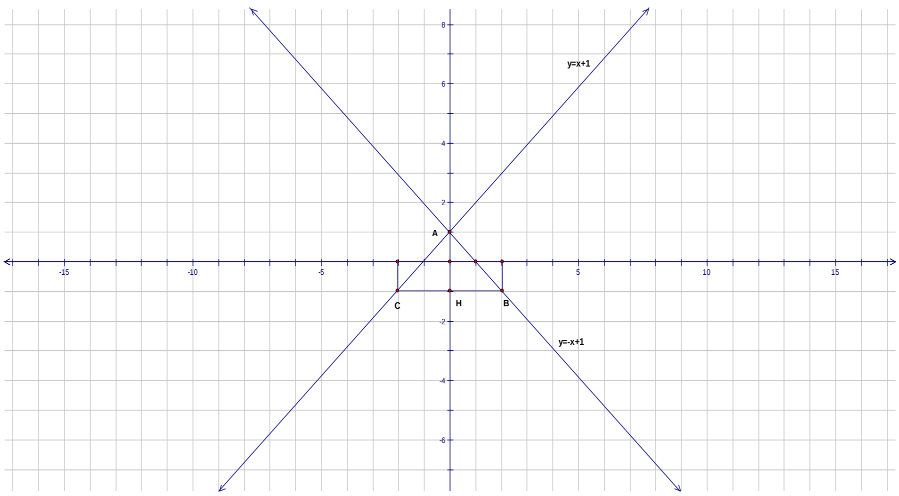
a. Vẽ ba đường thẳng trên cùng một hệ trục toạn độ Oxy

b. Gọi giao điểm của đường thẳng y = - x + 1 và y = x + 1 là A , giao điểm của y = - 1 với hai đường thẳng y = - x + 1 và y = x + 1 theo thứ tự là B và C. Tìm tọa độ các điểm A, B, C

c. Tam giác ABC là tam giác gì? Tính diện tích tam giác ABC.

HD:

a.



b. Hai đường thẳng y = x + 1 và y = - x + 1 cắt nhaun tại A nên tọa độ A nghiệm đúng hai phương trình: y = x + 1 và y = - x + 1

Ta có: x + 1 = - x + 1 $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0;1)$

Tương tự ta có: B (2; -1) và C (-2; -1)

c. Gọi H là giao điểm của BC với Oy , BC vuông góc Oy ở H và HB = HC

ΔABC có AH vừa là đường cao , đường trung tuyến vậy ΔABC cân tại A

$$S_{ABC}=\frac{1}{1}BC.AH=\frac{1}{2}.4.2=4$$

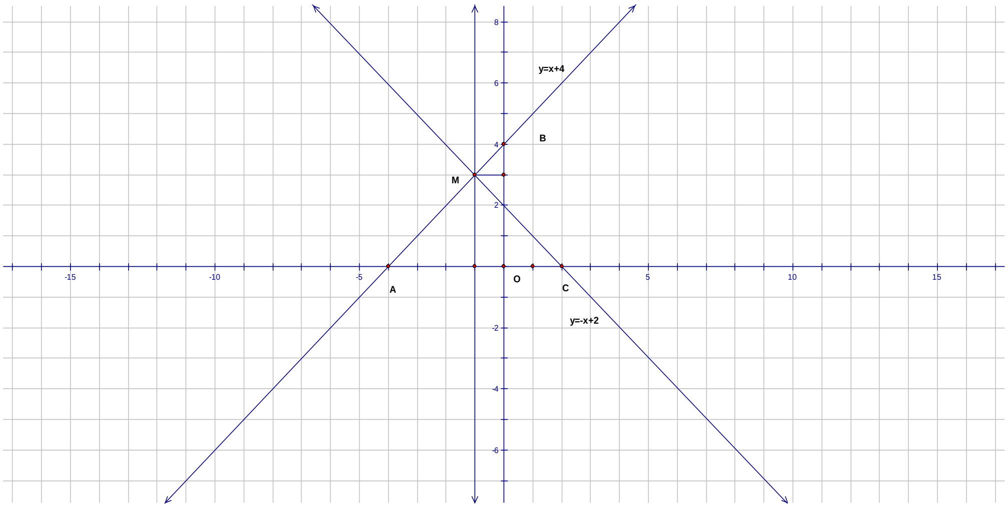
Bài 8: a. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị các hàm số sau (d_1): y = x + 4 và (d_2): y = - x + 2

b. Tìm tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2)

c. Gọi giao điểm của d_1 với Ox, Oy theo thứ tự là A và B. Gọi giao điểm của d_2 với Ox là C. Tính diện tích tam giác BMC

HD:

a.



b. M (-1 ; 3)

c. $S_{BMC}=S_{ABC}-S_{AMC}=\frac{1}{2}.6.4-\frac{1}{2}.6.3=3(dvdt)$

Bài 9:

a. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị các hàm số (d_1): y = x + 2 và (d_2): y = $\frac{-1}{2}x+1$

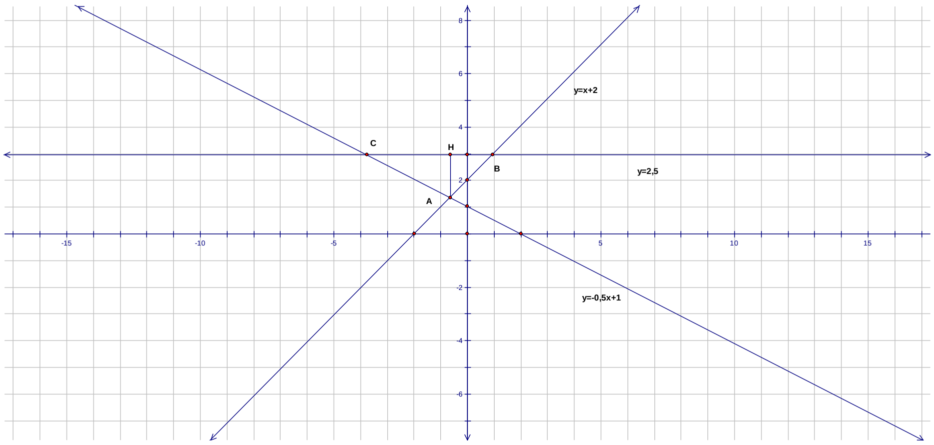
b. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Tìm tọa độ điểm A

c. Gọi d_3 là đường thẳng đi qua K (0; 2,5) song song với trục hoành, d_3 cắt d_1 và d_2 lần lượt tại B và C. Tìm tọa độ các điểm B và C

d. Tính S_{ABC}

HD:

a.



b. Tọa độ $A(\frac{-2}{3};\frac{4}{3})$

c. Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_3: $x+2=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow B=(\frac{1}{2};\frac{5}{2})$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_2 và d_3: $\frac{-1}{2}x+1=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=-3 \Rightarrow C(-3;\frac{5}{2})$

d. Chiều cao AH = $\frac{5}{2}-\frac{4}{3}=\frac{7}{6}(cm)$; BC = $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}(cm)$; $S_{ABC}=\frac{1}{2}.\frac{7}{6}.\frac{7}{2}=\frac{49}{24}(cm^2)$

Dạng 2: Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

Phương pháp giải: Cho hai đường thẳng $d: y=ax+b$ và $d': y=a'x+b'$. Để tìm tọa độ giao điểm của d và d', ta làm như sau:

Cách 1: Dùng phương pháp đồ thị (thường sử dụng trong trường hợp d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ nguyên)

Vẽ d và d' trên cùng một hệ trục tọa độ

Xác định tọa độ giao điểm trên hình vẽ

Chứng tỏ tọa độ giao điểm đó cùng thuộc d và d'

Cách 2: Dùng phương pháp đại số

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và d': $ax+b=a'x+b'$

Từ phương trình hoành độ giao điểm, tìm được x và thay vào phương trình của d (hoặc d') để tìm y

Kết luận tọa độ giao điểm của d và d’

Bài 1:Cho đường thẳng $(d_1): 2x-y=3$ và $(d_2): 4x+2y=5$. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

HD:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là:

$$2x-3=-2x+\frac{5}{2} \Leftrightarrow 4x=\frac{11}{2} \Leftrightarrow x=\frac{11}{8} \Rightarrow y=\frac{-1}{4}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $\left(\frac{11}{8};\frac{-1}{4}\right)$

Bài 4: Cho hai dường thẳng $d: y=2x+1$ và $d': y=x+3$. Bằng phương pháp đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của d và d’

HD:

Từ đồ thị dự đoán được d cắt d’ tại $I(2;5)$

Thay tọa độ I vào d và d’ thấy thảo mãn. Vậy I là tọa độ giao điểm của d và d’

Bài 5: Tìm tọa độ giao điểm của các đường thẳng $d: y=\frac{1}{2}x-3$ và $d': y=-2x+2$ bằng cách vẽ đồ thị

HD:

Ta tìm được $A(2;-2)$ là tọa độ giao điểm của d và d’

Bài 6: Cho các đường thẳng $d: y=x\sqrt{9-4\sqrt{2}}$ và $d': y=x\sqrt{3-2\sqrt{2}}-2$ không vẽ đồ thị, tìm tọa độ giao điểm của d và d’

HD:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và d’: $(2\sqrt{2}-1)x=(\sqrt{2}-1)x-2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$

Thay $x=-\sqrt{2}$ vào d hoặc (d’) tìm được $y=-4+\sqrt{2} \Rightarrow d \cap d'=(-\sqrt{2};-4+\sqrt{2})$

Bài 7: Không vẽ đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của các đường thẳng $d: y=\frac{3}{4}x+1$ và $d': y=-x+2$

HD:

Tìm được $\left(\frac{4}{7};\frac{10}{7}\right)$ là tọa độ giao điểm của d và d'

Bài 1:Cho hàm số $y=(m-1)x+m$ có đồ thị là đường thẳng (d)

a) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;1)$

b) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$

HD:

a)Đường thẳng (d) đi qua điểm

$$A(-1;1)\Leftrightarrow 1=(m-1).(-1)+m\Leftrightarrow -m+1+m=1\Leftrightarrow 0m=0\Rightarrow \forall m\in R$$

Vậy đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1;1)$ với mọi m.

b) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ $x=2-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $y=0$

$$\Rightarrow (m-1)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+m=0\Leftrightarrow m\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow m=\frac{4-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$$

Vậy $m=\frac{4-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$ thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ $x=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 2:Cho hàm số $y=(m-2)x+n(d)$ trong đó m, n là tham số

a) Tìm m, n để (d) đi qua hai điểm $A(-2;1);B(3;-4)$

b) Tìm m, n để (d) cắt trục tung tại điểm M có tung độ $y=1-\sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm N có hoành độ $x=2+\sqrt{2}$

HD:

a)Đường thẳng (d) đi qua điểm

$$A(-2;1)\Leftrightarrow (m-2).(-2)+n=1\Leftrightarrow -2m+n=-3\Leftrightarrow n=2m-3(1)$$

Đường thẳng (d) đi qua điểm $B(3;-4)\Leftrightarrow (m-2).3+n=-4\Leftrightarrow 3m+n=2(2)$

Thay (1) vào (2) ta được: $3m+2m-3=2\Leftrightarrow 5m=5\Leftrightarrow m=1$

Thay $m=1$ trở lại (1) ta được $n=-1$

b) Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm m có tung độ

$$y=1-\sqrt{2}\Rightarrow x=0;y=1-\sqrt{2}\Rightarrow n=1-\sqrt{2}$$

Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm N có hoành độ $x=2+\sqrt{2}\Rightarrow x=2+\sqrt{2};y=0$

$$\Rightarrow (m-2)\left(2+\sqrt{2}\right)+n=0$$

Mà $n=1-\sqrt{2} \Rightarrow (m-2)\left(2+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}=0 \Rightarrow m=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Vậy $n=1-\sqrt{2}; m=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3:Cho đường thẳng $(d): y=\dfrac{m-1}{m+2}.x+5$.

a) Tìm m để đường thẳng đi qua điểm $A(1;5)$

b) Tìm m để đường thẳng đi qua trung điểm của PQ, với $P(2;-1)$ và $Q(4;5)$

HD:

Điều kiện $m \neq -2$

a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;5) \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{m+2}.1+5=5 \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{m+2}=0 \Leftrightarrow m=1$

b) Gọi I là trung điểm của PQ $\Rightarrow I\left(\dfrac{x_P+x_Q}{2};\dfrac{y_P+y_Q}{2}\right)=I(3;2)$

Đường thẳng (d) đi qua điểm

$$I(3;2) \Leftrightarrow \frac{m-1}{m+2}.3+5=2 \Leftrightarrow \frac{m-1}{m+2}=-1 \Rightarrow m-1=-m-2 \Rightarrow m=\frac{-1}{2}$$

Bài 2:Cho hai đường thẳng $(d): y=(m-1)x+2m+3$ và $(d'): y=(3m-2)x+6m+1$. Chứng minh rằng với $m \neq \dfrac{1}{2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm cố định

HD:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d') là: $(m-1)x+2m+3=(3m-2)x+6m+1$

$$\Leftrightarrow (2m-1)x=-4m+2 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=5$$

Vậy với $m \neq \dfrac{1}{2}$, thì (d) và (d') cắt nhau tại điểm $(-2;5)$ cố định.

Dạng 3: Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm thuộc góc phần tư của hệ tọa độ Oxy

Phương pháp giải:

Xét hai đường thẳng $y_1=a_1x+b(d_1); y_2=a_2x+b(d_2)$

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau là $a_1 \neq a_2$

Giải phương trình hoành độ giao điểm, tìm tọa độ giao điểm $(x_0;y_0)$ theo m

+ Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc góc phần tư thứ nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 > 0 \\ y_0 > 0 \end{cases}$

+ Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc góc phần tư thứ hai $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 < 0 \\ y_0 > 0 \end{cases}$

+ Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc góc phần tư thứ ba $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 < 0 \\ y_0 < 0 \end{cases}$

+ Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc góc phần tư thứ tư $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 > 0 \\ y_0 < 0 \end{cases}$

Bài 1:Cho hai đường thẳng $(d_1): y=(m-1)x+2$ và $(d_2): y=x-1$. Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm

a) Thuộc góc phần tư thứ ba

b) Thuộc góc phần tư thứ tư

HD:

Hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow m=1\neq 1 \Leftrightarrow m\neq 2(*)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là:

$$(m-1)x+2=x-1 \Leftrightarrow (m-2)x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{m-2} \Rightarrow$$

Suy ra: Tung độ giao điểm $y=\frac{-3}{m-2}-1=\frac{m+1}{2-m}$

a) Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc góc phần tư thứ ba

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3}{m-2}<0 \\ \dfrac{m+1}{2-m}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ m>-1 \end{cases} \Leftrightarrow m>2(tm)$$

b) Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc góc phần tư thứ tư

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3}{m-2}>0 \\ \dfrac{m+1}{2-m}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow m<-1(tm)$$

Bài 2:Cho hai đường thẳng $(d_1): mx+2y=5$ và $(d_2): 2x+y=1$.

a) Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc góc phần tư thứ nhất

b) Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc góc phần tư thứ hai.

HD:

Ta có $(d_1): mx+2y=5 \Rightarrow (d_1): y=\frac{-m}{2}x+\frac{5}{2}$; $(d_2): 2x+y=1 \Rightarrow y=-2x+1$

Hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow \frac{-m}{2} \neq -2 \Leftrightarrow m \neq 4(*)$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là:

$$\frac{-m}{2}x+\frac{5}{2}=-2x+1 \Leftrightarrow \left(\frac{m}{2}-2\right)x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{m-4}$$

$\Rightarrow$ tung độ giao điểm $y=-2.\frac{3}{m-4}+1=\frac{m-10}{m-4}$

a) Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc góc phần tư thứ nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{m-4}>0 \\ \frac{m-10}{m-4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ m>10 \end{cases} \Leftrightarrow m>10(tm)$$

b) Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc góc phần tư thứ hai.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{m-4}<0 \\ \frac{m-10}{m-4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m<10 \end{cases} \Leftrightarrow m<4(tm)$$

Dạng 4: Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm bên trái (bên phải) trục tung, phía trên (phía dưới) trục hoành.

Phương pháp giải:

Xét hai đường thẳng $y_1=a_1x+b(d_1); y_2=a_2x+b(d_2)$

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau là $a_1 \neq a_2$

Giải phương trình hoành độ giao điểm, tìm tọa độ giao điểm $(x_0; y_0)$ theo m

+ Để d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm bên trái trục tung $\Leftrightarrow x_0<0$

+ Để d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm bên phải trục tung $\Leftrightarrow x_0>0$

+ Để d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm bên trên trục hoành $\Leftrightarrow y_0>0$

+ Để d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm bên dưới trục hoành $\Leftrightarrow y_0 < 0$

Bài 1:Cho hai đường thẳng $(d): y=(m^2+2m-1)x+3m+1$ và $(d_1): y=-x+1$.

Tìm m để đường thẳng d và d_1 cắt nhau tại 1 điểm bên trái trục tung

HD:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và d_1 là: $(m^2+2m-1)x+3m+1=-x+1$

$\Leftrightarrow (m^2+2m)x=-3m \Leftrightarrow m(m+2)x=-3m$

d và d_1 cắt nhau tại 1 điểm bên trái trục tung $\Leftrightarrow \begin{cases} m(m+2)\neq 0 \\ x=\dfrac{-3}{m+2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -2 \\ m>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m>-2 \end{cases}$

Bài 2:Cho hai đường thẳng $(d): y=(2m+1)x+m-1$ và $(d_2): y=2x+3$.

Tìm m để đường thẳng d và d_1 cắt nhau tại 1 điểm bên trên trục hoành

HD:

d cắt $d_1 \Leftrightarrow 2m+1\neq 2 \Leftrightarrow m\neq \dfrac{1}{2}$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và d_1 là: $(2m+1)x+m-1=2x+3 \Leftrightarrow (2m-1)x=4-m$

Khi đó ta có hoành độ giao điểm $x=\dfrac{4-m}{2m-1} \Rightarrow$ tung độ giao điểm $y=2.\dfrac{4-m}{2m-1}+3=\dfrac{4m+5}{2m-1}$

Vì giao điểm nằm bên trên trục hoành nên: $\dfrac{4m+5}{2m-1}>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$ hoặc $m<\dfrac{-5}{4}$

Vậy : $\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$ hoặc $m<\dfrac{-5}{4}$ thỏa mãn bài toán.

