

BÀI 8: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Bước 1: Rút gọn trực tiếp các cụm (nếu có)

Bước 2: Tách mẫu để xác định mẫu chung, quy đồng (nếu có)

Bước 3: Xác định mẫu chung để quy đồng.

Lưu ý:

$$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 \quad \text{vơi } x \geq 0 \quad ; \quad x\sqrt{x} = \sqrt{x^3} = (\sqrt{x})^3 \quad \text{vơi } x \geq 0$$

$$a.x^2 + b.x + c = 0 \quad \text{Nếu } x = x_1 \text{ và } x = x_2 \text{ là nghiệm pt, ta viết: } a.(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

Cho $x \geq 0, y \geq 0$. Ta có các công thức biến đổi sau:

1. $x = (\sqrt{x})^2$; $x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$
2. $x \pm \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} \pm 1)$
3. $x\sqrt{y} \pm y\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})$
4. $x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$
5. $x \pm 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$
6. $x\sqrt{x} \pm y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 \pm (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})(x \mp \sqrt{xy} + y)$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định mẫu chung để quy đồng trực tiếp

Nhận dạng: Ở dạng toán này chúng ta nhìn thấy mẫu thức chung bằng cách nhân hai mẫu lại với nhau và tiến hành quy đồng trực tiếp

Bài 1: Rút gọn biểu thức:
$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{x-4}} \right) \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}$$

HD:

Nhận xét: Đối với bài toán này ta thực hiện rút gọn trong ngoặc tròn trước, ta thấy mẫu thức chung là: MTC: $(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})$. Vì vậy ta quy đồng mẫu trực tiếp.

$$Q = \frac{\sqrt{x}-4+\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x}-4}$$

Bài 2: Rút gọn biểu thức: $Q = (1 + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

HD: $Q = \left[\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-1} (0 < x \neq 1)$

Bài 3: Rút gọn biểu thức: $Q = (\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2})(1 - \frac{2}{\sqrt{x}})$ với $x > 0$ và x khác 4

HD: $Q = (\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2})(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}) = (\frac{\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)})(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}})$

$$= (\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)})(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}) = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$$

Bài 4: Rút gọn biểu thức: $P = (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1})(x\sqrt{x}+x)$ với $x > 0$

HD: Với $x > 0$ có $P = (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1})(x\sqrt{x}+x)$

$$= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot x(\sqrt{x}+1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot x \cdot (\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}$$

Bài 5: Rút gọn biểu thức $A = (\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - 3) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

HD: Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ ta có:

$$A = (\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - 3) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$
$$= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1) - 3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$
$$= \frac{3x+3\sqrt{x}-\sqrt{x}+1-3x+3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Bài 6: Rút gọn biểu thức $A = (\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2}) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

HD: Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x+2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} + \frac{2(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x+4} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x+4} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} \end{aligned}$$

Bài 7: Rút ngắn biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a-1}} - \frac{1}{\sqrt{a+1}} \right) : \frac{a+1}{a-1}$

HD: Rút gọn: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a-1}} - \frac{1}{\sqrt{a+1}} \right) : \frac{a+1}{a-1}$

ĐK: $a \geq 0; a \neq 1$

$$= \frac{\sqrt{a+1} - (\sqrt{a-1})}{(\sqrt{a-1})(\sqrt{a+1})} : \frac{a+1}{a-1} = \frac{2}{a-1} \cdot \frac{a-1}{a+1} = \frac{2}{a+1}$$

Bài 8: Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-4}} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{x-16}$ ($x > 0; x \neq 16$)

HD: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-4}} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{x-16} = \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{(\sqrt{x-4})(\sqrt{x+4})} \cdot \frac{(\sqrt{x-4})(\sqrt{x+4})}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 1$

Bài 9: $B = \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{4\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 1; x \neq 4$)

HD: Điều kiện: $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{4\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{x})(\sqrt{x-2}) - x}{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{4(\sqrt{x}-1)} = \frac{x-4-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{4(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{-4}{4(\sqrt{x}-1)} = -\frac{1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

Bài 10: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} - \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}$ (với $a \in R, a \geq 0$ và $a \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị biểu thức A tại $a=2$.

