

DS7.CHUYÊN ĐỀ 1- DÃY SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT – DÃY PHÂN SỐ.

DS7.I. DÃY CÁC SỐ TỰ NHIÊN

PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

A. Dãy số mà các số hạng cách đều (dãy cộng)

1. Lý thuyết

Dãy số $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ trong đó $a_2 = a_1 + d; a_3 = a_2 + d; a_4 = a_3 + d; \dots$

Dãy số trên là dãy số cách đều khoảng cách d

* Số hạng thứ n của dãy khi biết $d; a_1$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

* Số số hạng của dãy

$$n = (a_n - a_1) : d + 1$$

* Tổng các số hạng đầu tiên của dãy cộng:

$$S = (a_1 + a_n).n : 2$$

Chú ý:

* Công thức tổng quát: $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n(n + 1) : 2$

B. Dãy số mà các số hạng không cách đều nhau

* Một số công thức tổng quát:

$$A = 1.2 + 2.3 + \dots + (n - 1).n = (n - 1).n.(n + 1) : 3$$

$$A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n - 1).n.(n + 1). = (n - 1).n.(n + 1)(n + 2) : 4$$

PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Dãy số mà các số hạng cách đều (dãy cộng)

I.Phương pháp giải.

* Số hạng thứ n của dãy khi biết $d; a_1$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

* Số số hạng của dãy

$$n = (a_n - a_1) : d + 1$$

* Tổng các số hạng đầu tiên của dãy cộng:

$$S = (a_1 + a_n).n : 2$$

Chú ý:

* Công thức tổng quát: $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n(n + 1) : 2$

II.Bài toán.

Bài 1: Tính tổng của dãy số:

a) $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$

b) $B = 6 + 7 + 8 + \dots + 245$

Lời giải

a) $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$

Số số hạng của tổng là: $(100 - 1) : 1 + 1 = 100$ (số hạng)

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = (100 + 1) \cdot 100 : 2 = 5050$$

b) $B = 6 + 7 + 8 + \dots + 245$

Số số hạng của tổng là: $(245 - 6) : 1 + 1 = 240$ (số hạng)

$$B = 6 + 7 + 8 + \dots + 245 = (245 + 6) \cdot 240 : 2 = 30120$$

Bài 2: Tính tổng của dãy số:

a) $C = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$

b) $D = 2 + 5 + 8 + \dots + 98$

Lời giải

a) $C = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$

Số số hạng của tổng là: $(99 - 1) : 2 + 1 = 50$ (số hạng)

$$C = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 = (1 + 99) \cdot 50 : 2$$

b) $D = 2 + 5 + 8 + \dots + 98$

Số số hạng của tổng là: $(98 - 2) : 3 + 1 = 33$ (số hạng)

$$D = 2 + 5 + 8 + \dots + 98 = (98 + 2) \cdot 33 : 2 =$$

Bài 3: Cho tổng $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 199$

a) Tìm số hạng thứ 50 của tổng

b) Tính S.

Lời giải

Cho tổng $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 199$

a) Số hạng thứ 50 của tổng là:

$$1 + (50 - 1) \cdot 3 = 148$$

b) Số số hạng của tổng là:

$$(199 - 1) : 3 + 1 = 67 \text{ (số hạng)}$$

$$S = 1 + 4 + 7 + \dots + 199 = (199 + 1) \cdot 67 : 2 = 6700$$

Bài 4: Tính tổng của dãy số:

a) $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 200;$

b) $B = 5 + 6 + 7 + \dots + 144$.

Lời giải

a) $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 200$

Số số hạng của tổng là: $(200 - 1) : 1 + 1 = 200$ (số hạng)

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 200 = (200 + 1) \cdot 200 : 2 = 20100$$

b) $B = 5 + 6 + 7 + \dots + 144$.

Số số hạng của tổng là: $(166 - 1) : 3 + 1 = 56$ (số hạng)

$$B = 5 + 6 + 7 + \dots + 144 = (144 + 5) \cdot 56 : 2 = 4172$$

Bài 5: Tính tổng của dãy số:

a) $E = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$;

b) $F = 1 + 4 + 7 + \dots + 91$.