Dạng 5: Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm trên trục hoành Ox

Phương pháp giải:

Xét hai đường thẳng $y_1=a_1x+b(d_1); y_2=a_2x+b(d_2)$

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau là $a_1\neq a_2$

Tìm giao điểm $(x_{01};0)$ của d_1 với trục hoành, tìm giao điểm $(x_{02};0)$ của d_2 với trục hoành

Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành ox $\Leftrightarrow x_{01}=x_{02}$

Bài 1:Cho hai đường thẳng $(d_1): y=2x+m-1$ và $(d_2): y=3x+m^2-1$..

Tìm m để đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại 1 điểm bên trên trục hoành.

HD:

Vì $2 \neq 3$ với mọi m, nên (d_1) và (d_2) luôn cắt nhau với mọi m

$(d_1): y = 2x + m - 1$ cắt trục Ox tại điểm $\left(\frac{1-m}{2};0\right)$

$(d_2): y = 3x + m^2 - 1.$ cắt trục Ox tại điểm $\left(\frac{1-m^2}{3};0\right)$

Để hai đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm nằm trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \frac{1-m}{2} = \frac{1-m^2}{3} \Leftrightarrow (1-m)\left(\frac{1+m}{3} - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (1-m)(2m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Bài 2:Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m+1)x - 3$ và $(d_2): y = 2x - m$.

Tìm m để đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại 1 điểm nằm trên trục hoành.

HD:

Điều kiện d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow m + 1 \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 1$

$(d_1): y = (m+1)x - 3$ cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{3}{m+1};0\right)$ với $m \neq -1$

$(d_2): y = 2x - m$ cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{m}{2};0\right)$ với $m \neq -1$

d_1 cắt d_2 tại một điểm trên trục hoành $\Leftrightarrow \frac{3}{m+1} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = -3$

(thỏa mãn điều kiện $m \neq \pm 1$)

Dạng 6: Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm trên trục hoành Oy

Phương pháp giải:

Xét hai đường thẳng $y_1 = a_1x + b(d_1); y_2 = a_2x + b(d_2)$

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau là $a_1 \neq a_2$

Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành oy $\Leftrightarrow b_1 = b_2$

Bài 1:Cho hai đường thẳng $(d_1): y = x + m - 4$ và $(d_2): y = 2x + 2m - 1$.

Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc Oy

HD:

Vì $a_1 = 1 \neq a_2 = 2$ nên hai đường thẳng luôn cắt nhau tại một điểm

Để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm nằm trên Oy $\Leftrightarrow m - 4 = 2m - 1 \Leftrightarrow m = -3$

Bài 2:Cho hai đường thẳng $(d_1): y = m^2x + m + 1$ và $(d_2): y = 4x + 2m - 1$.

Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm thuộc Oy

HD:

Hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2 (*)$

Để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm nằm trên Oy $\Leftrightarrow m + 1 = 2m - 1 \Leftrightarrow m = 2$ (không thỏa mãn điều kiện *)

Vậy không tồn tại giá trị của m.

Bài 3:Cho hai đường thẳng$(d_1): y = 3(x + 5) + 2m$ và $(d_2): y = 2(x - m) + 3$. Tìm m để giao điểm của d_1 và d_2 thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) Nằm trên trục tung

b) Nằm trên trục hoành

c) Nằm bên trái trục tung

d) Nằm phía trên trục hoành

e) Nằm trong góc phần tư thứ hai

f) Nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

HD:

Ta có $(d_1): y = 3(x + 5) + 2m \Leftrightarrow (d_1): y = 3x + 15 + 2m$

$(d_2): y = 2(x - m) + 3 \Leftrightarrow (d_2): y = 2x + 3 - 2m$

a) d_1 và d_2 cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung $\Leftrightarrow 15 + 2m = 3 - 2m \Leftrightarrow m = -3$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là:

$3x + 15 + 2m = 2x + 3 - 2m \Leftrightarrow x = -12 - 4m$

$\Rightarrow y = -10m - 21$

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $A(-12 - 2m; -10m - 21)$

Điểm A nằm trên trục hoành $\Rightarrow \begin{cases} x_A \neq 0 \\ y_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12-4m \neq 0 \\ -10m-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m = \dfrac{-21}{10} \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{-21}{10}$

c) Giao điểm A nằm bên trái trục tung $\Rightarrow x_A < 0 \Leftrightarrow -12-4m<0 \Leftrightarrow m>-3$

d) Giao điểm A nằm phía trên trục hoành $\Rightarrow y_A > 0 \Leftrightarrow -10m-21>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{-21}{10}$

e) Giao điểm A nằm trong góc phần tư thứ II $\Rightarrow \begin{cases} x_A < 0 \\ y_A > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12-4m<0 \\ -10m-21>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ m<\dfrac{-21}{10} \end{cases}$

$\Rightarrow -3<m<\dfrac{-21}{10}$

f) Giao điểm A nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất

$\Rightarrow x_A = y_A \Leftrightarrow -12-4m=-10m-21 \Leftrightarrow m=\dfrac{-3}{2}.$

Dạng 7: Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm có hoành độ (tung độ) bằng h

Phương pháp giải:

Xét hai đường thẳng $y_1 = a_1x+b(d_1); y_2 = a_2x+b(d_2)$

Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm có hoành độ bằng h:

- Thay hoành độ $x_0 = h$ vào một trong hai đường thẳng, tìm được tung độ y_0
- Thay tọa độ điểm $(x_0;y_0)$ vào đường thẳng còn lại, giải phương trình ẩn m

Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm có tung độ bằng h

- Thay tung độ $y_0 = h$ vào một trong hai đường thẳng, tìm được hoành độ x_0
- Thay tọa độ điểm $(x_0;y_0)$ vào đường thẳng còn lại, giải phương trình ẩn m.

Bài 1:Tìm m để $y=2x+3m-1$ và $y=(m-1)x+m$ cắt nhau tại điểm có hoành độ $x=1$

HD:

Hai đường thẳng cắt nhau khi $m-1\neq 2 \Leftrightarrow m\neq 3$

Thay $x=1$ vào $y=2x+3m-1,$ ta được $y=3m+1$

Thay $x=1; y=3m+1$ vào $y=(m-1)x+m$, ta được $(m-1).1+m=3m+1 \Leftrightarrow m=-2$

Vậy $m=-2$ thì hai đường thẳng cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng 1.

Bài 2:Tìm m để $y=x+2m+2$ và $y=(m-1)x+3$ cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 3

HD:

Hai đường thẳng cắt nhau khi $m-1\neq 1 \Leftrightarrow m\neq 2$

Thay $y=3$ vào $y=x+2m+2$ ta được: $x+2m+2=3 \Leftrightarrow x=1-2m$

Thay $y=3$ và $x=1-2m$ vào $y=(m-1)x+3$ ta được $(m-1)(1-2m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy $m=1; m=\frac{1}{2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 3.

Bài 3:Cho hai đường thẳng $(d_1): x-my=2-4m$ và $(d_2): mx+y=3m+1$. Chứng minh hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $(x_0;y_0)$ thỏa mãn đẳng thức $x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=0$

HD:

Nếu $m=0$, ta có $(d_1): x=2$ và $(d_2): y=1$ cắt nhau tại điểm $A(2;1)$, thay tọa độ điểm $A(2;1)$ vào vế trái của đẳng thức ta được: $x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=2^2+1-5(2+1)+10=0$ (thỏa mãn)

Nếu $m\neq 0$, ta có $(d_1): y=\frac{1}{m}x+\frac{4m-2}{m}$ và $(d_2): y=-mx+3m+1$

+ Vì $\frac{1}{m}\neq -m \Rightarrow (d_1)$ cắt (d_2) tại điểm $(x_0;y_0)$, khi đó: $x_0-my_0=2-4m(1)$; $mx_0+y_0=3m+1(2)$

+ Nhân cả hai vế của (1) với x_0, ta được: $x_0^2-mx_0y_0=(2-4m)x_0 (3)$

+ Nhân cả hai vế của (2) với y_0, ta được: $mx_0y_0+y_0^2=(3m+1)y_0 (4)$

+ Từ $(1)\Rightarrow my_0=x_0-2+4m(5)$

+ Từ $(2)\Rightarrow mx_0=3m+1-y_0(6)$

+ Cộng (3) và (4) theo vế, ta được: $x_0^2+y_0^2=(2-4m)x_0+(3m+1)y_0$

$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2=2x_0-4mx_0+3my_0+y_0 (7)$

+ Thay (5) và (6) vào (7) ta được $x_0^2+y_0^2=2x_0-4(3m+1-y_0)+3(x_0-2+4m)+y_0$

$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2=5x_0+5y_0-10 \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=0$ (đpcm)

Vậy với mọi m, hai đường thẳng luôn cắt nhau tại điểm $(x_0;y_0)$ thỏa mãn $x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=0$

Bài 4:Cho hai đường thẳng $(d_1):3x-y=1$ và $(d_2):mx+2y=3m+2$. Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $(x_0;y_0)$ thỏa mãn đẳng thức $x_0^2+y_0^2=185$.

HD:

Ta có $(d_1):3x-y=1 \Leftrightarrow (d_1):y=3x-1$ và $(d_2):mx+2y=3m+2 \Leftrightarrow (d_2):y=\frac{-m}{2}x+\frac{3m+2}{2}$

Để (d_1) cắt (d_2) thì $\frac{-m}{2}\neq 3 \Leftrightarrow m\neq -6$, khi đó gọi giao điểm của (d_1) và (d_2) là $(x_0;y_0)$.

Ta có: $3x_0-y_0=1 \Leftrightarrow y_0=3x_0-1(1); mx_0+2y_0=3m+2(2)$

Thay (1) vào (20 ta được $mx_0+2(3x_0-1)=3m+2 \Leftrightarrow x_0=\frac{3m+4}{m+6} \Rightarrow y_0=\frac{8m+6}{m+6}$

Đẳng thức

$$x_0^2+y_0^2=185 \Leftrightarrow \left(\frac{3m+4}{m+6}\right)^2+\left(\frac{8m+6}{m+6}\right)^2=185 \Leftrightarrow 4m^2+75m+236=0 \Leftrightarrow (m+4)(4m+59)=0$$

$$\Leftrightarrow m\in\left\{-4;\frac{-59}{4}\right\}$$

Vậy $m\in\left\{-4;\frac{-59}{4}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 5:Cho hai đường thẳng $(d_1):x+2y=m+3$ và $(d_2):2x-3y=m$. Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $(x;y)$ sao cho $P=98(x^2+y^2)+4m$ đạt giá trị nhỏ nhất

HD:

Ta có $(d_1):x+2y=m+3 \Leftrightarrow (d_1):y=\frac{-1}{2}x+\frac{m+3}{2}$ và $(d_2):2x-3y=m \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{m}{3}$

Vì $\frac{-1}{2}\neq\frac{2}{3}$ với mọi m, nên hai đường thẳng luôn cắt nhau với mọi m

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là: $\frac{-1}{2}x+\frac{m+3}{2}=\frac{2}{3}x-\frac{m}{3} \Rightarrow x=\frac{m+9}{7}$

$\Rightarrow$ tung độ giao điểm $y=\frac{18-5m}{21}$

Ta có $P=\left[\left(\frac{m+9}{7}\right)^2+\left(\frac{18-5m}{21}\right)^2\right]+4m=2(m+9)^2+\frac{2}{9}(18-5m)^2+m$

$9P=18m^2+324m+1458+648-360m+50m^2+9m=68m^2-27m+2106=\left(\sqrt{68}m-\frac{27}{2\sqrt{68}}\right)^2+\frac{572103}{272}$

Vì

$\left(\sqrt{68}m-\frac{27}{2\sqrt{68}}\right)^2\geq 0\Rightarrow 9P\geq\frac{572103}{272}\Leftrightarrow P\geq\frac{63567}{272}\Rightarrow P_{min}=\frac{63567}{272}\Leftrightarrow\left(\sqrt{68}m-\frac{27}{2\sqrt{68}}\right)^2=0\Leftrightarrow m=\frac{27}{136}$

(thỏa mãn).

Dạng 8: Tìm tham số m để tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là các số nguyên. Xác định điểm có tọa độ nguyên thỏa mãn điều kiện bài cho.

Phương pháp giải:

Bước 1:Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau

Bước 2:Tìm tọa độ giao điểm x, y theo m

Bước 3:Dùng tính chất chai hết để tìm m, đối chiếu với điều kiện và kết luận

Bài 1:Tìm m để $y=mx+2$ và $y=x+m-1$. Tìm giá trị nguyên của m để d_1 cắt d_2 tại điểm M sao cho tọa độ của M là các số nguyên

HD:

Điều kiện để d_1 cắt d_2 là $m\neq 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là:

$$mx+2=x+m-1\Leftrightarrow(m-1)x=m-3\Rightarrow x=\frac{m-3}{m-1}\Rightarrow y=m.\frac{m-3}{m-1}+2=\frac{m^2-m-2}{m-1}$$

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $\left(\frac{m-3}{m-1};\frac{m^2-m-2}{m-1}\right)$

Xét hoành độ giao điểm $x=\frac{m-3}{m-1}=1-\frac{2}{m-1}\in Z\Rightarrow\frac{2}{m-1}\in Z\Rightarrow m-1\in U(2)=\{\pm 1;\pm 2\}$

- Với $m-1=-2\Rightarrow m=-1\Rightarrow x=2; y=0$ (thỏa mãn)

- Với $m-1=-1\Rightarrow m=0\Rightarrow x=3; y=2$ (thỏa mãn)

- Với $m-1=1\Rightarrow m=2\Rightarrow x=-1; y=0$ (thỏa mãn)

- Với $m-1=2\Rightarrow m=3\Rightarrow x=0; y=2$ (thỏa mãn)

Vậy $m\in\{-1;0;2;3\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 2:Cho đường thẳng $(d): y=2x+5$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d) với các trục Ox, Oy. Tìm điểm M trên AB (M khác A và B) sao cho điểm M có hoành độ số nguyên, tung độ là các số nguyên tố.

HD:

Ta có $(d): y=2x+5$ cắt trục Ox tại điểm $A\left(\frac{-5}{2};0\right)$ và cắt trục Oy tại điểm $B(0;5)$

Điểm $M(x_0;y_0)\in$ đoạn AB, nên $\begin{cases}\frac{-5}{2}<x_0\le 0\\ 0\le y_0<5\end{cases}$

Xét $x_0\in Z$ thỏa mãn $\frac{-5}{2}<x_0\le 0\Rightarrow x_0\in\{-2;-1;0\}$

- Nếu $x_0=-2\Rightarrow y_0=1$ (loại vì 1 không phải là số nguyên tố)

- Nếu $x_0=1\Rightarrow y_0=3$ (thỏa mãn)

-Nếu $x_0=0\Rightarrow y_0=5$ (loại vì trùng với điểm B)

Vậy $M(-1;3)$.

Bài 3:Cho hai đường thẳng $(d_1): y=(m-1)x+1$và $(d_2): y=x+m$. Tìm tất cả các giá trị m nguyên để hai đường thẳng cắt nhau tại điểm A có tọa độ nguyên.

HD:

(d_1) cắt $(d_2)\Leftrightarrow m-1\ne 1\Leftrightarrow m\ne 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là: $(m-1)x+1=x+m\Leftrightarrow(m-2)x=m-1$

$$\Rightarrow x=\frac{m-1}{m-2}\Rightarrow y=\frac{m^2-m-1}{m-2}$$

Có $x\in Z$ và $y\in Z$

Xét $x \in Z \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{m-2} \in Z \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{m-2} \in Z \Leftrightarrow m-2 \in U(1)=\{\pm 1\}$

- Với $m-2=1 \Leftrightarrow m=3 \Rightarrow y=5 \in Z$ (thỏa mãn)

- Với $m-2=-1 \Leftrightarrow m=1 \Rightarrow y=1 \in Z$ (thỏa mãn)

Vậy $m=3; m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 4:Cho đường thẳng $(d): y=(m+1)x+m-3$. Tìm tất cả các giá trị m nguyên để (d) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho A, B có tọa độ nguyên.

HD:

(d) cắt hai trục tọa độ $\Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

(d) cắt trục Ox tại điểm $A\left(\dfrac{3-m}{m+1};0\right)$

(d) cắt trục Oy tại điểm $B(0;m-3)$

Với $m \in Z$ thì điểm B có tọa độ nguyên, và để điểm A có tọa độ nguyên thì

$\dfrac{3-m}{m+1} \in Z \Leftrightarrow -1+\dfrac{4}{m+1} \in Z \Leftrightarrow \dfrac{4}{m+1} \in Z \Leftrightarrow m+1 \in U(4)=\{\pm 1;\pm 2;\pm 4\} \Leftrightarrow m \in \{-5;-3;-2;0;1;3\}$

Bài 5:Cho đường thẳng $(d): y=2x-5$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tìm điểm C trên đoạn AB sao cho điểm C có tọa độ nguyên.

HD:

Ta có (d) cắt trục Ox tại điểm $A\left(\dfrac{5}{2};0\right)$ và cắt trục Oy tại điểm $B(0;-5)$

Điểm $C(x_C;y_C)$ thuộc đoạn AB nên $\begin{cases} 0 \le x_C \le \dfrac{5}{2} \\ -5 \le y_C \le 0 (*) \end{cases}$

Xét $0 \le x_C \le \dfrac{5}{2}$ và $x_C \in Z \Rightarrow x_C \in \{0;1;2\}$

- Với $x_C=0 \Rightarrow y_C=-5 \Rightarrow$ điểm C trùng với điểm B

- Với $x_C=1 \Rightarrow y_C=-3 \Rightarrow C(1;-3)$

- Với $x_C=2 \Rightarrow y_C=-1 \Rightarrow C(2;-1)$

Dạng 9: Xét tính đồng quy của ba đường thẳng

Phương pháp giải:

Chú ý: Ba đường thẳng đồng quy là ba đường thẳng phân biệt và cùng đi qua 1 điểm

Để xét tính đồng quy của ba đường thẳng (phân biệt) cho trước, ta làm như sau:

+) Tìm tọa độ giao điểm của 2 trong 3 đường thẳng đã cho

+) Kiểm tra xem nếu giao điểm vừa tìm được thuộc đường thẳng còn lại thì kết luận ba đường thẳng đó đồng quy.