HD:

$$a) A = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2}{a-1} = \frac{a+2\sqrt{a}+1 - a+2\sqrt{a}-1}{a-1} = \frac{4\sqrt{a}}{a-1}$$

$$b) \text{ Với } a=2 \text{ thì } A = \frac{4\sqrt{2}}{2-1} = 4\sqrt{2}$$

Bài 11: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$ Với $a > 0; a \neq 1; a \neq 4$

a) Rút gọn P

b) So sánh giá trị của P với số $\frac{1}{3}$

HD:

a) Rút gọn

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right) \\ &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \left(\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{(a-1)-(a-4)} = \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}} \end{aligned}$$

b) So sánh giá trị của P với số $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu: } \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}} - \frac{1}{3} &= \frac{\sqrt{a}-2-\sqrt{a}}{3\sqrt{a}} = \frac{-2}{3\sqrt{a}} < 0 \\ \Leftrightarrow P &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Bài 12: Cho biểu thức: $P = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị P khi $x = \sqrt{17+12\sqrt{2}}$

HD:

a) Có:
$$P = \frac{(2+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x}-2)+(-x+\sqrt{x}+2)}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$$

$$x = \sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{9+2.3.2\sqrt{2}+8} = \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} = 3+2\sqrt{2} \Rightarrow x \geq 0, x \neq 1$$

b) Có:
$$\sqrt{x} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}.1+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow P = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{3+2\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2(1+\sqrt{2})} = 1$$

Bài 13: Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm a để $P > \frac{1}{6}$

HD:

a)
$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right) \begin{matrix} (a > 0 \\ a \neq 1; a \neq 4) \end{matrix}$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1) - (\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{a-1-a+4} = \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}$$

b) Vì $P > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6\sqrt{a}-12 > 3\sqrt{a} \Leftrightarrow 9\sqrt{a} > 12 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \frac{4}{3} \Leftrightarrow a > \frac{16}{9}$

Vậy $a > \frac{16}{9}$ và $a \neq 4$ thì $P > \frac{1}{6}$

Bài 14: Cho biểu thức:
$$B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} \quad (x > 0, x \neq 9)$$

Rút gọn biểu thức B và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B > \frac{1}{2}$

HD:

Điều kiện $x > 0, x \neq 9$

$$B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{3+\sqrt{x}-3+\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3-\sqrt{x}}$$

Ta có:

$$B > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{4-3+\sqrt{x}}{2(3-\sqrt{x})} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{2(3-\sqrt{x})} > 0 \Leftrightarrow 3-\sqrt{x} > 0 \text{ (do...}\sqrt{x}+1 > 0 \forall x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$$

Bài 15: Chứng minh đẳng thức $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-4}{4} = 1$ (với $x \geq 0; x \neq 4$).

HD: Với $x \geq 0; x \neq 4$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-4}{4} = \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{x-4}{4}$$

$$= \frac{4}{x-4} \cdot \frac{x-4}{4} = 1 \text{ (đpcm).}$$

Dạng 2: Tách mẫu để xác định mẫu chung và quy đồng

Nhận dạng: Ở dạng toán này ta nhìn thấy mẫu thức chung bằng cách tách một mẫu (sử dụng hằng đẳng thức hoặc đặt nhân tử chung) để xác định mẫu chung và quy đồng.

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{x}{x-2\sqrt{x}} \right) : \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1; x \neq 4$.

HD: Ta có: $P = \left[\frac{x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} - \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right] : \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} = \frac{x-\sqrt{x}+2-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

$$= \frac{2-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2(1-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = -\frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

Bài 2: Rút gọn biểu thức $P = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$, với $x > 0$.