Lời giải

a) $E = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 49$

Số số hạng của tổng là: $(49 - 1) : 2 + 1 = 25$ (số hạng)

$$E = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 = (99 + 1) \cdot 25 : 2 = 1250$$

b) $F = 1 + 4 + 7 + \dots + 91$

Số số hạng của tổng là: $(91 - 1) : 3 + 1 = 31$ (số hạng)

$$F = 1 + 4 + 7 + \dots + 91 = (91 + 1) \cdot 31 : 2 = 1426$$

Bài 6:

a) Tính tổng các số tự nhiên nhỏ hơn 50;

b) Tính tổng các số tự nhiên chẵn không vượt quá 100;

c) Tính tổng các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 200.

Lời giải

a) Tính tổng các số tự nhiên nhỏ hơn 50 là $1 + 2 + 3 + \dots + 49$

Số số hạng của tổng là: $(49 - 1) : 1 + 1 = 49$ (số hạng)

$$1 + 2 + 3 + \dots + 49 = (49 + 1) \cdot 49 : 2 = 1225$$

b) Tính tổng các số tự nhiên chẵn không vượt quá 100 là $2 + 4 + 6 + \dots + 100$

Số số hạng của tổng là: $(100 - 2) : 2 + 1 = 50$ (số hạng)

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100 = (100 + 2) \cdot 50 : 2 = 2550$$

c) Tính tổng các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 200 là $1 + 3 + 5 + \dots + 199$

Số số hạng của tổng là: $(199 - 1) : 2 + 1 = 100$ (số hạng)

$$1 + 3 + 5 + \dots + 199 = (199 + 1) \cdot 100 : 2 = 10000.$$

Bài 7: Cho tổng $M = 1 + 4 + 7 + \dots + 166$

- a) Tìm số hạng thứ 41 của tổng
- b) Tính M.

Lời giải

$$M = 1 + 4 + 7 + \dots + 166$$

a) Số hạng thứ 41 của tổng là:

$$1 + (41 - 1) \cdot 3 = 121$$

b) Số số hạng của tổng M là: $(166 - 1) : 3 + 1 = 56$ (số hạng)

$$M = 1 + 4 + 7 + \dots + 166 = (166 + 1) \cdot 56 : 2 = 4676.$$

Dạng 2. Dãy số mà các số hạng không cách đều nhau.

I. Phương pháp giải.

**Một số công thức tổng quát:*

$$A = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n - 1) \cdot n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) : 3$$

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) : 4$$

II. Bài toán.

Bài 1: Tính tổng:

- a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1)$
- b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n + 1)(n + 2)$ với n là số tự nhiên khác không.

Lời giải.

$$a) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1)$$

$$= [1 \cdot 2 \cdot (3 - 0) + 2 \cdot 3 \cdot (4 - 1) + 3 \cdot 4 \cdot (5 - 2) + \dots + n(n + 1)((n + 2) - (n - 1))] : 3$$

$$= [1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots - n(n + 1)(n + 2)] : 3$$

$$= n(n + 1)(n + 2) : 3$$

$$b) 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n + 1)(n + 2)$$

$$= [1 \cdot 2 \cdot 3(4 - 0) + 2 \cdot 3 \cdot 4(5 - 1) + 3 \cdot 4 \cdot 5(6 - 2) + \dots + n(n + 1)(n + 2)((n + 3) - (n - 1))] : 4$$

$$= n(n + 1)(n + 2)(n + 3) : 4$$

Bài 2: Tính tổng: $A = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 10$

Lời giải

$$3A = 3.(1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10)$$

$$3A = 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + 4.5.(6-3) + 5.6.(7-4) + 6.7.(8-5) + 7.8.(9-6) + 8.9.(10-7) + 9.10.(11-8)$$

$$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots + 8.9.10 - 8.9.10 + 9.10.11$$

$$= 9.10.11 = 990$$

$$A = 990 : 3 = 330$$

Ta chú ý tới đáp số $990 = 9.10.11$, trong đó 9.10 là số hạng cuối cùng của A và 11 là số tự nhiên kế sau của 10, tạo thành tích ba số tự nhiên liên tiếp.