Để tìm tham số m để ba đường thẳng đồng quy ta làm như sau:

Tìm giao điểm $I\left(x_0;y_0\right)$ của hai đường thẳng (thường là các đường thẳng không phụ thuộc vào m) bằng việc giải phương trình hoành độ giao điểm $\left(d_1\right):y=a_1x+b_1$ và $\left(d_2\right):y=a_2x+b_2$ thì phương trình hoành độ giao điểm là: $a_1x+b_1=a_2x+b_2$

Giải tìm được hoành độ giao điểm x, thay trở lại $\left(d_1\right)$ hoặc $\left(d_2\right)$ tìm được tung độ giao điểm y. Khi đó có được tọa độ giao điểm là $I\left(x_0;y_0\right)$

Để ba đường thẳng đồng quy thì đường thẳng còn lại phải đi qua điểm $I\left(x_0;y_0\right)$

Bài 1: Tìm giá trị của m để ba đường thẳng sau đồng quy: $\left(d_1\right):y=x-4$, $\left(d_2\right):y=-2x-1$ và $\left(d_3\right):y=mx+2$

HD:

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(d_1\right)$ và $\left(d_2\right)$ là: $x-4=-2x-1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=-3$

$\Rightarrow$ tọa độ giao điểm của $\left(d_1\right)$ và $\left(d_2\right)$ là $A(1;-3)$

Để ba đường thẳng đồng quy thì $\left(d_3\right)$ phải đi qua điểm $A(1;-3)\Leftrightarrow m+2=-3\Leftrightarrow m=-5$

Vậy với $m=-5$ thì ba đường thẳng đồng quy.

Bài 2: Tìm giá trị của k để ba đường thẳng sau đồng quy: $\left(d_1\right):y=2x+7$, $\left(d_2\right):y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ và $\left(d_3\right):y=\frac{-2}{k}x-\frac{1}{k}(k\neq 0)$

HD:

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(d_1\right)$ và $\left(d_2\right)$ là:

$$2x+7=\frac{-1}{3}x+\frac{7}{3}\Leftrightarrow\frac{7}{3}x=\frac{-14}{3}\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow y=3\Rightarrow\left(d_1\right)$$

Suy ra: (d1) và (d_2) cắt nhau tại điểm $(-2;3)$

Để ba đường thẳng đồng quy thì (d_3) phải đi qua điểm

$$(-2;3) \Leftrightarrow 3 = \frac{-2}{k}.(-2) - \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{3}{k} = 3 \Leftrightarrow k = 1$$

Vậy với $k = 1$ thì ba đường thẳng đồng quy.

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt có phương trình là (d_1): y = 2x + 7; (d_2): y = $\frac{-1}{3}x + \frac{7}{3}$ và (d_3): y = $\frac{-2}{m}.x - \frac{1}{m}$ m là tham số khác 0). Tìm m để ba đường thẳng đồng quy.

HD:

Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2 lúc đó tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow I(-2;3)$. Điểm I thuộc vào $d_3 \Leftrightarrow 3 = \frac{-2}{m}.(-2) - \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm

Bài 4 : Cho hàm số y = (m – 2)x + m + 3.

1) Tìm điều kiện của m để hàm số luôn nghịch biến.

2) Tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

3) Tìm m để đồ thị của hàm số trên và các đồ thị của các hàm số y = -x + 2 ; y = 2x – 1 đồng quy.

HD :

1) Hàm số y = (m – 2)x + m + 3 $\Leftrightarrow$ m – 2 < 0 $\Leftrightarrow$ m < 2.

2) Do đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3. Suy ra : x= 3 ; y = 0

Thay x= 3 ; y = 0 vào hàm số y = (m – 2)x + m + 3, ta được m = $\frac{3}{4}$.

3) Giao điểm của hai đồ thị y = -x + 2 ; y = 2x – 1 là nghiệm của hệ pt : $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ (x;y) = (1;1).

Để 3 đồ thị y = (m – 2)x + m + 3, y = -x + 2 và y = 2x – 1 đồng quy cần :

(x;y) = (1;1) là nghiệm của pt : y = (m – 2)x + m + 3.

Với (x;y) = (1;1) $\Rightarrow$ m = $\frac{-1}{2}$

Bài 5:Cho ba đường thẳng $d_1 : y = 4x - 3, d_2 : y = 3x - 1, d_3 : y = x + 3$ Chứng minh ba đường thẳng trên đồng quy

HD:

Gọi $I = d_1 \cap d_2 \Rightarrow I(2;5)$

Thay tọa độ I vào d_3 thấy thỏa mãn. Vậy d_1, d_2, d_3 đồng quy

Bài 6:Ba đường thẳng $d_1 : 3x - y - 7 = 0, d_2 : y = -2x + 3, d_3 : 3x - 2y - 7 = 0$ có đồng quy hay không?

HD:

Gọi $I = d_1 \cap d_2 \Rightarrow I(2;-1)$

Thay tọa độ I vào d_3 thấy không thỏa mãn. Vậy d_1, d_2, d_3 không đồng quy

Bài 7:Cho ba đường thẳng $d_1 : y = x - 4, d_2 : y = 2x + 3, d_3 : y = mx + m + 1$. Tìm m để ba đường thẳng trên đồng quy

HD:

Gọi $I = d_1 \cap d_2 \Rightarrow I(-7;-11)$

Thay tọa độ I vào d_3 tìm được $m = 2 \Rightarrow d_3 : y = 2x + 3 \equiv d_2$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán

Bài 8:Cho ba đường thẳng d_1: y = x – 2 ; d_2: y = 2x – 3 ; d_3 : y = -x

a. Chứng minh rằng ba đương thẳng trên đồng quy

b. Tìm ma sao cho 4 đường thẳng d_1; d_2; d_3 và d: y = mx + 1 đồng quy

HD:

a. Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2 suy ra tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow I(1;-1)$$

Ta đi chứng minh I thuộc vào d_3

Thật vậy thay tọa độ I (1;-1) vào d_3: y = -x ta được -1 = -1 (đúng).

b. Để 4 đường thẳng đồng quy thì I (1;-1) phải thuộc vào d $\Leftrightarrow -1 = m.1 + 1 \Leftrightarrow m = -2$

Bài 9: Tìm m để ba đường thẳng sau đồng quy

a. $d_1 : y = (m^2 - 1)x + (m^2 - 5)(m \neq \pm 1); d_2 : y = x + 1; d_3 : y = -x + 3$

b. $d_1 : y = 3x - 8; d_2 : y = -2x - 3; d_3 : y = 3mx + 2m + 1$

HD:

a. Ta có d_2 cắt d_3 tại M (1;2)

Để ba đường thẳng đồng quy thì M thuộc d_1. $\Rightarrow m = \pm 2$

Thử lại với $m = \pm 2$ thì ta được d_1 không trùng d_2 và d_3. Vậy $\Rightarrow m = \pm 2$

b. $m = \dfrac{-6}{5}$

Bài 10: Cho hàm số $y = (m-2)x + m + 3(d)$

a. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số luôn nghịch biến

b. Tìm m để d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3

c. Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x + 2; y = 2x - 1$ và (d) đồng quy tại 1 điểm.

HD:

a) kết quả $m < 2$

b) (d) đi qua (3; 0) $\Rightarrow m = \dfrac{3}{4}$

c) Giao điểm của hai hàm số là nghiệm của hpt $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow I(1;1)$ thay vào (d)

$\Rightarrow m = 0$

Bài 11: Tìm k để ba đường thẳng sau đồng quy trong mặt phẳng tọa độ $(d_1): y = x + 2$, $(d_2): y = -2$ và $d_3 : y = (k+1)x + k$.

HD:

d_3 cắt d_1 và d_3 cắt $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 \neq 1 \\ k+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq -1 \end{cases}$ (1)

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x+y=2 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$$

Do đó, giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là $A(-4;-2)$.

Đường thẳng d_3 đi qua $A(-4;-2)$ khi $-2=(k+1).(-4)+k$ suy ra $k=\frac{-2}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra với $k=\frac{-2}{3}$ thì ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng qui.

Bài 12:Cho các đường thẳng sau: $d_1: y=2x+1, d_2: y=x+2$ và $d_3: y=(m^2+1)x+2m-1$

a) Xác định tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2)

b) Tìm m để (d_1) song song với d_3

c) Tìm m để ba đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm

HD:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là

$$2x+1=x+2 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=3 \Rightarrow A(1;3)$$

b) $d_1 // d_3 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+1=2 \\ 2m-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=1 \\ 2m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m=-1$

c) Để ba đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm thì $\begin{cases} m^2+1 \neq 2 \\ m^2+1 \neq 1 \\ A \in d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 1 \\ m \neq 0 \\ 3=(m^2+1).1+2m-1 (*) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 (loai) \\ m=-3 (thoa.man) \end{cases}$$

Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm.

Bài 13:Cho ba đường thẳng : $d_1: y=x+2, d_2: y=2x+1$ và $d_3: y=(m^2+1)x+m$

a) Tìm các giá trị của m để d_3 // d_2

b) Tìm các giá trị của m để ba đường thẳng trên cắt nhau tại 1 điểm

HD:

a) $d_2 // d_3 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+1=2 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1=0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} y=x+2 \\ y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow d_1, d_2$ cắt nhau tại $A(1;3) \Rightarrow$

Suy ra ba đường thẳng cắt nhau tại A

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+1 \neq 1 \\ m^2+1 \neq 2 \\ (m^2+1).1+m=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \neq 0 \\ m^2 \neq 1 \\ m^2+m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \pm 1 \\ m=1; m=-2 \end{cases} \Rightarrow m=-2$$

Bài 14:Tìm m để ba đường thẳng sau đồng quy: $2x-y=m; x-y=2m; mx-(m-1)y=2m-1$

HD:

Ta có $(d_1): 2x-y=m \Leftrightarrow y=2x-m$

$(d_2): x-y=2m \Leftrightarrow y=x-2m$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2), ta có:

$$\begin{cases} y_0=2x_0-m \\ y_0=x_0-2m \end{cases} \Rightarrow 2x_0-m=x_0-2m \Leftrightarrow x_0=-m \Rightarrow y_0=-3m \Rightarrow M(-m;-3m)$$

Để $(d_1),(d_2)$ và (d_3) đồng quy thì (d_3) đi qua giao điểm $M \Leftrightarrow m.(-m)-(m-1).(-3m)=2m-1$

$$\Leftrightarrow 2m^2-5m+1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}m-\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{17}{8} \Leftrightarrow m=\frac{\sqrt{17}+5}{4} \text{ hoặc } m=\frac{-\sqrt{17}+5}{4}$$

Dạng 10: Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến một đường thẳng không đi qua O

Phương pháp giải: Để tính khoảng cách từ O đến đường thẳng d (Không đi qua O) ta làm như sau:

Bước 1: Tìm A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox và Oy

Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d. Khi đó: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$

Bài 1:Cho hàm số y = ax + b

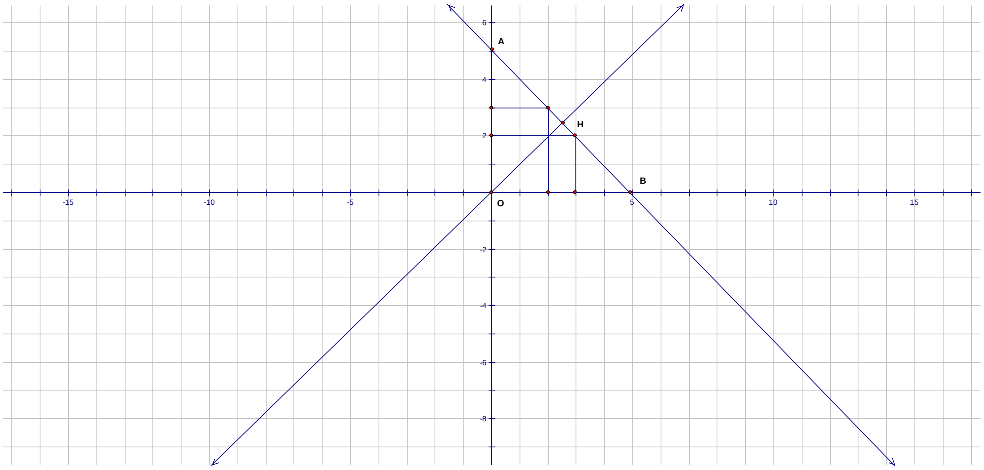
a. Xác định a và b biết rằng đồ thị hàm số trên đi qua M (2;3)

b. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được ở câu a

c. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng tìm được ở câu a

HD:

a. M (2;3) thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow a = 3 \Rightarrow y = 6x - 9$

b. 

Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng

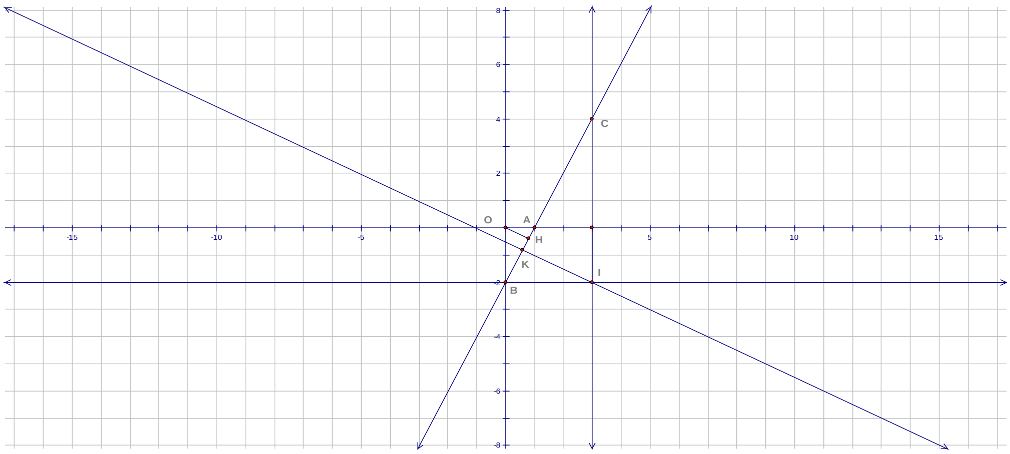
Xét tam giác OAB (O = 90^0)

Ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \dfrac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{37}}$

Bài 2: Trong hệ trục toạn đọ Oxy, cho đường thẳng d: y = 2x – 2 và điểm I (3;-2). Hãy tính khoảng cách:

a. Từ O đến d b. Từ I đến d

HD:



a. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox và Oy

A (1;0) ; B (0;-2) $\Rightarrow OA=1; OB=2$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d $\Rightarrow$ OH là khoảng cách từ O đến d

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Rightarrow OH=\sqrt{5}$$

b. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với Ox, Oy. Cắt d lần lượt tại C (3;40 và B(0;-2)

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên d $\Rightarrow$ IK là khoảng cách từ I đến d.

Sử dụng công thức: $\frac{1}{IK^2}=\frac{1}{IC^2}+\frac{1}{IB^2}\Rightarrow IK=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

Bài 3:Cho đường thẳng $\Delta: y=-2x+1$ và điểm $M=(-1;-3)$ trên hệ trục tọa độ Oxy. Hãy tính khoảng cách

a. Từ O đến Δ b. Từ M đến Δ

HD:

a) Ta tính được khoảng các từ O đến Δ là: $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) Ta tính được khoảng các từ M đến Δ là: $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

Nâng cao: Khoảng cách từ một điểm (bất kì) đến một đường thẳng

Phương pháp giải:

Để tính khoảng cách từ điểm $A(x_A;y_A)$ tới đường thẳng (d):

Bước 1:Viết phương trình đường thẳng (d’) đi qua $A(x_A;y_A)$ và vuông góc với d

Bước 2:Tìm tọa độ $B(x_B;y_B)$ là giao điểm của (d) và (d’). Đoạn AB là khoảng cách từ A đến (d)

Bước 3:Tính AB thông qua tam giác vuông ACB, ta có:

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}\ (1)$$

Chú ý:Công thức (1) còn gọi là công thức khoảng cách giữa hai điểm trong hệ tọa độ Oxy

Nâng cao: Khoảng cách từ điểm $A(x_A;y_B)$ tới đường thẳng $(d): kx+hy+c=0$

Xác định công thức $d\left(A,(d)\right)=\dfrac{|k.x_A+h.y_A+c|}{\sqrt{k^2+h_2}}$

Bài 1:Cho đường thẳng $(d): y=3x+1$. Tính khoảng cách từ điểm $A(2;3)$ tới đường thẳng (d)

HD:

Cách 1:Ta có $(d'): y=a(x-2)+3$ là đường thẳng đi qua $A(2;3)$ và vuông góc với đường thẳng (d)

$(d'): y=a(x-2)+3 \Leftrightarrow (d'): y=ax-2a+3$

$(d')\perp(d) \Leftrightarrow a.3=-1 \Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{3} \Rightarrow (d'): y=\dfrac{-1}{3}x+\dfrac{11}{3}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d') là: $\dfrac{-1}{3}x+\dfrac{11}{3}=3x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{5} \Rightarrow y=\dfrac{17}{5}$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (d') là $B\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{17}{5}\right)$

Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) là $AB=\sqrt{\left(2-\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(3-\dfrac{17}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ (đvdt)

Cách 1: Dùng công thức khoảng cách

Ta có $(d): y=3x+1 \Leftrightarrow (d): 3x-y+1=0$

Khoảng cách từ $A(2;3)$ tới đường thẳng (d) là: $d\left(A,(d)\right)=\dfrac{|3.2-3+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ (đvdt)

Bài 2:Cho hai đường thẳng $(d_1): y=3x-1$ và $(d_2): y=3x+2$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

HD:

Nhận thấy $(d_1),(d_2)$ có hệ số góc bằng nhau nên $(d_1)//(d_2)$. Do đó hệ số góc giữa hai đường thẳng bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia

Chọn điểm $A(0;-1)$ thuộc đường thẳng (d_1)

Gọi đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với (d_1) (hoặc (d_2)) là: $(\Delta): y=kx-1$,

Trong đó: $k.3=-1 \Rightarrow k=\dfrac{-1}{3} \Rightarrow (\Delta): y=\dfrac{-1}{3}x-1$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (d_2) là: $3x+2=\dfrac{-1}{3}x-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{-9}{10} \Rightarrow y=\dfrac{-7}{10}$

Vậy giao điểm của (Δ) và (d_2) là $H\left(\frac{-9}{10};\frac{-7}{10}\right)$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là: $AH=\sqrt{(x_A-x_H)^2+(y_A-y_H)^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{-3}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$$

Bài 3:Cho đường thẳng $d: y=mx+2$ (m là tham số)

a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng d luôn đi qua với mọi tham số m

b) Khi $m\neq 0,$ tìm điều kiện của tham số m để khoảng cách từ O đến d bằng $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

HD:

a) Giả sử $I(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng d luôn đi qua $\Leftrightarrow I\in d$ với mọi giá trị của m $\Leftrightarrow y_0=mx_0+2$ với mọi m $\Leftrightarrow mx_0+(2-y_0)=0,\forall m$ (phương trình bậc nhất ẩn m)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\y_0=2\end{cases}\Rightarrow I(0;2)$$

b) Gọi H là hình chiếu của O trên d $\Rightarrow OH$ là khoảng cách từ O đến d

Nhận thấy $OH\leq OI=2.$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv I(0;2)\Leftrightarrow d\perp Oy=I(0;2)\Leftrightarrow d$

Có dạng $y=2\Leftrightarrow m=0.$

c) Gọi K là giao điểm của d và Ox $\Rightarrow K\left(\frac{-2}{m};0\right)$

Xét ΔOKI có $O=90^0;OI=2\Rightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OK^2}\Leftrightarrow\frac{5}{4}=\frac{m^2}{4}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=+-2$

Vậy $OK=\left|\frac{-2}{m}\right|=\frac{2}{|m|}.$

Bài 4:Cho đường thẳng $d: y=mx+2$ (m là tham số)

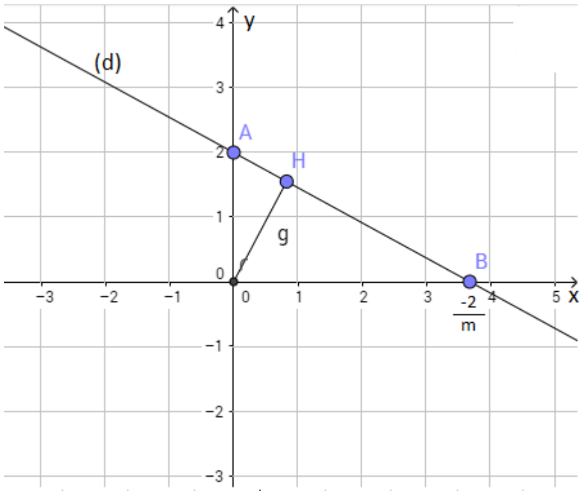
a) Chứng minh khi m thay đổi d luôn đi qua điểm $A(0;2)$ cố định với mọi m

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d là lớn nhất

c) Khi $m\neq 0$. Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d bằng 1.