HD:
$$P = \frac{x-2-\sqrt{x}+2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}+2} = \frac{x-4}{\sqrt{x}\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

Bài 3: Rút gọn biểu thức:
$$B = \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

HD: Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1} \\ &= \frac{4(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{-2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{4(\sqrt{x}-1)-2(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Bài 4: . Rút gọn biểu thức
$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-4} \text{ (với } x \geq 0; x \neq 4).$$

HD: Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-4} = \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2+4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4} \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}+1} = 4 \end{aligned}$$

Vậy $B = 4$, với $x \geq 0; x \neq 4$.

Bài 5: Rút gọn biểu thức:
$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1$$

HD:
$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - 2\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

Bài 6: Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x} + x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$ với $x > 0, x \neq 2$

HD: $P = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2x}(\sqrt{2} + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = 1$

Bài 7: Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$

HD:

$$= \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{(\sqrt{x})^3-1} - \frac{\sqrt{x}+x+1}{(\sqrt{x})^3-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+x+1 - (\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+x+1}$$
$$= \frac{2\sqrt{x}+x - \sqrt{x} - x - 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+x+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+x+1}{\sqrt{x}+x+1 - \sqrt{x} - 2} = \frac{2\sqrt{x}+x - \sqrt{x} - x - 1}{(\sqrt{x}-1)(x-1)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

Bài 8: Rút gọn biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-12}{6\sqrt{x}-36} + \frac{6}{x-6\sqrt{x}}$ ($x > 0$ và $x \neq 36$)

HD: Với $x > 0$ và x khác 36

$$B = \frac{\sqrt{x}-12}{6\sqrt{x}-36} + \frac{6}{x-6\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-12}{6(\sqrt{x}-6)} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)}$$
$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-12) + 6 \cdot 6}{6\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)} = \frac{x-12\sqrt{x}+36}{6\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)} = \frac{(\sqrt{x}-6)^2}{6\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)} = \frac{\sqrt{x}-6}{6\sqrt{x}}$$

Bài 9: Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{x+2\sqrt{x}} \right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0; x \neq 4$.

HD: $x > 0$ và x khác 4 có

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{2}{x+2\sqrt{x}} \right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})} - \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})} \right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Bài 10: Cho biểu thức $B = \left(\frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{1 - \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x-1}{2x + \sqrt{x} - 1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{4}$).

Tìm tất cả các giá trị của x để $B < 0$.

HD: Ta có $B = \left[\frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \right] \cdot \frac{x-1}{2x + \sqrt{x} - 1}$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 1} = \frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 1}$$

Vì $x \geq 0$ nên $2\sqrt{x} + 3 > 0$, do đó $B < 0$ khi $2\sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$.

Mà $x \geq 0; x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{4}$ nên ta được kết quả $0 \leq x < \frac{1}{4}$.

Bài 11: Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x+8}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 3}$

3) Tìm x để biểu thức P = A.B có giá trị là số nguyên

HD:

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{x-3\sqrt{x}+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+8(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}+8)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$$

1) P = A.B nên ta có:

$$P = \frac{7}{\sqrt{x+8}} \cdot \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} = \frac{7}{\sqrt{x+3}}$$

+) Ta có $x \geq 0$ nên $P > 0$

$$+) x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{7}{3}$$

$$\text{Nên : } 0 < P \leq \frac{7}{3}$$

Đề $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \{1; 2\}$

+) $P = 1 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn điều kiện)

+) $P = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{4}; 16 \right\}$$

Bài 12: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và x khác 1

a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$

HD: a) $P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Từ câu a ta có

$$2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \text{ và } x > 0 \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)(2\sqrt{x} - 1) = 0 \text{ và } x > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Bài 13: Cho hai biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 9$.

2) Rút gọn biểu thức Q.

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HD: Với $x = 9$ ta có $P = \frac{9+3}{3-2} = 12$

1) Với $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x}-2}{x-4}$

$$= \frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x+2\sqrt{x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$3) \frac{P}{Q} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{3} \text{ (Do bất đẳng thức Cosi).}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{P}{Q}$ là $2\sqrt{3}$

Bài 14: Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$.