Bài 3: Tính tổng của dãy số: $A = 1.2.3 + 2.3.4 + 4.5.6 + \dots + 8.9.10$

Lời giải

$$A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 + 6.7.8 + 7.8.9 + 8.9.10$$

$$4A = (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 + 6.7.8 + 7.8.9 + 8.9.10).4$$

$$4A = [1.2.3.(4-0) + 2.3.4.(5-1) + \dots + 8.9.10.(11-7)]$$

$$4A = (1.2.3.4 - 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 2.3.4.5 + \dots - 7.8.9.10 + 8.9.10.11)$$

$$4A = 8.9.10.11$$

$$\text{Vậy } A = 8.9.10.11 : 4 = 1980$$

Bài 4: Tính tổng: $A = 1.2 + 3.4 + \dots + 99.100$

Giải

$$A = 1.2 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3A = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + 99.100(101-98)$$

$$= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 99.100.101 - 98.99.100$$

$$= 99.100.101$$

$$\Rightarrow A = \frac{99.100.101}{3} = 333300$$

Trong bài toán này, ta có thể không nhân A với một số mà tách ngay một thừa số trong mỗi số hạng làm xuất hiện các dãy số mà ta đã biết cách tính hoặc dễ dàng tính được.

Cách 2:

$$A = 2 + (2+1).4 + (4+1).6 + \dots + (98+1).100$$

$$= 2 + 2.4 + 4 + 4.6 + 6 + \dots + 98.100 + 100$$

$$= (2.4 + 4.6 + \dots + 98.100) + (2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 100)$$

Cách 3:

$$\begin{aligned}
A &= 1.(3-1) + 3(5-1) + 5(7-1) + \dots + 99(101-1) \\
&= 1.3 - 1 + 3.5 - 3 + 5.7 - 5 + \dots + 99.101 - 99 \\
&= (1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 99.101) - (1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99)
\end{aligned}$$

Bài 5: Tính tổng: $B = 1.2 + 3.4 + 5.6 + \dots + 99.100$

Ta có: $B = 1.2 + 3.4 + 5.6 + \dots + 99.100$

$$B = 2 + (2 + 1).4 + (4 + 1).6 + \dots + (98 + 1).100$$

$$B = 2 + 2.4 + 1.4 + 4.6 + 1.6 + \dots + 98.100 + 1.100$$

$$B = (2.4 + 4.6 + 6.8 + \dots + 98.100) + (2 + 4 + 6 + \dots + 100)$$

$$\text{Đặt } M = 2.4 + 4.6 + 6.8 + \dots + 98.100$$

$$6M = 2.4(6 - 0) + 4.6(8 - 2) + 6.8(10 - 4) + \dots + 98.100(102 - 96)$$

$$6M = 2.4.6 - 0 + 4.6.8 - 2.4.6 + 6.8.10 - 4.6.8 + \dots + 98.100.102 - 96.98.100$$

$$6M = 98.100.102 \Rightarrow M = \frac{98.100.102}{6} = 166600$$

$$\text{Đặt } N = 2 + 4 + 6 + \dots + 100 = (100 + 2).50 : 2 = 2550$$

Do đó $B = 166600 + 2550 = 169150$

Bài 6: Tính tổng: $E = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + 97.99 + 98.100$

Lời giải

$$E = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + 97.99 + 98.100$$

$$E = 1(1+2) + 2(2+2) + 3(3+2) + \dots + 97(97+2) + 98(98+2)$$

$$E = (1.1+1.2) + (2.2+2.2) + (3.3+3.2) + \dots + (97.97+97.2) + (98.98+98.2)$$

$$E = (1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 97.97 + 98.98) + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98)$$

$$\text{Đặt } A = 1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 98.98 \text{ và } B = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98$$