HD:

a) Thay $A(0;2)$ vào hàm số $y=mx+2$ ta được $2=2$ (luôn đúng) $\Rightarrow d$ luôn đi qua $A(0;2)$ với mọi m.



b) Giả sử ta có d trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Hạ $OH\perp d=H$, ta có $OH\le OA$ (quan giữa đường vuông góc và đường xiên), nên OH lớn nhất khi $OH=OA\Leftrightarrow H\equiv A\Leftrightarrow m=0.$

c) Ta có $A(0;2);B(0;x_B)$ với $x_B=\left|\frac{-2}{m}\right|$

Khi đó $OA=2;OB=\left|\frac{-2}{m}\right|$

Ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{0B^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{\left(\frac{2}{m}\right)^2}\Rightarrow m=\pm\sqrt{3}$

Bài 5:Cho đường thẳng $(d):y=2x+1$ (m là tham số)

a) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến (d)

b) Tính khoảng cách từ điểm $M(5;7)$ độ đến (d)

HD:

a) $(d):y=2x+1$ cắt trục Ox tại $A\left(\frac{-1}{2};0\right)$ và cắt trục Oy tại điểm $B(0;1)$

Kẻ $OH\perp(d)=H,$ ta có OH là khoảng cách từ O đến (d)

ΔAOB vuông tại O, đường cao OH, ta có: $OA=|x_A|=\frac{1}{2}$ (đvđd); $OB=|y_B|=1$ (đvđd)

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=4+1=5\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{5}}{5}\text{(đvđd)}$$

b) *Cách 1:*Tìm tọa độ điểm K là hình chiếu của M lên (d) thì khoảng cách là OK

Đường thẳng đi qua $M(5;7)$ là $(d'):y=k(x-5)+7$

$$(d)\perp(d')=K\Leftrightarrow k.2=-1\Leftrightarrow k=\frac{-1}{2}\Rightarrow(d'):y=\frac{-1}{2}x+\frac{19}{2}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d’) (trong đó d và d’ cắt nhau tại K)

$$2x_K+1=\frac{-1}{2}x_K+\frac{19}{2}\Leftrightarrow x_K=\frac{17}{5}\Rightarrow y_K=\frac{39}{5}\Rightarrow K\left(\frac{17}{5};\frac{39}{5}\right)$$

Khoảng cách từ $M(5;7)$ đến (d) là: $MK=\sqrt{\left(\frac{17}{5}-5\right)^2+\left(\frac{39}{5}-7\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{16}{25}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (đvđd)

Cách 2: Dùng công thức tính khoảng cách (nâng cao)

Ta có: $(d): y=2x+1\Leftrightarrow(d): 2x-y+1=0$

Khoảng cách từ $M(5;7)$ đến (d) là: $\frac{|2.5-7+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (đvđd)

Bài 6: Cho đường thẳng $(d): y=2x-3$ (m là tham số)

a) Xác định những điểm A thuộc trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến đường thẳng (d) bằng 7

b) Xác định những điểm B thuộc trục Oy sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng (d) bằng 4

HD:

a) Ta có $(d): y=2x-3\Leftrightarrow(d): 2x-y-3=0$

Điểm A thuộc trục Ox, nên ta có $A(a;0)$

Khoảng cách từ A đến (d) là: $\left|\frac{2.a-0-3}{2^2+(-1)^2}\right|=\frac{|2a-3|}{\sqrt{5}}$

Theo bài cho ta có: $\frac{|2a-3|}{\sqrt{5}}=7\Leftrightarrow|2a-3|=7\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{7\sqrt{5}+3}{2}\\ a=\frac{-7\sqrt{5}+3}{2}\end{array}\right.\Rightarrow$

Tọa độ điểm A là $\left(\frac{7\sqrt{5}+3}{2};0\right)$ Hoặc $\left(\frac{-7\sqrt{5}+3}{2};0\right)$.

b) $(d): y=2x-3\Leftrightarrow(d): 2x-y-3=0$

Điểm B thuộc trục Oy, nên ta có $B(0;b)$

Khoảng cách từ B đến (d) là: $\left|\frac{2.0-b-3}{2^2+(-1)^2}\right|=\frac{|b-3|}{\sqrt{5}}$

Theo bài cho ta có: $\dfrac{|b-3|}{\sqrt{5}}=4 \Leftrightarrow |b-3|=4\sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4\sqrt{5}+3 \\ b=-4\sqrt{5}+3 \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm B là $\left(0;4\sqrt{5}+3\right)$ hoặc $\left(0;-4\sqrt{5}+3\right)$

Bài 7:Cho hai đường thẳng $(d): y=x+2$ và $(d'): y=-x+3$. Xác định những điểm A thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ A đến đường thẳng (d’) bằng 3

HD:

Ta có $(d): y=x+2 \Leftrightarrow (d) x-y+2=0$ và $(d'): y=-x+3 \Leftrightarrow -x-y+3=0$

Điểm A thuộc đường thẳng (d), nên $A(a;a+2)$

Khoảng cách từ A đến đường thẳng (d’) là: $\dfrac{|-a-(a+2)+3|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2a+1|}{\sqrt{2}}$

Theo bài cho ta có $\dfrac{|-2a+1|}{\sqrt{2}}=3 \Leftrightarrow |-2a+1|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1-3\sqrt{2}}{2} \\ a=\dfrac{1-3\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm A là: $\left(\dfrac{1-3\sqrt{2}}{2};\dfrac{5-3\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $\left(\dfrac{1+3\sqrt{2}}{2};\dfrac{5+3\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài 8:Cho hai đường thẳng $ax+by-6=0$ tạo với trục Ox một góc 60^0 và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 3. Tính giá trị của $T=a^2+b^2$

HD:

*Cách 1:*Dùng công thức tính khoảng cách

Đường thẳng này cách gốc tọa độ một khoảng bằng 3

$$\Rightarrow \frac{|a.0+b.0-6|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=2 \Rightarrow T=a^2+b^2=4$$

Nhận xét: Giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$ không phụ thuộc vào góc tạo bởi đường thẳng và trục Ox

*Cách 2:*Tìm giao điểm của đường thẳng với hai trục tọa độ là A và B

+ Kẻ OH vuông góc với đường thẳng tại H, ta có $OH=3$

+ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOB, tính được $T=a^2+b^2=4$

Bài 9:Cho hai đường thẳng $(d): y=(m-2)x-m+5$.Tìm m để khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) lớn nhất

HD:

Tìm được điểm $I(1;3)$ là điểm cố định thuộc đường thẳng (d)

Kẻ $OH \perp (d) = H,$ ta luôn có $OH \le OI \Rightarrow OH_{max} = OI \Leftrightarrow H \equiv I \Leftrightarrow (d) \perp OI\,(*)$

Viết được phương trình đường thẳng OI là: $y = 3x$

Do đó $(*) \Leftrightarrow (m-2).3 = -1 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{3}$

Vậy $m = \dfrac{5}{3}$ thì khoảng cách từ O đến (d) là lớn nhất.

Bài 10:Cho hai đường thẳng $(d'): y = mx + 3m + 2$. Tìm m để khoảng cách từ $B(2;-3)$ đến đường thẳng (d') lớn nhất

HD:

Tìm được điểm $K(-3;2)$ là điểm cố định thuộc (d')

Kẻ $BH \perp (d') = H,$ ta luôn có $BH \le BK \Rightarrow BH_{max} = BK \Leftrightarrow H \equiv K \Leftrightarrow (d') \perp BK\,(*)$

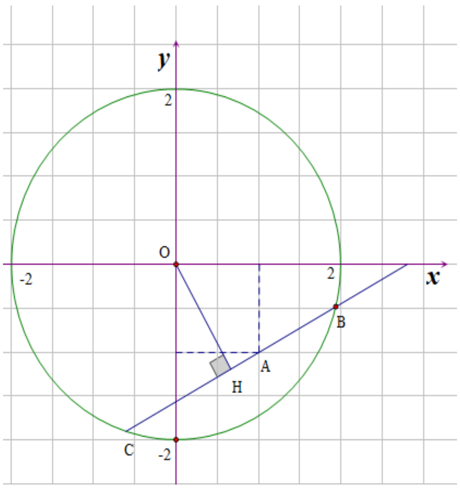
Lập được phương trình đường thẳng BK là: $y = -x - 1$

Do đó $(*) \Leftrightarrow m.(-1) = -1 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy $m = 1$ thì khoảng cách từ B đến (d') là lớn nhất.

Bài 11:Cho hai đường thẳng $(d): y = (m+1)x - m - 2$(m là tham số). Tìm các giá trị của m để (d) cắt đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 2, theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

HD:



Ta có đường thẳng $(d): y = (m+1)x - m - 2$ luôn đi qua điểm $A(1;-1)$ cố định

Ta có phương trình đường thẳng OA là: $y = -x$

Gọi B, C là giao điểm của (d) với đường tròn (O) bán kính 2

Kẻ $OH \perp (d) = H$

Chỉ ra được

$\Delta OHC = \Delta OHB \Rightarrow HB = HC \Leftrightarrow BC = 2BH \Rightarrow BC_{min} \Leftrightarrow BH_{min}\,(*)$

Mà $BH^2 = OB^2 - OH^2 = 4 - OH^2\,(pytago) \Rightarrow (*) \Leftrightarrow OH_{max}$

Mà $OH \le OA$ cố định nên $OH_{max} = OA \Leftrightarrow (d) \perp OA \Leftrightarrow (m+1).(-1) = -1 \Leftrightarrow m = 0$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Dạng 11: Tìm điểm cố định mà hàm số luôn đi qua phụ thuộc vào tham số m

Phương pháp giải:

1. Khái niệm điểm cố định: Điểm M (x_0; y_0) là điểm cố định của (d): y = ax +b

(a, b phụ thuộc vào tham số m , a $\neq$ 0) khi và chỉ khi điểm M luôn thuộc (d) với mọi điều kiện của tham số m

Hoặc tương đương với điều kiện: $y_0 = ax_0 + b$ với mọi điều kiện của tham số.

2. Cách tìm điểm cố định

Gọi I (x_0 ; y_0) là điểm cố định của d $\Rightarrow y_0 = ax_0 + b \forall m$

Biến đổi $y_0 = ax_0 + b$ về dạng $A(x_0;y_0)m + B(x_0;y_0) = 0$

Hoặc $A(x_0;y_0)m^2 + B(x_0;y_0)m + C(x_0;y_0) = 0$

+) Ta có: $A(x_0;y_0)m + B(x_0;y_0) = 0 \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0;y_0) = 0 \\ B(x_0;y_0) = 0 \end{cases}$

+)Ta có: $A(x_0;y_0)m^2 + B(x_0;y_0)m + C(x_0;y_0) = 0 \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0;y_0) = 0 \\ B(x_0;y_0) = 0 \\ C(x_0;y_0) = 0 \end{cases}$

Từ đó tìm được: x_0 và y_0 rồi kết luận.

3. Chú ý: Cách tính khoảng cách từ A (x_1 ; y_1) đến B (x_2 ; y_2) trên hệ trục tọa độ Oxy

$$AB = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

Bài 1:Cho hàm số $y = (m-1)x + m\,(d)$. Tìm điểm cố định thuộc đồ thị hàm số?

HD:

Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm cố định thuộc đường thẳng (d) $\Leftrightarrow y_0 = (m-1)x_0 + m$ thỏa mãn với mọi m

$\Leftrightarrow m\left(x_0+1\right)-x_0-y_0=0$ thỏa mãn với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+1=0 \\ -x_0-y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=1 \end{cases}$

Vậy điểm $\left(-1;1\right)$ là điểm cố định thuộc đồ thị hàm số

Bài 2:Cho đường thẳng $\left(m+2\right)x+\left(m-3\right)y-m+8=0$. Chứng minh rằng với mọi m, các đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A\left(-1;2\right)$

HD:

Thay điểm $A\left(-1;2\right)$ vào (d) ta được: $\left(m+2\right).\left(-1\right)+\left(m-3\right).2-m+8=0 \Leftrightarrow 0m=0$ (luôn đúng với mọi m)

Vậy với mọi m, các đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A\left(-1;2\right)$

Bài 3:Chứng minh rằng khi m thay đổi các đường thẳng $x+\left(m-1\right)y=1$ luôn luôn đi qua một điểm cố định.

HD:

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định mà đường thẳng đi qua $\Leftrightarrow 2x_0+\left(m-1\right)y_0=1, \forall m$

$\Leftrightarrow my_0+2x_0-y_0-1=0$ với $\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=0 \\ 2x_0-y_0-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{2} \\ y_0=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$

Vậy đường thẳng đã cho luôn đi qua điểm $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ với mọi m.

Bài 4:Chứng minh rằng đường thẳng $\left(d\right): y=f\left(x\right)=2mx+m-3$ luôn đi qua một điểm cố định thuộc đường thẳng $\left(d'\right): y=2x+4$

HD:

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định mà đường thẳng đi qua $\Leftrightarrow y_0=2mx_0+m-3$ với mọi m

$\Leftrightarrow m\left(2x_0+1\right)-3-y_0=0$ với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0+1=0 \\ -y_0-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{-1}{2} \\ y_0=3 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$

Thay tọa độ điểm M vào (d') ta được: $3=2.\left(\dfrac{-1}{2}\right)+4 \Leftrightarrow 3=3$ (luôn đúng)

Vậy (d) luôn đi qua điểm $M\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$ cố định thuộc (d').

Bài 5 : Cho hàm số y = (2m – 1)x + m – 3.

1) Tìm m để đồ thị của hàm số đi qua điểm (2; 5)

2) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định với mọi m. Tìm điểm cố định ấy.

HD:

1) m = 2.

2) Gọi điểm cố định mà đồ thị luôn đi qua là M(x_0 ;y_0). Ta có

$y_0 = (2m – 1)x_0 + m - 3 \Leftrightarrow (2x_0 + 1)m - x_0 - y_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-1}{2} \\ y_0 = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$

Vậy với mọi m thì đồ thị luôn đi qua điểm cố định $(\frac{-1}{2};\frac{-5}{2})$.

Bài 6:

a. Chứng minh điểm $I(\frac{1}{2};-3)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) : $y=(1-2m)x+m-\frac{7}{2}$ luôn đi qua với mọi giá trị của tham số m.

b. Cho đường thẳng d: y = (2m+1)x + m – 2 với m là tham số. Tìm điểm cố định mà (d) luôn đi qua với mọi m.

HD:

a. Thay $x=\frac{1}{2}; y=-3$ vào (d) thấy luôn thỏa mãn với mọi m, ta được (đpcm)

b. Gọi I (x_0;y_0) là điểm cố định của d

$$\Rightarrow y_0=(2m+1)x_0+m-2\forall m \Rightarrow (2x_0+1)m+(x_0-y_0-2)=0\forall m$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_0+1=0 \\ x_0-y_0-2=0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{-1}{2};\frac{-5}{2})$$

Là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua.

Bài 7:

a. Cho đường thẳng $d: y=(2m+1)x-3m+1$ với tham số m. Điểm $K(\frac{3}{2};\frac{-1}{2})$ có là điểm mà d luôn đi qua với mọi m hay không?

b. Chứng minh đường thẳng $d_1: y=(m-2)x+3m+1$ luôn đi qua điểm cố định với mọi giá trị của tham số m.

HD:

a. Thay tọa độ K vào (d) không thỏa mãn. Vậy K không là điểm cố định của (d)

b. Tìm được (-3 ; 7) là điểm cố định đường thẳng luôn đi qua.

Bài 8: Cho hai đường thẳng (d_1): y = 4mx – (m + 5) với m $\neq$ 0

(d_2): y = $(3m^2 + 1)x + m^2 - 4$

a. Chứng minh rằng: (d_1) đi qua điểm A cố định, (d_2) đi qua điểm B cố định

b. Tính khoảng cách AB

c. Tìm m để d_1 song song với d_2

HD:

a. Giả sử d_1 đi qua điểm A(x_0 ; y_0) cố định $\Rightarrow y_0 = 4mx_0 - (m+5) \forall m$

$$\Rightarrow (4x_0-1)m = y_0+5 \Rightarrow \begin{cases} 4x_0-1=0 \\ y_0+5=0 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{1}{4};-5)$$, tương tự: $B(\frac{-1}{3};\frac{-13}{3})$

b. $AB=\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})^2+(-5+\frac{13}{3})^2}=\frac{\sqrt{113}}{12}$

c. $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b\neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2+1=4m \\ m^2-4\neq -(m+5) \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$

Bài 9: Cho ba đường thẳng: (d_1): y = $(m^2-1)x - m^2 + 3$; (d_2): y = x + 5 ; (d_3): y = -x+1

a. Chứng minh rằng với mọi m thì d_1 luôn đi qua điểm cố định

b. Với giá trị nào của m thì d_1 song song với d_2

c. CMR: Nếu d_1 // d_3 thì d_1 vuông góc với d_2

d. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

HD:

a. d_1 luôn đi qua I(1;2)

b. $d_1 // d_2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$

c. Nếu d_1 // d_3 thì m = 0 $\Rightarrow \begin{cases} d_1 : y = -x+3 \\ d_2 : y = x+5 \end{cases} \Rightarrow d_1 \perp d_2$

d. d_2 và d_3 cắt nhau tại I(-2;3)

Ba đường thẳng đồng quy khi I thuộc $d_1 \Rightarrow m = \frac{\pm\sqrt{6}}{3}$

Chứng minh giao điểm của hai đồ thị hàm số luôn chạy trên một đường cố định với mọi m

Phương pháp giải:

Đường cố định là đường thẳng

Bước 1:Gọi điểm $A(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (d')

Bước 2:Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d'):

$f(x_0, m) = g(x_0, m) \Rightarrow$ tìm x_0 theo tham số m

$\Rightarrow$ tung độ giao điểm y_0 theo tham số m

Bước 3:Thiết lập hệ thức giữa x_0 và y_0 không phụ thuộc vào m. Hệ thức này là phương trình đường thẳng cần tìm.