2) Rút gọn biểu thức B.

$$3) \text{ Tìm } x \text{ để } \frac{A}{B} > \frac{3}{2}$$

HD:

$$1) \text{ Với } x = 64 \text{ ta có } A = \frac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2+8}{8} = \frac{5}{4}$$

$$2) B = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})+(2\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x}+2x}{x\sqrt{x}+x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

2) Với $x > 0$ ta có:

$$\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \text{ (Do } x > 0)$$

Bài 15: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$ và x khác 1.

1) Rút gọn biểu thức A.

3) Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A có giá trị là số nguyên.

HD:

1) Rút gọn biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$\Leftrightarrow A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \left(\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2-(x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x-1}$$

Vậy $A = \frac{2}{x-1}$

2) Với $x > 0$ và $x \neq 1$ ta có: $A = \frac{2}{x-1}$

Chỉ ra khi A có giá trị là số nguyên khi và chỉ khi $x - 1$ là ước của 2

Mà $U\{2\} = \{-2; -1; 1; 2\}$

TH1 : $x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$ (không thỏa mãn điều kiện)

TH2 : $x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$ (không thỏa mãn điều kiện)

TH3 : $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

TH4 : $x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = 2, x = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 16: Cho biểu thức A:

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq 4)$$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

HD:

1. Với $x > 0; x \neq 4$, biểu thức có nghĩa ta có:

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2(2\sqrt{x}+1)+3(\sqrt{x}-2)-(5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 4$ thì $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$

2. Ta có

$$\sqrt{x} > 0, \forall x > 0; x \neq 4$$

$$\Rightarrow A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}, \text{ kết hợp với } A \text{ nhận giá trị là một số nguyên thì } A \in \{1; 2\}$$

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} (TM)$$

$$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 (L)$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 17: $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right)$ với a và b là các số dương khác nhau.

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$.

b) Tính giá trị của A khi $a = 7 - 4\sqrt{3}$ và $b = 7 + 4\sqrt{3}$.

HD:

a) Ta có :

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right)$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})} \right) : \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \right]$$

$$A = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) + a}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})} : \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{ab}}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})} \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$$

b) Ta có :

$$A - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} - \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{b-a} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{b-a} = 0$$

Vậy $A - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a} = 0$

c) Ta có :

$$a = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 4 - 4\sqrt{3} + 3 \Rightarrow a = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 - \sqrt{3}$$

$$b = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow b = 4 + 4\sqrt{3} + 3 \Rightarrow b = (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{b} = 2 + \sqrt{3}$$

Thay $\sqrt{a} = 2 - \sqrt{3}$; $\sqrt{b} = 2 + \sqrt{3}$ vào biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ ta được :

$$A = \frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy với $a = 7 - 4\sqrt{3}$; $b = 7 + 4\sqrt{3}$ thì $A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 18: Cho biểu thức $B = \left(\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$ (với $a > 0$; $a \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức B .

b) Đặt $C = B \cdot (a - \sqrt{a} + 1)$. So sánh C và 1.

HD:

a) Với $a > 0$; $a \neq 1$, ta có:

$$B = \left[\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \right] \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}+4}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot c$$

Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

b) Với $a > 0$; $a \neq 1$, ta có:

$$C - 1 = \frac{a - \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a}} > 0.$$

Vậy $C > 1$.

Bài 19: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{5}$.

HD: Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1$

$$A = \frac{-(x + \sqrt{x} + 1) + x + 2 + \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{x\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{5}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{5}{\sqrt{x} - 1} = \frac{5}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$x + \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} \geq \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{5}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 4$$

A lớn nhất bằng 4 khi và chỉ khi $x = 0$.

Bài 20: Cho biểu thức $M = \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{y} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}}$

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M.

2) Tính giá trị của M, biết rằng $x = (1 - \sqrt{3})^2; y = 3 - \sqrt{8}$

HD:

a) ĐK: $x \geq 0; y \geq 0$

$$\begin{aligned} M &= \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{y} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \\ &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy})}{1 + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \end{aligned}$$

b) Với $x = (1 - \sqrt{3})^2; y = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$

$$M = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Dạng 3: Rút gọn trực tiếp các cụm

Nhận dạng: Ta nhìn thấy các cụm có thể đưa về HĐT hoặc đặt nhân tử chung để rút gọn trực tiếp mẫu ở cụm đó, để đưa bài toán về dạng dễ giải hơn.

Lưu ý ta sử dụng:

$$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 \quad \text{vơi } x \geq 0 \quad ; \quad x\sqrt{x} = \sqrt{x^3} = (\sqrt{x})^3 \quad \text{vơi } x \geq 0$$

$a.x^2 + b.x + c = 0$ Nếu $x = x_1$ và $x = x_2$ là nghiệm pt, ta viết: $a.(x - x_1).(x - x_2) = 0$

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $P = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right)$, với $a \geq 0; a \neq 1$

HD: Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có

$$P = \left[1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right] \left[1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{1 - \sqrt{a}}\right] = (1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a}) = 1 - (\sqrt{a})^2 = 1 - a$$

Bài 2: Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a}\right)^2$ (với $a \geq 0; a \neq 1$)

HD: Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có:

$$P = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a}\right)^2$$
$$= \left(\frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + \sqrt{a^2})}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})}\right)^2 = (1 + \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{a})^2} = 1$$

Bài 3: Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x} + x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$ với $x > 0, x \neq 2$

HD: $P = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2x}(\sqrt{2} + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = 1$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = x - y$; với $x > 0; y > 0$ và $x \neq y$

HD: $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$

Bài 5: $\left(\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\right) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})$ (với $x > 0; y > 0$)

HD: $\left(\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\right) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})$ (với $x > 0; y > 0$)

$$= \frac{x\sqrt{xy} - y\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = x - y$$

Bài 6: Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{a}{a - 2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a} - 2}\right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 4\sqrt{a} + 4}$ với $a > 0, a \neq 4$.

HD: $B = \left(\frac{a}{a - 2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a} - 2}\right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 4\sqrt{a} + 4}$ với $a > 0, a \neq 4$.

$$= \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$$

Bài 7: Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right)$ ($x > 0$)

HD: $B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right)$ ($x > 0$)

$$= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} : \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) = (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = 1$$

Bài 8: Rút gọn biểu thức $B = \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ với a, b là số dương.

HD: $B = \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}} + \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$B = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{a}$ với a, b là số dương.

Bài 9: Cho biểu thức $B = \left(\frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+3}{1-\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{4}$).

Tìm tất cả các giá trị của x để $B < 0$.

HD: Ta có $B = \left[\frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} \right] \cdot \frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-1}$$

Vì $x \geq 0$ nên $2\sqrt{x}+3 > 0$, do đó $B < 0$ khi $2\sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$.

Mà $x \geq 0; x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{4}$ nên ta được kết quả $0 \leq x < \frac{1}{4}$.

Bài 10: Cho biểu thức $M = \frac{x\sqrt{y}-\sqrt{y}-y\sqrt{y}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}$

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M.

2) Tính giá trị của M, biết rằng $x = (1 - \sqrt{3})^2; y = 3 - \sqrt{8}$

HD:

b) ĐK: $x \geq 0; y \geq 0$

$$M = \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{y} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}}$$

$$= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy})}{1 + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

c) Với $x = (1 - \sqrt{3})^2; y = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$

$$M = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Bài 11: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{2(x - 2\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$ (với $x > 0$ và $x \neq 1$)

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tìm các số nguyên x để biểu thức A có giá trị nguyên.

HD:

1) Rút gọn

$$A = \left[\frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \right] : \frac{2(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{2(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$1) A = \frac{\sqrt{x} - 1 + 2}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$$

Vì x nguyên nên ta có A nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1$ là ước của 2

Mặt khác $x > 0, x \neq 1$ nên $\sqrt{x} - 1 > -1$. Do đó:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 1 \\ \sqrt{x} - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases} (TM)$$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = 9$ thỏa mãn đề bài.