Đường cố định là đường tròn

Bước 1:Tìm điểm cố định M, N của mỗi đường thẳng

Bước 2:Chỉ ra góc tạo bởi hai đường thẳng luôn không đổi với mọi m. Khi đó giao điểm của hai đường thẳng luôn nhìn MN cố định dưới một góc không đổi nên luôn chạy trên đường tròn (cung tròn...)

Bài 1:Cho hai hàm số $y = 3x + m - 1(d)$ và $y = 4x - m - 1(d')$. Chứng minh rằng khi m thay đổi, giao điểm của hai đồ thị hàm số trên luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

HD:

Gọi giao điểm $A(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (d')

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d') là:

$$3x_0+m-1=4x_0-m-1\Leftrightarrow x_0=2m\Rightarrow y_0=3x_0+m-1=7m-1$$

Từ $\begin{cases}x_0=2m\\ y_0=7m-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{x_0}{2}\\ y_0=7m-1\end{cases}\Rightarrow y_0=\dfrac{7}{2}x_0-1$

Vậy $A(2m;7m-1)$ chạy trên đường thẳng cố định $y_0=\dfrac{7}{2}x_0-1$

Bài 2:Cho hai đường thẳng $(d_1):y=-(m^2+1)x+m^2+3$ và $(d_2):x-(m^2+1)y-6+m^2=0$. Chứng minh rằng giao điểm của (d_1) và (d_2) di động trên một đường tròn cố định khi m thay đổi. Xác định tâm và bán kính đường tròn đó.

HD:

$(d_1):y=-(m^2+1)x+m^2+3$ luôn đi qua điểm $A(1;2)$ cố định với mọi m

$(d_2):x-(m^2+1)y-6+m^2=0\Leftrightarrow(d_2):y=\dfrac{1}{m^2+1}x+\dfrac{m^2-6}{m^2+1}$

(d_2) luôn đi qua điểm $B(7;1)$ cố định với mọi m

Ta có $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}$

Vì $-(m^2+1).\dfrac{1}{m^2+1}=-1$ với mọi m, nên $(d_1)\perp(d_2)=K,\forall m\Rightarrow AKB=90^0\Rightarrow$ giao điểm K của hai đường thẳng di động trên đường tròn đường kính AB cố định, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$

Bài 3:Cho hai hàm số $y=-5x+2m+1(d)$ và $y=-4x-3m-1(d')$. Chứng minh rằng khi m thay đổi, giao điểm của hai đồ thị hàm số trên luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

HD:

Gọi $A(x_0;y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (d’)

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d’) là:

$$-5x_0+2m+1=-4x_0-3m-1\Leftrightarrow x_0=5m+2$$

Ta có $y_0=-5x_0+2m+1=-5(5m+2)+2m+1=-23m-9$

$$\begin{cases} x_0 = 5m+2 \\ y_0 = -23m-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{x_0 - 2}{5} \\ y_0 = -23m-9 \end{cases} \Rightarrow y_0 = \frac{-23}{5}x_0 + \frac{1}{5}$$

Vậy $A(5m+2;-23m-9)$ luôn chạy trên đường thẳng cố định $y_0 = \frac{-23}{5}x_0 + \frac{1}{5}$ với mọi m.

Bài 4:Cho hai hàm số $(d_1): y = -mx - 2m + 3$ và $(d_2): x - my - 2 + m = 0$

a) Chứng minh giao điểm của (d_1) và (d_2) di động trên một đường tròn cố định khi m thay đổi. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó

b) Tính khoảng cách lớn nhất từ $C(1;-1)$ đến (d_1)

HD:

a) Nhận thấy (d_1) đi qua điểm cố định $M(-2;3)$ và (d_2) đi qua điểm cố định $N(2;1)$

Ta có $MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = 2\sqrt{5}$

Xét $m = 0,$ thì $(d_1): y = 3$ và $(d_2): x = 2$ nên $(d_1) \perp (d_2)$

Xét $m \neq 0,$ thì $(d_1): y = -mx - 2m + 3$ và $(d_2): y = \frac{1}{m}x + \frac{m-2}{m}$ có tích hai hệ số góc là:

$$-m.\frac{1}{m} = -1$$

Nên $(d_1) \perp (d_2)$

Vậy $(d_1) \perp (d_2)$ tại điểm K với mọi m, nên $MKN = 90^0$

$\Rightarrow$ giao điểm I của hai đường thẳng di động trên đường tròn đường kính MN, bán kính

$$R = \frac{MN}{2} = \sqrt{5}$$

b) Viết được phương trình đường thẳng MC: $y = \frac{-4}{3}x + \frac{1}{3}$

kẻ $CH \perp (d_1) = H,$

Ta có $CH \leq CM \Rightarrow CH_{max} = CM = 5 \Leftrightarrow CH \perp (d_1) \Leftrightarrow \frac{-4}{3}.(-m) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{-3}{4}$.

Dạng 12: Tìm tham số m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng cho trước là lớn nhất

Phương pháp giải:

Xét đường thẳng $(d): y = ax + b$

Ta có các trương hợp sau xảy ra

Bài toán 1:Tìm m để khoảng cách từ điểm $A(x_A; y_A)$ (khác gốc tọa độ) tới đường thẳng (d) lớn nhất (nhỏ nhất)

+ Xác định được điểm cố định $M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng (d)

+ Kẻ $AH \perp (d) = H$

+ Ta xét ΔAHM vuông tại H $\Rightarrow AH \le AM$ (với AM không đổi)

$\Rightarrow AH$ lớn nhất bằng AM $\Leftrightarrow H \equiv M \Leftrightarrow (d) \perp AM = M$

+ Viết phương trình đường thẳng AM, rồi áp dụng điều kiện vuông góc của hai đường thẳng để tì giá trị của tham số m

Bài toán 2:Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng (d) lớn nhất (nhỏ nhất)

Phương pháp cơ bản:

Cách 1: Phương pháp hình học

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox và Oy; H là hình chiếu vuông góc của O trên d

Ta có khoảng cách từ O đến d là OH và được tính bởi công thức sau: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

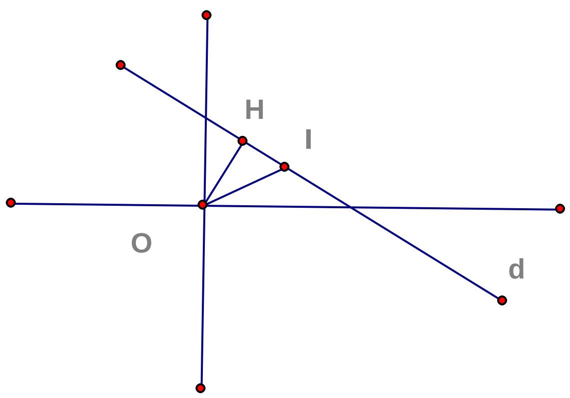
Từ đó tìm điều kiện của m để OH đạt giá trị lớn nhất

Cách 2: Dùng phương pháp điểm cố định

Tìm được I là điểm cố định mà d luôn di qua

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d $\Rightarrow OH \le OI = hangso$

Ta có: $OH_{max} = OI \Leftrightarrow$ d là đường thẳng qua I và vuông góc với OI. Từ đó tìm được tham số m.



Phương pháp đặc biệt: Khi hệ số góc a luôn dương (hoặc luôn âm) và điểm cố định $M\left(x_0;y_0\right)$ nằm trên trục Oy thì ta làm như sau

+ Gọi B là giao điểm của (d) với trục hoành

+ Xét ΔOMB vuông tại O, đường cao OH nên: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OB^2}$

+ Góc tạo bởi (d) và trục hoành là α, ta có:

$|tan\alpha|=|a|=\frac{OM}{OB}\Rightarrow OB=\frac{OM}{|a|}\Rightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{a^2}{OM^2}=\frac{a^2+1}{OM^2}\Rightarrow OH_{max}\Leftrightarrow\left(a^2+1\right)_{min}\Leftrightarrow a^2$ nhỏ nhất

Bài 1:Cho đường thẳng d: y = mx – 2m – 1 với m là tham số. Tìm m sao cho khoảng cách từ O đến d đạt giá trị

a. nhỏ nhất b. Lớn nhất

HD:

a. Khoảng cách từ O đến d nhỏ nhất bằng 0 khi O thuộc vào (d). Từ đó tìm được m = $\frac{-1}{2}$

b. Cách 1: Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Nếu m = 0 $\Rightarrow d: y=-1\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến (d) bằng 1

Trường hợp 2: Nếu m $\neq 0\Rightarrow d$ cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại $A(\frac{2m+1}{m};0); B(0;-2m-1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d.

Từ $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Rightarrow OH^2=\frac{(2m+1)^2}{m^2+1}$

Ta lại có: $OH^2-5=-\frac{(m-2)^2}{m^2+1}\leq 0\Rightarrow OH\leq\sqrt{5}\forall m\neq 0$

Kết hợp các trường hợp 1 và 2, ta được: $OH_{max}=\sqrt{5}\Leftrightarrow m=2$

Cách 2: Gọi I là điểm cố định của d. Ta tìm được I (2;-1)

Với mỗi m, gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d

$$\Rightarrow OH\leq OI=\sqrt{5}\forall m\Rightarrow OH_{max}=\sqrt{5}\Leftrightarrow d\perp OI\Rightarrow m=2$$

Bài 2:Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $\Delta: y=(m+1)x+m+2$ đạt giá trị

a. nhỏ nhất b. Lớn nhất

HD:

a) Khoảng cách từ O đến d có giá trị nhỏ nhất bằng 0, đạt được khi $O \in d$.

Từ đó tìm được $m=-2$

b) Cách 1: Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Với $m=-1 \Rightarrow \Delta: y=1 \Rightarrow d(O;\Delta)=1$

Trường hợp 2: Với $m \neq -1 \Rightarrow \Delta$ cắt Ox, Oy lần lượt tại $A\left(-\frac{m+2}{m+1};0\right); B(0;m+2)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $\Delta \Rightarrow d(O;\Delta)=OH$

Từ $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2} \Rightarrow OH^2=\frac{(m+2)^2}{m^2+2m+2} \leq 2 \forall m \neq -1 \Rightarrow OH_{max}=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=0$

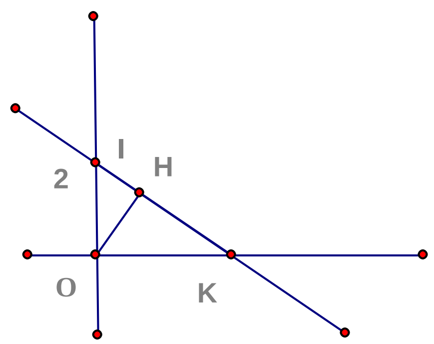
Bài 3: Cho đường thẳng d: y = mx + 2 (m là tham số)

a. Tìm điểm cố định I mà d luôn đi qua với mọi m

b. Tìm m để khoảng cách từ O đến d lớn nhất

c. Khi m ≠ 0, tìm m để khoảng cách từ O đến d $=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

HD:



a. I (0;2)

b. Gọi H là hình chiếu của O trên d, OH là khoảng cách từ O đến d

Ta có: $OH \le OI = 2, dau"=" \Leftrightarrow H \equiv I(0;2) \Leftrightarrow d \perp Oy$ tại I (0;2)

$\Leftrightarrow$ d có dạng: y = 2 $\Leftrightarrow m = 0$

Vậy khoảng cách từ O đến d lớn nhất = 2 khi m = 0

c. Gọi K là giao điểm của d với Ox $\Rightarrow K(\frac{-2}{m};0)$

Xét tam giác vuông OIK (vuông tại O): OI = 2 ; OK = $\sqrt{(\frac{-2}{m})^2 + 0^2} = \left|\frac{-2}{m}\right| = \frac{2}{|m|}$

Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{m^2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Bài 4:Cho đường thẳng $(d): y = (m-2)x - m + 4.$ Tìm m để khoảng cách từ $A(3;5)$ tới đường thẳng (d) là lớn nhất

HD:

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc đường thẳng (d) $\Leftrightarrow y_0 = (m-2)x_0 - m + 4, \forall m$

$$\Leftrightarrow m(x_0 - 1) - 2x_0 - y_0 + 4 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ -2x_0 - y_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow M(1;2)$$

Gọi khoảng cách từ A đến (d) là AH ($AH \perp d = H$)

$\Rightarrow$ ta luôn có ΔAHM vuông tại H $\Rightarrow AH \le AM$ (với AM không đổi)

$\Rightarrow AH$ lớn nhất bằng AM $\Leftrightarrow H \equiv M \Leftrightarrow (d) \perp AM = M \,(1)$

Phương trình đường thẳng (AM): $y = ax + b$

(AM) đi qua $A(3;5) \Rightarrow 3a + b = 5 \Rightarrow b = 5 - 3a$

(AM) đi qua $M(1;2) \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - a$

Do đó $2 - a = 5 - 3a \Leftrightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow (AM): y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

Từ (1) ta có: $(m-2).\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$ (Dựa vào kiến thức hai đường thẳng vuông góc khi $a.a' = -1$

Bài 5:Cho đường thẳng $(d): y = (m^2+1)x + 4.$ Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng (d) lớn nhất.

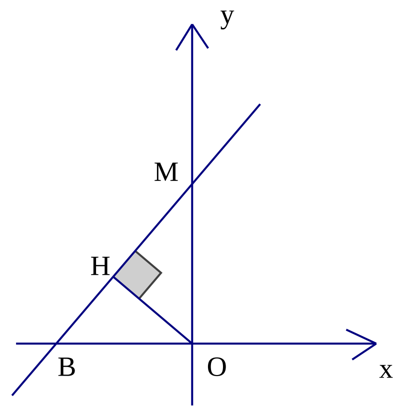
HD:

Giải sử đường thẳng d đi qua điểm cố định $M\left(x_0;y_0\right)$

M là điểm cố định thuộc đường thẳng d $\Leftrightarrow y_0=\left(m^2+1\right)x_0+4$ đúng với mọi m

$$\Leftrightarrow y_0-x_0-4=m^2x_0 \text{ đúng với mọi m } \Leftrightarrow \begin{cases} y_0-x_0-4=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=4 \end{cases} \Rightarrow M\left(0;4\right)$$

Vậy (d) luôn đi qua điểm cố định $M\left(0;4\right)$



Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng d và trục Ox

Vì đường thẳng d có hệ số góc $a=m^2+1\geq 1>0\Rightarrow \alpha$ là góc nhọn

D cắt trục Ox tại điểm $B\left(\dfrac{-4}{m^2+1};0\right)$

Đồ thị đường thẳng (d) được mô tả như hình vẽ bên

ΔMOB vuông tại O đường cao OH, có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{OB^2}$

Với OM không đổi $\Rightarrow OH_{max}\Leftrightarrow \dfrac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OB$ lớn nhất

Mà $tan\alpha=m^2+1=\dfrac{OM}{OB}\Rightarrow OB_{max}\Leftrightarrow \left(m^2+1\right)_{min}=1\Leftrightarrow m=0$

Vậy $m=0$ thì bài toán thỏa mãn.

Bài 6: Cho đường thẳng $mx+\left(2-3m\right)y+m-1=0$ (d).

a)Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua.

b)Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

c)Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại A,B sao cho tam giác OAB cân.

HD:

a)Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m khi đó

Ta có: $mx_0+(2-3m)y_0+m-1=0\forall m \Leftrightarrow m(x_0-3y_0+1)+2y_0-1=0\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-3y_0+1=0 \\ 2y_0-1=0 \end{cases}$.

Hay $\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{2} \\ y_0=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

b)Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Ta có: $OH \le OI$ suy ra OH lớn nhất bằng OI khi và chỉ khi $H \equiv I \Leftrightarrow OI \perp (d)$.

Đường thẳng qua O có phương trình: $y=ax$ do:

$$I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\in OI \Rightarrow \frac{1}{2}=a.\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow OI: y=x.$$

Đường thẳng (d) được viết lại như sau:

$$mx+(2-3m)y+m-1=0 \Leftrightarrow (2-3m)y=-mx+1-m.$$

+ Để ý rằng với $m=\dfrac{2}{3}$ thì đường thẳng $(d): x-\dfrac{1}{2}=0$ song song với trục Oy nên khoảng cách từ O đến (d) là $\dfrac{1}{2}$.

+ Nếu $m \ne \dfrac{2}{3}$ đường thẳng (d) có thể viết lại: $y=\dfrac{m}{3m-2}x+\dfrac{m-1}{3m-2}$.

Điều kiện để $(d)\perp OI$ là $\dfrac{m}{3m-2}.1=-1 \Leftrightarrow m=2-3m \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó khoảng cách $OI=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

c)Ta có thể giải bài toán theo 2 cách sau:

+ Cách 1: Dễ thấy $m=\dfrac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện (Do (d) không cắt Oy).

Xét $m \ne \dfrac{2}{3}$, đường thẳng (d) cắt Ox, Oy tại các điểm A, B tạo thành tam giác cân OAB , Do góc $AOB = 90^0 \Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại O.

Suy ra hệ số góc của đường thẳng (d) phải bằng 1 hoặc -1 và đường thẳng (d) không đi qua gốc O.

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{3m-2}=1\\ \dfrac{m}{3m-2}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$. Ta thấy chỉ có giá trị $m=\dfrac{1}{2}$ là thỏa mãn điều kiện bài toán.