Bài 12: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - x} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$

1) Rút gọn A.

2) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

HD:

1) Với với $x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} : \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) = \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2) Với

$$\begin{aligned} x = 4 + 2\sqrt{3} &= (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1 \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{aligned}$$

Bài 13: a) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 1$)

b) Tính giá trị của B khi $x = 12 + 8\sqrt{2}$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a) } B &= \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq 1) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 \end{aligned}$$

b) Ta có: $x = 12 + 8\sqrt{2}$ thì

$$\begin{aligned} x = 12 + 8\sqrt{2} &= (2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2 = (2\sqrt{2} + 2)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{x} &= 2\sqrt{2} + 2 \Rightarrow B = \sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{2} + 2 - 1 = 2\sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 2: Rút gọn:

a) $A = \frac{x + 2\sqrt{3x} + 3}{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}$ (với $x \geq 0$)

b) $B = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ (với $x \geq 0, y \geq 0$ và $x \neq y$)

c) $C = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$)

d) $D = \frac{(\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(a - b)(a\sqrt{a} + a)}$ (với $a > 0, b \geq 0, a \neq b$)

e) $E = \frac{\sqrt{a} - 1}{a\sqrt{a} - a + \sqrt{a}} : \frac{1}{a^2 + \sqrt{a}}$ (với $a > 0$)

f) $F = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \frac{\sqrt{xy} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ (với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

g) $G = \frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x + y}{\sqrt{xy}}$ (với $xy \geq 0, x \neq y$)

h) $H = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b}$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$)

i) $I = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ (với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

j) $J = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right)$ (với $x > 0, x \neq 1$)

k) $K = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}} + \frac{2}{x - 1} \right)$ (với $x > 0, x \neq 1$)

l) $L = \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} - \frac{\sqrt{a} + 2}{a + 2\sqrt{a} + 1} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ (với $a > 0, a \neq 1$)

m) $M = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$)

n) $N = \left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \right)^2$ (với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

o) $O = \left(\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) : \left(\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right)^2$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$)

p) $P = \left(\frac{2x + 1}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} - \sqrt{x} \right)$ (với $x \geq 0, x \neq 1$)

q) $Q = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \frac{x + xy}{1 - xy}$ (với $x > 0, y > 0, xy \neq 1$)

r) $R = \left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ (với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

s) $S = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 4\sqrt{x} + 4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x} + 2x - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$ (với $x > 0, x \neq 4$)

t) $T = \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28}{x - 3\sqrt{x} - 4} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 8}{4 - \sqrt{x}}$ (với $x \geq 0, x \neq 16$)

HD:

a) $A = \frac{x + 2\sqrt{3x} + 3}{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}$ với $x \geq 0$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{3})^3} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x - \sqrt{3x} + 3)} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3}$$

b) $B = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ với $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$

$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = x + \sqrt{xy} + y$$

c) $C = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ với $a \geq 0; b \geq 0; a \neq b$

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0$$

d) $D = \frac{(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{ab})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(a-b)(a\sqrt{a}+a)}$ với $a > 0; b \geq 0; a \neq b$

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})a(\sqrt{a}+1)} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

e) $E = \frac{\sqrt{a}-1}{a\sqrt{a}-a+\sqrt{a}} : \frac{1}{a^2+\sqrt{a}}$ với $a > 0$

$$= \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}(a-\sqrt{a}+1)} \cdot \sqrt{a} \cdot (a\sqrt{a}+1) = \frac{(\sqrt{a}-1) \cdot \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(a-\sqrt{a}+1)} = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1) = a-1$$

f) $F = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) : \frac{\sqrt{xy}+1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

$$F = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) : \frac{\sqrt{xy}+1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$F = \frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} : \frac{\sqrt{xy}+1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$F = 1$$

g) $G = \frac{x}{\sqrt{xy}+y} + \frac{y}{\sqrt{xy}-x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$ (với $xy \geq 0, x \neq y$)

$$G = \frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$$

$$G = \frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} - \frac{y\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} - \frac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{xy}(x-y)}$$

$$G = \frac{x^2 - x\sqrt{xy} - y\sqrt{xy} - y^2 - x^2 + y^2}{\sqrt{xy}(x-y)}$$

$$G = \frac{-\sqrt{xy}(x+y)}{\sqrt{xy}(x-y)} = -\frac{x+y}{x-y}$$

$$h) H = \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b} \quad (\text{với } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b)$$

$$H = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$H = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$H = \frac{a+b+2\sqrt{ab}-a-\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$H = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$i) I = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \quad (\text{với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq y)$$

$$I = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - (\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$I = \sqrt{x}+\sqrt{y} - (\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$I = 0$$

$$j) J = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) \quad (\text{với } x > 0, x \neq 1)$$

$$J = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$J = \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$J = \frac{x+2\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1}{x-1} : \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$J = \frac{4\sqrt{x}}{x-1} : \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$J = \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{2}$$

$$J = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

k) $K = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1} \right)$ (với $x > 0; x \neq 1$)

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} + \frac{2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

l) $L = \left(\frac{\sqrt{a}-2}{a-1} - \frac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ (với $a > 0; a \neq 1$)

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} - \frac{\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+1)^2} \right) \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} \right) = \left(\frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1) - (\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{a+\sqrt{a}-2\sqrt{a}-2-a+\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{-2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{-2}{a-1} \end{aligned}$$

m) $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ (với $x \geq 0; x \neq 4$)

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (2+5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

n) $N = \left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y} \right)^2$ (với $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$)

$$N = \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \right)^2 = (x - \sqrt{xy} + y - xy) \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right)^2$$
$$= (x - 2\sqrt{xy} + y) \frac{1}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \frac{1}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} = 1$$

o) $O = \left(\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) \left(\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^2$ (với $a \geq 0$; với $b \geq 0$; $a \neq b$)

$$O = \left(\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) : \left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right)^2$$
$$= (\sqrt{ab} + a + \sqrt{ab} + b) : (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (a + 2\sqrt{ab} + b) : (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 : (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 1$$

p) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right)$$

$$P = \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right)$$

$$P = \frac{2x+1-x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot (x-\sqrt{x}+1-\sqrt{x})$$

$$P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot (x-2\sqrt{x}+1)$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot (\sqrt{x}-1)^2$$

$$P = \sqrt{x} - 1$$

Vậy $P = \sqrt{x} - 1$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

q) Với $x > 0, y > 0, xy \neq 1$, ta có:

$$Q = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \frac{x + xy}{1 - xy}$$

$$Q = \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy})}{(1 - \sqrt{xy})(1 + \sqrt{xy})} + \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{(1 - \sqrt{xy})(1 + \sqrt{xy})} \right) \cdot \frac{1 - xy}{x + xy}$$

$$Q = \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{xy})(1 + \sqrt{xy})} \cdot \frac{1 - xy}{x + xy}$$

$$Q = \frac{2\sqrt{x} + 2y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{x(1 + y)}$$

$$Q = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)(1 - xy)}{(1 - xy)(1 + y)}$$

$$Q = 2\sqrt{x}$$

Vậy $Q = 2\sqrt{x}$ với $x > 0, y > 0, xy \neq 1$.

r) Với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$, ta có:

$$R = \left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$R = \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$R = (x - \sqrt{xy} + y - \sqrt{xy}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$R = (x - 2\sqrt{xy} + y) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$R = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 : (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$R = 1$$

Vậy $R = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$.