Cách 2: Dễ thấy $m=\dfrac{2}{3}, m=0$ không thỏa mãn điều kiện

Xét $m \neq 0;\dfrac{2}{3}$, đường thẳng (d) có thể viết lại: $y=\dfrac{m}{3m-2}x+\dfrac{m-1}{3m-2}$.

Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm A có tung độ bằng 0 nên

$$\frac{m}{3m-2}x+\frac{m-1}{3m-2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1-m}{m} \Rightarrow A\left(\frac{1-m}{m};0\right) \Rightarrow OA=\left|\frac{1-m}{m}\right|,$$

Đường thẳng (d) cắt trục Oy tại điểm có hoành độ bằng 0 nên

$$y=\frac{m-1}{3m-2} \Rightarrow B\left(0;\frac{m-1}{3m-2}\right) \Rightarrow OB=\left|\frac{m-1}{3m-2}\right|.$$

Điều kiện để tam giác OAB cân là $OA=OB \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-m}{m}\right|=\left|\dfrac{m-1}{3m-2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ |m|=|3m-2|\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Giá trị $m=1$ không thỏa mãn , do đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ.

Kết luận: $m=\dfrac{1}{2}$.

Bài 7: Cho hai đường thẳng $(d_1): mx+(m-1)y-2m+1=0, (d_2): (1-m)x+my-4m+1=0$

a)Tìm các điểm cố định mà (d_1), (d_2) luôn đi qua.

b)Tìm m để khoảng cách từ điểm $P(0;4)$ đến đường thẳng (d_1) là lớn nhất.

c)Chứng minh hai đường thẳng trên luôn cắt nhau tại điểm I .Tìm quỹ tích điểm I khi m thay đổi.

d)Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAB với A,B lần lượt là các điểm cố định mà $(d_1),(d_2)$ đi qua.

HD:

a)Ta viết lại $(d_1): mx+(m-1)y-2m+1=0 \Leftrightarrow m(x+y-2)+1-y=0$. Từ đó dễ dàng suy ra đường thẳng $(d_{1)}$ luôn đi qua điểm cố định: $A(1;1)$.

Tương tự viết lại $(d_2):(1-m)x+my-4m+1=0 \Leftrightarrow m(y-x-4)+1+x=0$ suy ra (d_2) luôn đi qua điểm cố định: $B(-1;3)$.

b)Để ý rằng đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định: $A(1;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên (d_1) thì khoảng cách từ A đến (d_1) là $PH \le PA$.

Suy ra khoảng cách lớn nhất là PA khi $P \equiv H \Leftrightarrow PH \perp (d_1)$.

Gọi $y=ax+b$ là phương trình đường thẳng đi qua $P(0;4),A(1;1)$

Ta có hệ : $\begin{cases} a.0+b=4 \\ a.1+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=-3 \end{cases}$ suy ra phương trình đường thẳng $PA: y=-3x+4$.

Xét đường thẳng $(d_1):: mx+(m-1)y-2m+1=0$.

Nếu $m=1$ thì $(d_1): x-1=0$ không thỏa mãn điều kiện. Khi $m \ne 1$ thì:

$(d_1): y=\dfrac{m}{1-m}x+\dfrac{2m-1}{m-1}$. Điều kiện để $(d_1) \perp PA$ là $\dfrac{m}{1-m}(-3)=-1 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

c)Nếu $m=0$ thì $(d_1): y-1=0$ và $(d_2): x+1=0$

Suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(-1;1)$.

Nếu $m=1$ thì $(d_1): x-1=0$ và $(d_2): y-3=0$

suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(1;3)$.

Nếu $m \ne \{0;1\}$ thì ta viết lại $(d_1): y=\dfrac{m}{1-m}x+\dfrac{2m-1}{m-1}$ và $(d_2): y=\dfrac{m-1}{m}x+\dfrac{4m-1}{m}$.

Ta thấy $\left(\dfrac{m}{1-m}\right)\left(\dfrac{m-1}{m}\right)=-1$ nên $(d_1) \perp (d_2)$.

Do đó hai đường thẳng này luôn cắt nhau tại 1 điểm I.

Tóm lại với mọi giá trị của m thì hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ luôn vuông góc và cắt nhau tại 1 điểm I.

Mặt khác theo câu a) ta có $(d_1),(d_2)$ lần lượt đi qua 2 điểm cố định A,B suy ra tam giác IAB vuông tại A.

Nên I nằm trên đường tròn đường kính AB.

d)Ta có $AB=\sqrt{(-1-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$.

Dựng $IH\perp AB$ thì $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IH.AB\le\frac{1}{2}IK.AB=\frac{1}{2}\frac{AB}{2}.AB=\frac{AB^2}{4}=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAB là 2 khi và chỉ khi $IH=IK$.

Hay tam giác IAB vuông cân tại I.

Dạng 12: Xác định tọa độ điểm đối xứng

Phương pháp giải:

Cho hai điểm $M(x_M;y_M)$ và $N(x_N;y_N)$ trong hệ tọa độ Oxy

+ Hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục hoành $\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=x_N\\y_M=-y_N\end{cases}$

+ Hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục tung $\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-x_N\\y_M=y_N\end{cases}$

+ Hai điểm M và N đối xứng nhau qua gốc tọa độ $\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-x_N\\y_M=-y_N\end{cases}$

Cho điểm $M(x_M;y_M)$ đã biết. Tìm $N(x_N;y_N)$ đối xứng với M qua đường thẳng $d:y=ax+b$

Bước 1: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d

Bước 2:Lập phương trình hoành độ giao điểm để tìm giao điểm $I(x_I;y_I)$ của hai đường thẳng

Bước 3:Điểm N đối xứng với M qua đường thẳng d $\Leftrightarrow I$ là trung điểm của MN

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2}\\y_I=\dfrac{y_M+y_N}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_N=2x_I-x_M\\y_N=2y_I-y_M\end{cases}\Rightarrow$ tọa độ điểm đối xứng.

Bài 1:Cho điểm $A(2;1)$. Xác định tọa độ các điểm

a) B đối xứng với A qua trục tung

b) C đối xứng với A qua trục hoành

HD:

a) Điểm B đối xứng với điểm $A(2;1)$ qua trục tung $\Rightarrow \begin{cases} x_B=-2 \\ y_B=1 \end{cases} \Rightarrow B(-2;1)$

b) Điểm C đối xứng với điểm $A(2;1)$ qua trục hoành $\Rightarrow \begin{cases} x_C=2 \\ y_C=-1 \end{cases} \Rightarrow C(2;-1)$

Bài 2:Cho điểm $A(2;1)$. Xác định tọa độ các điểm

a) D đối xứng với A qua gốc tọa độ

b) E đối xứng với A qua đường thẳng $(d): y=2x-1$

HD:

a) Điểm D đối xứng với điểm $A(2;1)$ qua gốc tọa độ $\Rightarrow \begin{cases} x_D=-2 \\ y_D=-1 \end{cases} \Rightarrow D(-2;-1)$

b) Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với đường thẳng $(d): y=2x-1$ và đi qua điểm $A(2;1)$

$$\Rightarrow \Delta: y=\frac{-1}{2}x+2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và Δ là:

$$\frac{-1}{2}x+2=2x-1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x=3 \Leftrightarrow x=\frac{6}{5} \Rightarrow y=\frac{7}{5} \Rightarrow$$

Suy ra giao điểm của (d) và Δ là điểm $H\left(\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$

Điểm E đối xứng với A qua đường thẳng (d) nên điểm H là trung điểm của AE

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_B=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E=2x_H-x_A \\ y_E=2y_H-y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E=2.\dfrac{6}{5}-2=\dfrac{2}{5} \\ y_E=2.\dfrac{7}{5}-1=\dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{2}{5};\frac{9}{5}\right)$$

Bài 3:Cho đường thẳng $(d): y=2x-3$. Tìm tọa độ điểm B đối xứng với điểm $A(1;5)$ qua đường thẳng d

HD:

Phương trình đường thẳng vuông góc với (d) và đi qua điểm $A(1;5)$ là: $(d'): y = \frac{-1}{2}x + \frac{11}{2}$

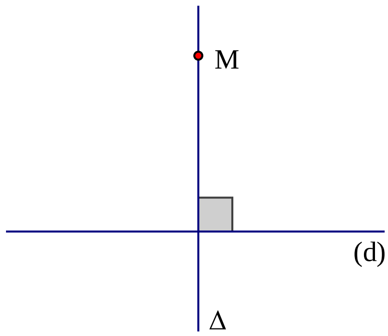
Giao điểm của (d) và (d') là: $H\left(\frac{17}{5};\frac{7}{5}\right)$

Điểm B đối xứng với điểm A qua (d) nên H là trung điểm của AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_H - x_A \\ y_B = 2y_H - y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2.\frac{17}{5} - 1 = \frac{29}{5} \\ y_B = 2.\frac{7}{5} - 5 = \frac{-11}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{29}{5};\frac{-11}{5}\right)$$

Dạng 13: Tìm tọa độ hình chiếu của điểm M lên đường thẳng d

Phương pháp giải:



- Viết phương trình đường thẳng Δ qua M và vuông góc với d

- Hình chiếu của M lên d là điểm H (giao điểm của Δ và d)

- Nếu điểm $M(x_0;y_0)$ khi đó tọa độ hình chiếu H của M trên Ox sẽ có tọa độ là $H(x_0;0)$, trên Oy sẽ có tọa độ là $H(0;y_0)$

- Nếu điểm $M \notin d$ mà bài toán yêu cầu: "Tìm tọa độ điểm $H \in d$ sao cho MH ngắn nhất thì tương đương với việc tìm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên d.

Bài 1:Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 2x - 3$. Tìm tọa độ hình chiếu của gốc tọa độ lên đường thẳng (d)

HD:

Đường thẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng (d) có dạng $(d'): y = \frac{-1}{2}x$

Hình chiếu của gốc tọa độ lên đường thẳng (d) là giao điểm K của (d) và (d')

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d') là: $2x - 3 = \frac{-1}{2}x \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{-3}{5}$

Vậy tọa độ hình chiếu của gốc tọa độ lên (d) là $K\left(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}\right)$

Bài 2:Cho đường thẳng $(\Delta): 3x - y + 2 = 0.$ Tìm hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;2)$ lên đường thẳng (Δ)

HD:

Ta có $(\Delta): 3x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow (\Delta): y = 3x + 2$

$(d): y = ax + b$ là đường thẳng đi qua $M(3;2)$, vuông góc với (Δ)

$d \perp (\Delta) \Rightarrow a.3 = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{3} \Rightarrow (d): y = \frac{-1}{3}x + b$

(d) đi qua điểm $M(3;2) \Rightarrow \frac{-1}{3}.3 + b = 2 \Rightarrow b = 3$

Khi đó đường thẳng $(d): y = \frac{-1}{3}x + 3$

Hình chiếu của M lên đường thẳng Δ là giao điểm H của (d) và (Δ)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (Δ) là: $\frac{-1}{3}x + 3 = 3x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{10} \Rightarrow y = \frac{29}{10}$

Vậy tọa độ hình chiếu của M lên (Δ) là $H\left(\frac{3}{10}; \frac{29}{10}\right)$

Dạng 14: Chứng minh các điểm thẳng hàng. Tìm tọa độ đỉnh của hình đặc biệt hoặc thỏa mãn điều kiện tam giác cân, vuông, đều

Phương pháp giải:

Cách chứng minh các điểm thẳng hàng

- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm là $y = ax + b$
- Thay tọa độ các điểm còn lại vào (d), nếu tất cả thỏa mãn (d) thì các điểm thẳng hàng

Cách tìm tọa độ đỉnh

- Viết phương trình cạnh đi qua các điểm đã biết

- Dùng yếu tố song song, vuông góc của các cạnh trong hình rồi tìm phương trình các cạnh còn lại

- Tọa độ đỉnh là giao điểm của hai cạnh của hình.

Bài 1: Cho ba điểm $A(-1,6);B(-4,4);C(1,1)$. Tìm tọa độ đỉnh D của hình bình hành ABCD

HD:

Đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$

+ Đi qua điểm $A(-1;6) \Rightarrow -a + b = 6 \Rightarrow b = a + 6$

+ Đi qua điểm $B(-4;4) \Rightarrow -4a + b = 4 \Rightarrow b = 4 + 4a$

Do đó $4 + 4a = a + 6 \Leftrightarrow 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{20}{3} \Rightarrow (AB): y = \frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

Đường thẳng $DC // AB$, nên đường thẳng DC có dạng $y = \frac{2}{3}x + b_1$

Đường thẳng DC đi qua điểm $C(1;1) \Rightarrow \frac{2}{3} + b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow (DC): y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Đường thẳng BC có dạng $y = a'x + b'$

+ Đi qua điểm $B(-4;4) \Rightarrow -4a' + b' = 4 \Rightarrow b' = 4a' + 4$

+ Đi qua điểm $C(1;1) \Rightarrow a' + b' = 1 \Rightarrow b' = 1 - a'$

Do đó $4a' + 4 = 1 - a' \Rightarrow a' = \frac{-3}{5} \Rightarrow b' = \frac{8}{5} \Rightarrow (BC): y = \frac{-3}{5}x + \frac{8}{5}$

Đường thẳng $AD // BC$, nên đường thẳng AD có dạng $y = \frac{-3}{5}x + b_2$

+ Đường thẳng AD đi qua điểm

$$A(-1;6) \Rightarrow \frac{3}{5} + b_2 = 6 \Rightarrow b_2 = \frac{27}{5} \Rightarrow (AD): y = \frac{-3}{5}x + \frac{27}{5}$$

+ Điểm D là giao điểm của hai đường thẳng AD và CD

Phương trình hoành độ giao điểm của AD và CD là:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{-3}{5}x + \frac{27}{5} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow D(4;3)$$

Bài 2: Cho bốn điểm $A(0;5); B(1,2); C(2,1); D(2,5;2,5)$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng

HD:

Phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$

+ Đường thẳng AB đi qua điểm $A(0;5) \Rightarrow b = 5$

+ Đường thẳng AB đi qua điểm $B(1;2) \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a = 2 - b = -3$

Vậy $(AB): y = -3x + 5$

Thay tọa độ các điểm $C(2;1); D(2,5;2,5)$ vào phương trình đường thẳng (AB) thấy thỏa mãn $\Rightarrow$ bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Bài 3: Cho điểm $M(3;-1)$ và đường thẳng $(d): 3x - 4y + 12 = 0$

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm M lên đường thẳng d

b) Tìm tọa độ điểm M_1 là điểm đối xứng với M qua đường thẳng d

HD:

a) Đường thẳng $(d): 3x - 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow (d): y = \frac{3}{4}x + 3$

Gọi $(d'): y = ax + b$ là đường thẳng đi qua điểm $M(3;-1)$ vuông góc với đường thẳng (d) tại H

$$(d) \perp (d') \Rightarrow a.\frac{3}{4} = -1 \Leftrightarrow a = \frac{-4}{3}$$

(d') đi qua điểm $M(3;-1) \Rightarrow 3a + b = -1 \Rightarrow b = -3a - 1 = 3$

Vậy $(d'): y = \frac{-4}{3}x + 3$

Điểm $H(x_H; y_H)$ là giao điểm của (d) và (d')

Vì (d) và (d') có cùng tung độ gốc là 3, nên giao điểm $H(0;3)$

b) Ta có điểm M_1 là điểm đối xứng với M qua đường thẳng (d) $\Rightarrow H$ là trung điểm của MM_1

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{x_M + x_{M_1}}{2} \\ y_H = \dfrac{y_M + y_{M_1}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 2x_H - x_M \\ y_H = 2y_H - y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = -3 \\ y_H = 7 \end{cases} \Rightarrow M_1(-3;7)$$

Bài 4: Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m-1)x + m - 2$ và $(d_2): y = (2m+1)x + 2m$. Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại A và cắt trục hoành sao cho tam giác tạo thành là tam giác vuông tại A.

HD:

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau và cắt trục hoành là:

$$\begin{cases} m-1\neq 0 \\ 2m+1\neq 0 \\ m-1\neq 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq \dfrac{-1}{2} \\ m\neq -2 \end{cases}$$

Để tam giác tạo thành vuông tại A $\Leftrightarrow$ hai đường thẳng vuông góc tại A (tại giao điểm của hai đường thẳng) $\Leftrightarrow (m-1)(2m+1)=-1 \Leftrightarrow 2m^2-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.(tm)$

Vậy $m\in\{0;2\}$ là giá trị cần tìm.