s) Với $x > 0, x \neq 4$, ta có:

$$S = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$$

$$S = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+2)^2} \right) \cdot \frac{x(\sqrt{x}+2)-4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}$$

$$S = \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)} - \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)(x-4)}{\sqrt{x}}$$

$$S = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)} - \frac{x-2\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}}$$

$$S = \frac{x+3\sqrt{x}+2-x+3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}}$$

$$S = \frac{6\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)\sqrt{x}}$$

$$S = 6$$

Vậy $S = 6$ với $x > 0, x \neq 4$.

t) Với $x \geq 0, x \neq 16$, ta có:

$$T = \frac{x\sqrt{x}-2x+28}{x-3\sqrt{x}-4} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+8}{4-\sqrt{x}}$$

$$T = \frac{x\sqrt{x}-2x+28}{x+\sqrt{x}-4\sqrt{x}-4} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}-4}$$

$$T = \frac{x\sqrt{x}-2x+28}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-4(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}-4}$$

$$T = \frac{x\sqrt{x}-2x+28}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} - \frac{(\sqrt{x}-4)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} - \frac{(\sqrt{x}+8)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)}$$

$$T = \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)} - \frac{x - 8\sqrt{x} + 16}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)} - \frac{x + \sqrt{x} + 8\sqrt{x} + 8}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)}$$

$$T = \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28 - x + 8\sqrt{x} - 16 - x - \sqrt{x} - 8\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)}$$

$$T = \frac{x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)}$$

$$T = \frac{x(\sqrt{x} - 4) - (\sqrt{x} - 4)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)}$$

$$T = \frac{(\sqrt{x} - 4)(x - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)}$$

$$T = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} + 1}$$

$$T = \sqrt{x} - 1$$

Vậy $T = \sqrt{x} - 1$ với $x \geq 0, x \neq 16$.

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$ với $a > 0$ và $b > 0$

b) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} + \sqrt{\frac{4m+8mx+4mx^2}{81}}$ với $m > 0; x > 1$

HD:

a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$ với $a > 0$ và $b > 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{a}} &= \frac{1}{b} \sqrt{ab} + \sqrt{ab} + \frac{a}{ab} \sqrt{ab} \\ &= \frac{2}{b} \sqrt{ab} + \sqrt{ab} = \left(\frac{2}{b} + 1\right) \sqrt{ab} \end{aligned}$$

b) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} + \sqrt{\frac{4m+8mx+4mx^2}{81}}$ với $m > 0$ và $x > 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} + \sqrt{\frac{4m+8mx+4mx^2}{81}} &= \sqrt{\frac{m}{(x-1)^2}} + \sqrt{\frac{4m(1+x)^2}{9^2}} = \frac{1}{x-1}\sqrt{m} + \frac{x+1}{9}\sqrt{m} \\ &= \frac{9+x^2-1}{9(x-1)}\sqrt{m} = \frac{8+x^2}{9(x-1)}\sqrt{m} \end{aligned}$$

Bài 3: Chứng minh đẳng thức sau:

a) $\left(x \cdot \sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$

b) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a > 0$ và $a \neq 1$

c) $\frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$

HD:

a) $\left(x \cdot \sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$

Biến đổi về trái ta có:

$$\begin{aligned} \left(x \cdot \sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} &= \left(x \cdot \sqrt{\frac{6x}{x^2}} + \sqrt{\frac{6x}{3^2}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = \left(\frac{x}{x}\sqrt{6x} + \frac{1}{3}\sqrt{6x} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} \\ &= 2\frac{1}{3}\sqrt{6x} : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vậy về trái bằng về phải. Đẳng thức được chứng minh.

b) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a > 0$ và $a \neq 1$

Biến đổi về trái ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 = \left(\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \right)^2 \\ & = (1+\sqrt{a}+a+\sqrt{a}) \cdot \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} \right)^2 = (1+\sqrt{a})^2 \cdot \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Vậy vế trái bằng vế phải. Đẳng thức được chứng minh.

c) $\frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$

Biến đổi vế trái ta có:

$$\frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{(a+b)^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a|b^2}{a+b} = |a|$$

Vậy vế trái bằng vế phải. Đẳng thức được chứng minh.