Dạng 15: Tính dện tích (chu vi) tam giác, diện tích tứ giác trong hệ tọa độ Oxy

Phương pháp giải:

- Xác định tọa độ các đỉnh của hình trong hệ tọa độ Oxy
- Vẽ tam giác và tứ giác đó trong hệ tọa độ Oxy
- Từ hình vẽ trong hệ tọa độ xác định độ dài cạnh, đường cao

+ $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}$.(cạnh đáy).(đường cao)

+ $S_{\square}=x^2$ với x là độ dài cạnh hình vuông

+ $S_{hinh.thoi}$ = tích độ dài hai đường chéo vuông góc

+ $S_{hinh.thang}$ = (đáy lớn + đáy bé) nhân (chiều cao) chia 2

Kiến thức bổ sung

Cho hai điểm $M(x_M;y_M)$ và $N(x_N;y_N)$ trong hệ tọa độ Oxy

$\Rightarrow$độ dài $MN=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}$

Bài 1:Cho hàm số $y=\dfrac{-1}{2}x+2.$ Gọi A, B theo thứ tự các giao điểm của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

HD:

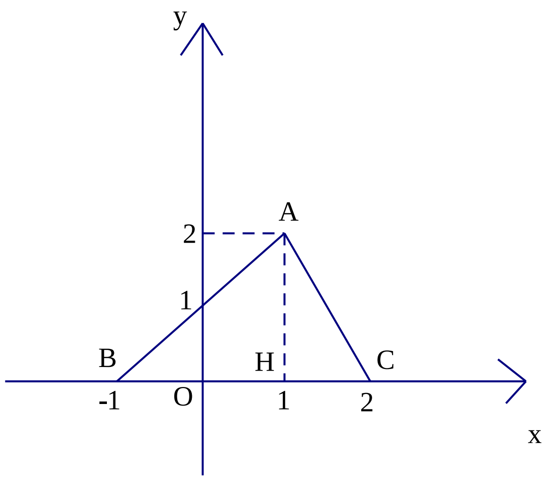
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{-1}{2}x+2$ cắt Ox tại điểm $A(4;0)$, cắt Oy tại điểm $B(0;2)$

ΔAOB vuông tại O, có $OA=|x_A|=4; OB=|y_B|=2\Rightarrow S_{AOB}=\dfrac{1}{2}.AO.BO=\dfrac{1}{2}.4.1=4$ (đvdt)

Bài 2:Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ tam giác ABC biết $A(1;2), B(-1;0), C(2;0)$

a) Tính diện tích tma giác ABC

b) Tính chu vi tam giác ABC



HD:

a) Gọi H là hình chiếu của điểm A lên trục hoành $\Rightarrow H(1;0)$

Ta có $BC = OB + OC = |x_B| + |x_C| = 1 + 2 = 3$ (đvđd)

$AH = |y_A| = 2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.2.3 = 3$ (đvdt)

b) Ta có $BH = OB + BH = |x_B| + |x_H| = 1 + 1 = 2$

$HC = |x_C - x_B| = |2 - 1| = 1$

ΔAHB vuông tại H $\Rightarrow AB^2 = AH^2 + HB^2 = 4 + 4 = 8$

$\Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$ (đvđd)

ΔAHC vuông tại H $\Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow AC = \sqrt{5}$ (đvđd)

Chu vi ΔABC là: $AB + BC + CA = 2\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3$ (đvđd)

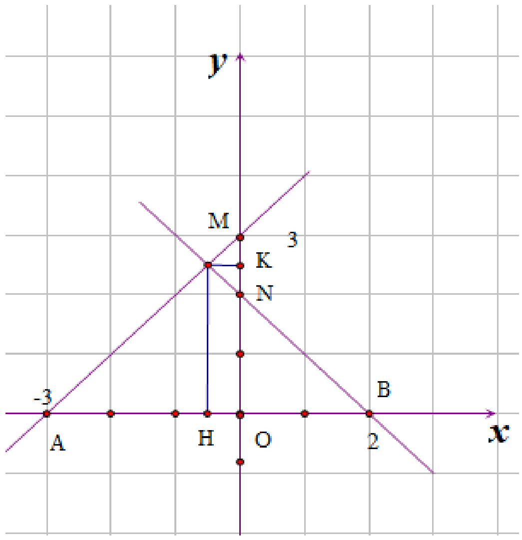
Bài 3: Cho hai đường thẳng $d: y = x + 3$ và $d': y = -x + 2$

(d) cắt ox tại A, (d') cắt ox tại B, (d) và (d')cắt nhau tại C

a) Xác định tọa độ A, B, C

b) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông

c) Tính diện tích tam giác vuông ABC.



HD:

a)

d cắt Ox tại A (-3; 0) d’ cắt Ox tại B (2; 0)

d cắt Oy tại M (0; 3) d’ cắt Oy tại N (0; 2)

Tọa độ của điểm C phải thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} y = x+3 \\ y = -x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

b) Ta có:

$$\tan MAO = \frac{OM}{OA} = 1, \cot NBO = \frac{OB}{ON} = 1 \Rightarrow MAO + NAO = 90^0 \Rightarrow$$

$ACB = 90^0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Chú ý: có thể sử dụng đồng dạng.

c) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BC$

Gọi H và K là hình chiếu của C trên Ox và Oy $\Rightarrow H\left(\dfrac{-1}{2};0\right); K\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$

$$CH \perp Ox; CK \perp Oy \Rightarrow CH = OK = \frac{5}{2}; AB = OA + OB = 3 + 2 = 5(cm)$$

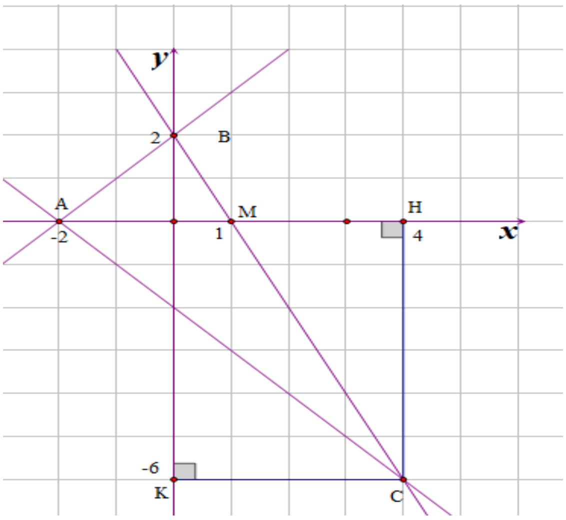
$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}CH.AB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{2}.5 = \dfrac{25}{4}$ (đơn vị diện tích).

Bài 4:Cho ba đường thẳng $d_1: y = x+2, d_2: y = -x-2$ và $d_3: y = -2x+2$

a) d_1 cắt d_2 tại A ; d_1 cắt d_3 tại B ; d_2 cắt d_3 tại C. Tìm tọa độ A, B, C

b) Tính diện tích tam giác ABC.

HD:



a)Ta có $1 \neq -1 \Rightarrow$ d_1 cắt d_2 tại A có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = -x-2 \end{cases} \Rightarrow A(-2;0)$$

Tương tự: B (0; 2) và C (4 ; -6)

b) Gọi H và K là hình chiếu của C trên Ox và Oy

$$\Rightarrow H(4;0); K(0;-6)$$

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{AMC} = \frac{1}{2}AM.BO + \frac{1}{2}AM.CH$$

$$= \frac{1}{2}AM.(BO+CH) = \frac{1}{2}.3.(2+6) = 12$$

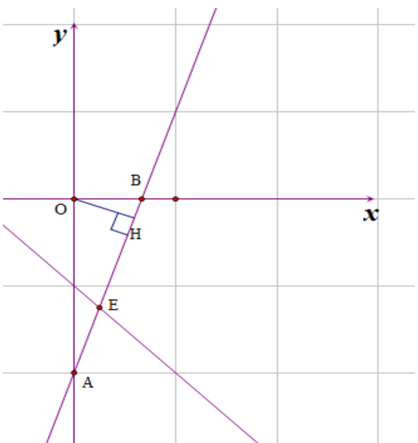
Hoặc: $S_{ABC} = S_{ABN} + S_{CBN}$

Bài 5: Cho hai đường thẳng $d_1: y = 3x-2$ và $d_2: y = -x-1$

a) Vẽ hai đường thẳng trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Gọi E là giao điểm của d_1 và d_2. Tìm tọa độ E

c) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d_1 với Ox và Oy. Tính S_{AOB} và khoảng cách từ O đến d_1.



HD:

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là:

$$3x-2=-x-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\frac{-5}{4}$$

c) Ta có d_1 cắt Ox tại $B\left(\frac{2}{3};0\right) \Rightarrow OB=\frac{2}{3}$ (đơn vị độ dài)

d_2 cắt Oy tại $A(0;-2) \Rightarrow OA=2$ (đơn vị độ dài)

$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{2}{3}$ (đơn vị diện tích).

Xét tam giác AOB, có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$

$\Rightarrow OH^2=\frac{2}{5} \Rightarrow OH=\frac{\sqrt{10}}{5}$ (đơn vị độ dài).

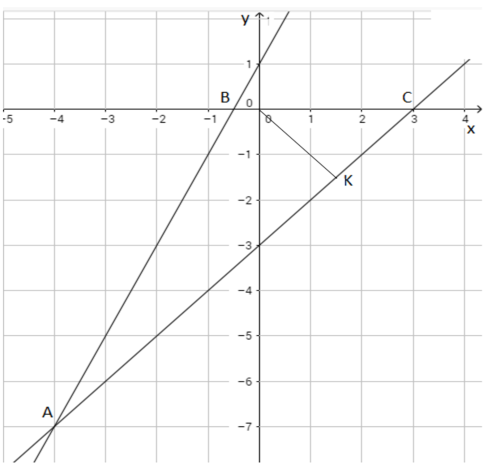
Bài 6: Cho các đường thẳng $d: y=2x+1, d': y=x-3$

a) Vẽ đồ thị hai hàm số trên và tìm tọa độ giao điểm B, C của hai đồ thị hàm số trên với trục hoành

b) Tìm tọa độ giao điểm A của d và d’

c) Tính chu vi, diện tích và các góc của tam giác ABC (làm tròn đến độ)

d) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d.



HD:

a) Vẽ đồ thị hai hàm số $d: y = 2x+1, d': y = x-3$

d cắt Ox tại $B\left(\frac{-1}{2};0\right)$, d' cắt Ox tại $C(3;0)$, d cắt d' tại A

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và d' là :

$$2x+1 = x-3 \Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow A(-4;-7)$$

c) Gọi α là góc tạo bởi (d) và Ox, α' là góc tạo bởi (d') và Ox. Ta có:

$$tan.\alpha = 2 \to \alpha \approx 63^0; tan.\alpha' = 1 \to \alpha' \approx 45^0$$

$$\Delta ABC: ACB = \alpha' = 45^0; ABC = 180^0 - \alpha \approx 117^0$$

$$\Rightarrow BAC \approx 18^0$$

$$A(-4;-7); B(\frac{-1}{2};0); C(3;0) \Rightarrow AB = \frac{7\sqrt{5}}{2}; BC = \frac{7}{2}; CA = 7\sqrt{2}$$

Chu vi $\Delta ABC \approx 21{,}226$ (đơn vị độ dài)

Diện tích $\Delta ABC = 12{,}25$ (đơn vị diện tích)

d) Gọi khoảng cách từ gốc tọa độ O tới d là OH, tới d' là OK

Ta có: $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(-3)^2} \Rightarrow OK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Tương tự $OH = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

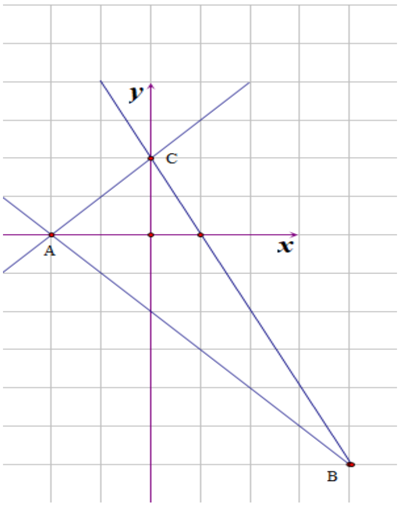
Bài 8: Cho ba hàm số $y = x+2$ có đồ thị là d_1 ; $y = -x-2$ có đồ thị là d_2 ; $y = -2x+2$ có đồ thị là d_3

a. Vẽ đồ thị ba hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ

b. Cho d_1 cắt d_2 tại A, d_2 cắt d_3 tại B, d_3 cắt d_1 tại C. Tìm tọa độ A, B , C

c. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA từ đó suy ra chu vi tam giác ABC

d. Nhận xét dạng tam giác ABC và tính S_{ABC}



HD :

b) Ta có $A(-2;0);B(-4;6);C(0;2)$

c) Tính được $AB=6\sqrt{2};AC=2\sqrt{2};BC=4\sqrt{5}$

Chu vi $\Delta ABC=2\sqrt{2}+4\sqrt{5}+6\sqrt{2}$ (đơn vị d dộ dài)

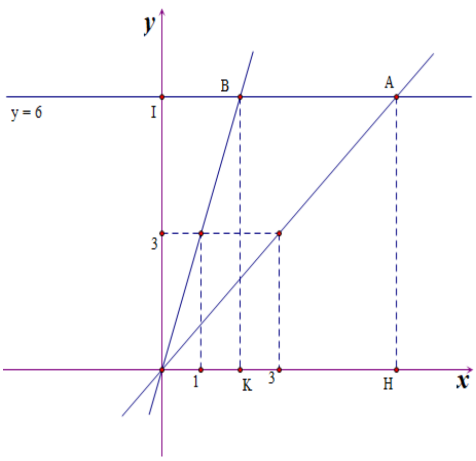
$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=12$

d) $d_1:y=x+2\Rightarrow a_1=1,d_2:y=-x-2\Rightarrow a_2=-1$

Vậy ta có $a_1.a_2=-1\Rightarrow d_1\perp d_2\Rightarrow A=90^0$

Bài 9:Cho hai hàm số $(d_1):y=x$ và $(d_2):y=3x$. Đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 6, cắt các đường thẳng $y=x$ và $y=3x$ lần lượt ở A và B. Tìm tọa độ điểm A, B. Tính chu vi, diện tích tam giác OAB.

HD:



Theo bài cho ta có đường thẳng $y=6$ cắt đường thẳng $y=x$ tại điểm $A(6;6)$ và cắt đường thẳng $y=3x$ tại điểm $B(2;6)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên trục hoành

Đường thẳng $y=6$ cắt trục Oy tại điểm $I(0;6)$, ta có: $OI=6$ (đvđd);

$AB=HK=|x_H-x_K|=4$ (đvđd);

$OK=2$ (đvđd); $OH=6$ (đvđd); $BK=AH=OI=6$ (đvđd)

$S_{AOB}=\frac{1}{2}OI.AB=\frac{1}{2}.6.4=12$ (đvdt)

ΔOKB vuông tại K, có: $OB^2=OK^2+BK^2\,(Pytago)$

$\Rightarrow OB^2=2^2+6^2=40\Rightarrow OB=2\sqrt{10}$ (đvđd)

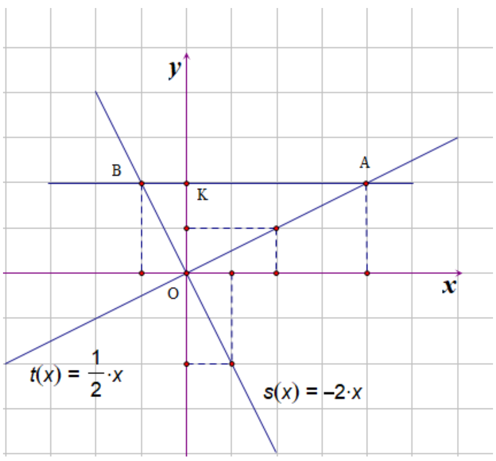
ΔOHA vuông tại H, có:

$OA^2=OH^2+AH^2\,(Pytago)\Rightarrow OA^2=6^2+6^2\Rightarrow OA=6\sqrt{2}$ (

Chu vi tam giác AOB bằng:

$OA+OB+AB=6\sqrt{2}+2\sqrt{1+4}$ (đvđd).

Bài 10:Cho hai hàm số $y=-2x$ và $y=\frac{1}{2}x$. Qua điểm $(0;2)$ vẽ đường thẳng song song với trục Ox cắt đường thẳng $y=\frac{1}{2}x$ và $y=-2x$ lần lượt ở A và B. Chứng minh tam giác AOB vuông và tính diện tích của tam giác đó.



HD:

Đường thẳng đi qua điểm $(0;2)$ và song song với trục Ox là đường thẳng $y=2$,

Đường thẳng này cắt đường thẳng $y=\frac{1}{2}x$ tại điểm $A(4;2)$

Và cắt đường thẳng $y=-2x$ tại điểm $B(-1;2)$

Đường thẳng $y=-2x$ và $y=\frac{1}{2}x$ có tích hệ số góc là $(-2).\frac{1}{2}=-1\Rightarrow$

Suy ra hai đường thẳng vuông góc với nhau tại $O(0;0)\Rightarrow OB\perp OA\Rightarrow\Delta AOB$ vuông tại O.

Gọi AB vuông góc với trục Oy tại K, ta có: $OK=2$ (đvđd); $AB=|x_B-x_A|=5$ (đvđd);

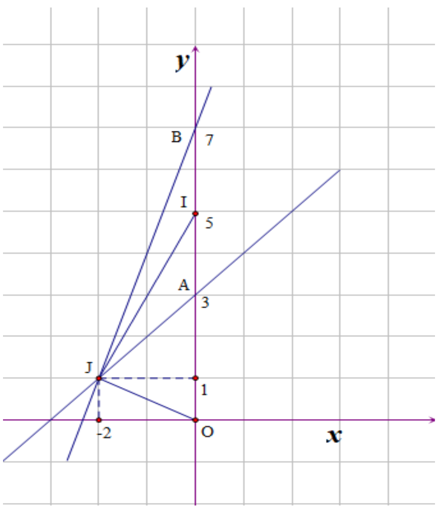
$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OK.AB=\frac{1}{2}.2.5=5 \text{ (đvđd).}$$

Bài 11:Cho hai đường thẳng $(d_1): y=x+3$ và $(d_2): y=3x+7$

a) Vẽ đồ thị các hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) và (d_2) với trục Oy lần lượt là A và B. Tìm tọa độ trung điểm I của AB

c) Gọi J là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2). Chứng minh ΔOIJ vuông. Tính diện tích tam giác đó.



HD:

a) Đường thẳng (d_1) cắt trục hoành tại điểm $C(-3;0)$, cắt trục tung tại điểm $A(0;3)$

Đường thẳng (d_2) cắt trục hoành tại điểm $C(-2;1)$, cắt trục tung tại điểm $B(0;7)$

b) Ta có $A(0;3)$ và $B(0;7)$, nên trung điểm của AB là: $I(0;5)$

c) Thay điểm $C(-2;1)$ vào (d_1) thấy thỏa mãn, nên (d_1) cắt (d_2) tại $J(-2;1)$

Kẻ $JK \perp Oy = K \Rightarrow K(0;1); OI = |y_I| = 5$ (đvđd); $OK = |y_K| = 1$ (đvđd)

$IK = |y_K - y_I| = 4$ (đvđd); $JK = |x_J| = 2$ (đvđd)

ΔIKJ vuông tại K, nên $IJ^2 = IK^2 + KJ^2 = 4^2 + 2^2 = 20(Pytago)$

ΔOKJ vuông tại K, nên $OJ^2 = OK^2 + KJ^2 = 5(Pytago)$

Vì $OI^2 = 25 = IJ^2 + OJ^2 \Rightarrow \Delta OIJ$ vuông tại J (Pytago đảo)

$S_{OIJ} = \dfrac{1}{2}.JK.OI = \dfrac{1}{2}.2.5 = 5$ (đvdt).

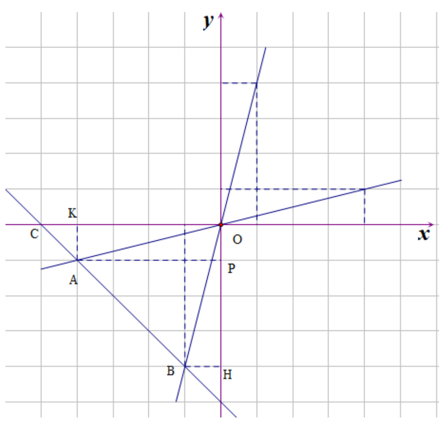
Bài 12:Cho các hàm số $(d_1): y = -x - 5$; $(d_2): y = \dfrac{1}{4}x$ và $(d_3): y = 4x$

a) Vẽ đồ thị các hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) và (d_3) với trục Oy lần lượt là A và B. Tìm tọa độ các giao điểm A, B

c) ΔAOB là tam giác gì, vì sao

d) Tính diện tích tam giác AOB.



HD:

a) Lập bảng giá trị

Ta có (d_1) là đường thẳng cắt trục Ox tại điểm $C(-5;0)$, cắt trục Oy tại điểm $D(0;-5)$

Ta có (d_2) là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $(4;1)$

Ta có (d_3) là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $(1;4)$

c) Ta có (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm $A(x_A;y_B)$, nên

$$\begin{cases} y_A = -x_A - 5 \\ y_A = \dfrac{1}{4}x_A \end{cases} \Rightarrow -x_A - 5 = \frac{1}{4}x_A \Leftrightarrow x_A = -4$$

$$\Rightarrow y_A = -1 \Rightarrow A(-4;-1)$$

(d_1) và (d_3) cắt nhau tại điểm $A(x_B;y_B)$, nên $\begin{cases} y_B = -x_B - 5 \\ y_B = 4x_B \end{cases} \Rightarrow -x_B - 5 = 4x_B \Leftrightarrow x_A = -1$

$$\Rightarrow y_B = -4 \Rightarrow B(-1;-4)$$

c) Từ A kẻ $AK \perp Ox = K, AP \perp Oy = P; BH \perp Ox = H$

Ta có $K(-4;0); P(0;1); H(0;-4); AK = |y_A| = 1$ (đvđd);

$AP = |x_A| = 4$ (đvđd); $BH = |x_B| = 1$ (đvđd)

$OK = |x_K| = 4$ (đvđd); $OH = |y_H| = 4$ (đvđd); $OD = |y_A| = 5$ (đvđd)

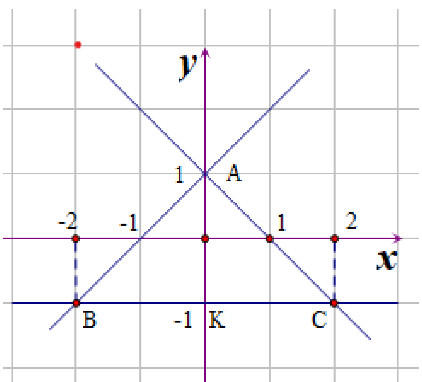
ΔAKO vuông tại K, nên: $OA^2 = OK^2 + AK^2 = 16 + 1 = 17 (Pytago) \Rightarrow OA = \sqrt{17}$ (đvđd)

ΔBHO vuông tại H, nên: $OB^2 = OH^2 + BH^2 = 16 + 1 = 17 (Pytago) \Rightarrow OB = \sqrt{17}$ (đvđd)

Do đó $OA = OB = \sqrt{17}$ (đvđd) $\Rightarrow \Delta AOB$ cân tại O

$$S_{AOB} = S_{AOD} - S_{BOD} = \frac{1}{2}AP.OD - \frac{1}{2}BH.OD = \frac{1}{2}.4.5 - \frac{1}{2}.1.5 = \frac{15}{2} \text{ (đvdt).}$$

Bài 13:Cho các hàm số $(d_1): y = -x + 1$; $(d_2): y = x + 1$ và $(d_3): y = -1$. Gọi giao điểm của hai đường thẳng $(d_1);(d_2)$ là A, giao điểm của đường thẳng $(d_3): y = -1$ với hai đường thẳng trên là B, C. Chứng tỏ rằng tam giác ABC cân, tính chu vi và diện tích tam giác đó.



HD:

(d_3) cắt (d_1) tại điểm $C(2;-1)$, cắt (d_2) tại điểm $B(-2;-1)$; (d_3) cắt trục Oy tại điểm $K(0;-1)$

Ta có $BK = |x_B| = 2$ (đvđd); $CK = |x_C| = 2$ (đvđd) $\Rightarrow BK = CK$

Mà $AK \perp BC = K \Rightarrow AK$ là đường trung trực của BC $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

Ta có $AK = AO + OK = |y_A| + |y_B| = 1 + 1 = 2$ (đvđd); $BC = BK + KC = 4$(đvđd)

ΔAKB vuông tại K, nên:

$$AB^2 = AK^2 + KB^2\,(Pytago) \Rightarrow AB^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow AB = AC = 2\sqrt{2} \text{ (đvđd)}$$

Chu vi tam giác ABC là: $AB + BC + CA = 4 + 4\sqrt{2}$ (đvđd)

Bài 14:Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm $A(2;2)$. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, C đối xứng với A qua trục Oy, D đối xứng với A qua gốc tọa độ

a) Chứng minh tứ giác ABDC là hình vuông tâm O

b) Tính chu vi và diện tích hình vuông ABCD

HD:

a) Ta có B đối xứng với A qua Ox, nên $B(2;-2)$ và có $AB \perp Ox$. C đối xứng với A qua Oy, nên $C(-2;2)$ và có $AC \perp Oy$. mà $Ox \perp Oy \Rightarrow AC \perp AB \Leftrightarrow BAC = 90^0$

Ta có D đối xứng với A qua gốc tọa độ, nên $D(-2;-2)$

Từ tọa độ các điểm trên hệ tọa độ ta có:

$$AC = AB = CD = DB = 4 \text{ (đvđd)},\ OA = OB = OC = OD \text{(đvđd)}.$$

Vậy tứ giác ABDC là hình vuông và điểm O là tâm của hình vuông đó

b) Chu vi hình vuông là: $AC + AB + CD + DB = 16$(đvđd).

Diện tích hình vuông là: $4^2 = 16$ (đvdt).

Dạng 16: Tìm m để đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B sao cho ΔAOB thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải:

- Xác định giao điểm của (d) với các trục tọa độ theo tham số m
- Nếu bài toán cho diện tích OAB:

Dùng công thức tính diện tích $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OA.OB$ để tìm m

- Nếu cho tam giác OAB cân (vuông cân): Ta dùng công thức $OA=OB$ để tìm m

Bài 1:Cho hàm số $y=2x+m-1$ có đồ thị là đường thẳng (d). Gọi A, B lần lượt là tọa độ giao điểm của (d) với trục hoành và trục tung. Tìm m để tam giác AOB có diện tích bằng 9

HD:

Ta có (d) cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{1-m}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại điểm $B(0;m-1)$

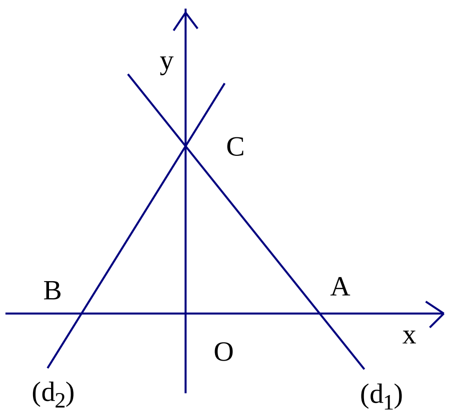
ΔAOB vuông tại O có: $OA=|x_A|=\frac{|1-m|}{2};OB=|y_B|=|m-1|$

Ta có $S_{AOB}=9\Leftrightarrow\frac{1}{2}OA.OB=9\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\frac{|1-m|}{2}.|m-1|=9\Leftrightarrow(m-1)^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=7\\m=-5\end{array}\right.$

Bài 2:Cho hai đường thẳng $(d_1):y=(m+1)x+2$ và $(d_2):y=(m-1)x+2$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của $(d_1),(d_2)$ với trục hoành

a) Tìm tọa độ giao điểm C của $(d_1),(d_2)$

b) Tìm m để ΔABC có diện tích bằng 6



HD:

a) Ta có $(d_1),(d_2)$ cắt nhau tại $C(0;2)$ trên trục tung

b) Ta có (d_1) cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{-2}{m+1};0\right),(d_2)$ cắt trục hoành tại điểm $B\left(\frac{-2}{m-1};0\right)$ (điều kiện $m\neq\pm1$)

ΔABC có $AB=|x_A-x_B|=\frac{4}{|m^2-1|}$, đường cao $CO=|y_C|=2$

$$S_{ABC}=6\Leftrightarrow\frac{1}{2}CO.AB=6\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2.\frac{4}{|m^2-1|}=6\Leftrightarrow|m^2-1|=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}\\m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{3};m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 3:Cho hàm số $y=(m^2-2m+2)x+3(d)$. Tìm m để đường thẳng (d) tạo vưới hai trục họa độ một tam giác có diện tích lớn nhất

HD:

Nhận xét: Ta có $m^2-2m+2=(m-1)^2+1\neq0,\forall m\Rightarrow(d)$ cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B với mọi m

(d) cắt trục hoành tại $A\left(\frac{3}{(m-1)^2+1};0\right)$, cắt trục tung tại $B(0;3)$

(d) tạo với hia trục tọa độ một tam giác AOB vuông tại O, với:

$$OA=|x_A|=\frac{3}{(m-1)^2+1};OB=|y_B|=3$$

Ta có $S_{AOB}=\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{3}{(m-1)^2+1}=\frac{9}{2\left[(m-1)^2+1\right]}$ (đvdt)

Vì $(m-1)^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow (m-1)^2+1 \geq 1, \forall m$

Do đó $S_{AOB}=\dfrac{9}{2\left[(m-1)^2+1\right]} \leq \dfrac{9}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (m-1)^2=0 \Leftrightarrow m=1$

Vậy S_{AOB} max $=\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow m=1$

Dạng 17: Tìm m để tam giác tạo bởi hai đường thẳng và trục tọa độ thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải:

Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác theo m (tọa độ giao điểm của hai đường thẳng, và tọa độ giao điểm của mỗi đường thẳng với trục tọa độ)

Nếu bài toán cho biết diện tích ΔAOB: Dùng công thức tính diện tích để tìm m

Nếu cho ΔAOB cân, vuông, đều: Ta dùng công thức khoảng cách AB, OB, OA rồi sử dụng tính chất tam giác cân, vuông, đều để tìm m.

Bài 1:Cho hai đường thẳng $(d_1): y=2x-1$ và $(d_2): y=(m-1)x+1$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng, của (d_1) với Oy, của (d_2) với Oy

a) Tìm m để tam giác ABC cân tại A

b) Tìm m để tam giác ABC vuông tại A

c) Tìm m để tam giác ABC có diện tích bằng 7

HD:

(d_1) cắt trục Oy tại điểm $B(0;-1)$, (d_2) cắt trục Oy tại điểm $C(0;1)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là:

$$2x-1=(m-1)x+1 \Leftrightarrow (m-3)x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{-2}{m-3}(m \neq 3) \Rightarrow y=\frac{-m-1}{m-3}$$

Do đó, có điểm $A\left(\dfrac{-2}{m-3};\dfrac{-m-1}{m-3}\right)$

a) Nhận thấy Ox là đường trung trực của BC, nên ΔABC cân tại A $\Leftrightarrow AB=AC$

$$\Leftrightarrow A\left(\frac{-2}{m-3};\frac{-m-1}{m-3}\right) \in \text{ trục Ox} \Leftrightarrow \frac{-m-1}{m-3}=0 \Leftrightarrow m=-1$$

b) Để ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow (d_1)\perp(d_2)\Leftrightarrow(m-1).(-2)=-1\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

c) Kẻ $AH \perp Oy = H$

Ta có $AH=|x_A|=\left|\frac{-2}{m-3}\right|=\frac{2}{|m-3|}; BC=OB+OC=|y_B|+|y_C|=2$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}.\frac{2}{|m-3|}.2=\frac{2}{|m-3|}=7\Leftrightarrow|m-3|=\frac{2}{7}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{23}{7}\\ m=\frac{19}{7}\end{array}\right.$$

Bài 2:Cho đường thẳng $(d): y=mx+2+3m$ cắt Oy tại B và cắt Ox tại C. Khi (d) tạo với Ox một góc nhọn, tìm m để (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

HD:

Điều kiện để (d) cắt Oy tại B cắt Ox tại C và (d) tạo với Ox một góc nhọn

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ 2+3m\neq 0\Leftrightarrow m>0\\ m>0\end{cases}$$

(d) cắt Oy tại $B(0;2+3m)$, cắt ox tại $C\left(\frac{-2-3m}{m};0\right)$. Vì $m>0$, nên:

$$OB=|2+3m|=2+3m; OC=\left|\frac{-2-3m}{m}\right|=\frac{2+3m}{m}$$

ΔOBC vuông tại O, nên: $S_{OBC}=\frac{1}{2}.OB.OC=\frac{1}{2}(2+3m).\left(\frac{2+3m}{m}\right)=\frac{1}{2}\left(9m+\frac{4}{m}+12\right)$

Với $m>0$, áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương: $9m$ và $\frac{4}{m}$ ta được:

$$9m+\frac{4}{m}\geq 2\sqrt{9m.\frac{2}{m}}=12\Rightarrow S_{OBC}\geq 12\Rightarrow S_{OBC}\ \min=12\Leftrightarrow \text{ dấu “=” } 9m=\frac{4}{m}\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}$$

Vậy $m=\frac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

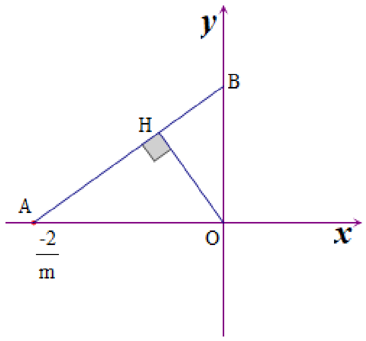
Bài 3: Cho $(d): y=mx+2\,(m\neq 0)$. d cắt Ox tại A, cắt Oy tại B. Tìm m sao cho:

a. ΔAOB vuông cân tại O

b. $S_{AOB}=4$

c. Khoảng cách từ O tới d bằng $\sqrt{2}$

HD:



a) Cho $x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow d$ cắt Oy tại $B(0;2)$

Cho $y=0 \Rightarrow x=\frac{-2}{m} \Rightarrow$ d cắt Ox tại $A\left(\frac{-2}{m};0\right)$

$$OA=\left|\frac{-2}{m}\right|=\frac{2}{|m|};OB=2$$

Tam giác AOB vuông cân tại O $\Leftrightarrow OA=OB \Leftrightarrow \frac{2}{|m|}=2 \Leftrightarrow m=\pm 1$

b) $S_{AOB}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB=4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{2}{|m|}.2=4 \Leftrightarrow |m|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ m=\frac{-1}{2} \end{array}\right.$

c) Hạ OH vuông góc với d. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2};OH=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{4}{m^2}}+\frac{1}{4}=\frac{m^2}{4}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2=1 \Leftrightarrow m=\pm 1.$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:Cho hai đường thẳng $d_1: y = 2x - 3$ và $d_2: y = -3x + 7$

a. Vẽ d_1, d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ

b. Tìm tọa độ giao điểm của d_1, d_2

HD:

b) Từ hình vẽ ta thấy $d_1 \cap d_2 = I\left(2;1\right)$

Thay tọa độ điểm I vào d_1, d_2 thấy thỏa mãn

Bài 2:Cho hai đường thẳng $d: y = -3x + 1; d': y = -x - 2$. Tìm tọa độ giao điểm của d, d'

HD:

Xét phuwong trình hoành độ giao điểm của

$$d, d' \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \Rightarrow y = \frac{-7}{2} \Rightarrow d \cap d' = I\left(\frac{-3}{2}; \frac{-7}{2}\right)$$

Bài 3:Các đường thẳng sau đây có đồng quy không?

a) $d_1: y = 3x + 1; d_2: y = -x; d_3: y = x + \frac{1}{2}$

b) $d_1: x + y - 1 = 0; d_2: y = 3x + 5; d_3: x - \frac{1}{3}y + \frac{5}{3} = 0$

HD:

a) Đồng quy tại điểm $\left(\frac{-1}{4}; \frac{1}{4}\right)$

b) Không đồng quy vì $d_2 \equiv d_3$

Bài 4:Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy

a) $d_1: y=\frac{4}{3}x+1; d_2: y=x-1; d_3: y=mx+m+3$

b) $d_1: y=x-m+1; d_2: y=2x; d_3: y=2(2m-1)x+\frac{1}{4}$

HD:

a) Tìm được $d_1 \cap d_2 = I(-6;-7)$

Thay tọa độ điểm I vào $d_3 \Rightarrow m=2$

b) Tìm được $d_1 \cap d_2 = I(1-m;2-2m)$

Thay tọa độ điểm I vào

$$d_3 \Rightarrow 16m^2-32m+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{3}{4} \\ m=\frac{5}{4}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 \equiv d_3: y=x+\frac{1}{4} \Rightarrow loai \\ d_1: y=x-\frac{1}{4}, d_2: y=2x, d_3: y=3x+\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

Đôi một phân biệt nên thỏa mãn

Vậy điềm kiện là: $m=\frac{5}{4}$

Bài 5:Cho đường thẳng $d: y=-4x+3$

a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho

b) Tìm tọa độ giao điểm A, B của d với lần lượt với hai trục tọa độ Ox, Oy

c) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến d

d) Tính khoảng cách từ $I(-1;-2)$ đến d

e) Tính diện tích tam giác OAB

HD:

b) Tìm được $A\left(\frac{3}{4};0\right); B(0;3)$

c) Tìm được $OA=\frac{3}{4}; OB=3 \Rightarrow d(O;d)=OH=\frac{3\sqrt{17}}{17}$

d) Qua I, kẻ các đường thẳng lần lượt song song với Õ, Oy cắt d lần lượt tại

$M\left(\frac{5}{4};-2\right);N\left(-1;7\right)$

Tính được $IM=\frac{9}{4};IN=9\Rightarrow d\left(I;d\right)=\frac{9\sqrt{17}}{17}$

e) Tìm được: $S_{AOB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{9}{8}$

Bài 6:Cho đường thẳng: $d:y=\left(m+2\right)x+m$ (với m là tham số)

a) Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m

b) Tìm m để d cắt Ox, Oy tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}$

HD:

a) Tìm được $I\left(-1;-2\right)$ là điểm cố định của d

b) Giao điểm của d với hai trục Ox, Oy lần lượt là: $A\left(\frac{-m}{m+2};0\right);B\left(0;m\right)\Rightarrow S_{AOB}=\frac{1}{2}\frac{m^2}{\left|m+2\right|}$

Từ $S=\frac{1}{2}\Rightarrow m=2;m=-1$

Bài 7:Cho đường thẳng: $d:\left(2m-5\right)x+y-1+m=0$. Tìm m sao cho khoảng cách từ O đến d là:

a) Nhỏ nhất

b) Lớn nhất

HD:

a) $m=1$

b) $OH_{max}=\frac{\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow m=\frac{8}{3}$