Tính rồi thay vào E

Bài 7: Tính tổng:

a) $A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 99.100.101$

b) $B = 1.3.5 + 3.5.7 + \dots + 5.7.9 + \dots + 95.97.99$

Lời giải:

$$A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 99.100.101$$

$$4A = (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + 99.100.101).4$$

$$4A = [1.2.3.(4 - 0) + 2.3.4.(5 - 1) + \dots + 99.100.101.(102 - 98)]$$

$$4A = 1.2.3.4 - 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 2.3.4.5 + \dots - 98.99.100.101 + 99.100.101.102$$

$$4A = 99.100.101.102$$

Vậy $A = 99.100.101.102 : 4 = 25497450$

b) $B = 1.3.5 + 3.5.7 + \dots + 5.7.9 + \dots + 95.97.99$

$$8B = 1.3.5.8 + 3.5.7.8 + 5.7.9.8 + \dots + 95.97.99.8$$

$$8B = 1.3.5(7 + 1) + 3.5.7(9 - 1) + 5.7.9(11 - 3) + \dots + 95.97.99(101 - 93)$$

$$8B = 1.3.5.7 + 15 + 3.5.7.9 - 1.3.5.7 + 5.7.9.11 - 3.5.7.9 + \dots + 95.97.99.101 - 93.95.97.99$$

$$8B = 15 + 95.97.99.101$$

$$B = (15 + 95.97.99.101) : 8 = 11517600$$

Bài 8: Tính tổng $N = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 97.3 + 98.2 + 99.1$

Lời giải:

$$N = 1.99 + 2.(99-1) + 3.(99-2) + \dots + 98.(99-97) + 99.(99-98)$$

$$N = (1.99 + 2.99 + 3.99 + \dots + 98.99 + 99.99) - (1.2 + 2.3 + \dots + 97.98 + 98.99)$$

$$N = 99.(1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99) - \frac{98.99.100}{3}$$

$$N = 99.\frac{99.100}{2} - \frac{98.99.100}{3} = \frac{99.100.101}{6} = 166650$$

Bài 9: Tính tổng $H = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 50.50$

Lời giải:

$$H = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 50.50$$

$$H = 1.99 + 2.(99-1) + 3.(99-2) + \dots + 50(99-49)$$

$$H = 1.99 + (2.99 - 1.2) + (3.99 - 2.3) + \dots + (50.99 - 49.50)$$

$$H = (1.99 + 2.99 + 3.99 + \dots + 50.99) - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50)$$

$$H = 99.(1 + 2 + 3 + \dots + 50) - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50)$$

$$H = 99.[(1+50)50 : 2] - [(49.50.51) : 3]$$

$$H = 99.1275 - 41650 = 84575$$

Bài 10: Tính tổng tự nhiên

a, $A = 9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots9$ (10 chữ số 9)

b, $B = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots1$ (10 số 1)

Lời giải

a) Ta có: $A = 9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots9$ (10 chữ số 9)

$$A = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^{10}-1)$$

$$\begin{aligned}
&= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10 \\
&= 111\dots 10 - 10 = 111\dots 100 \quad (9 \text{ số } 1) \\
\text{b) } B &= 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1 \quad (10 \text{ số } 1) \\
\text{Ta có: } 9B &= 9 + 99 + 999 + \dots + 9999\dots 99 \quad (10 \text{ chữ số } 9) \\
9B &= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{10} - 1) \\
&= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10 \\
&= 111\dots 10 - 10 = 11111111100 \quad (9 \text{ chữ số } 1) \\
\Rightarrow B &= 11111111100 : 9 = 12345678900
\end{aligned}$$

Bài 11: Tính tổng tự nhiên

- a) $C = 4 + 44 + 444 + \dots + 444\dots 4$ (10 chữ số 4)
- b) $D = 2 + 22 + 222 + \dots + 222\dots 2$ (10 chữ số 2)

Lời giải

a, Ta có: $C = 4(1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 11)$ (10 chữ số 1)

$$\begin{aligned}
9C &= 4(9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots 99) \quad (10 \text{ số } 9) \\
9C &= 4 \cdot [(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{10} - 1)] \\
&= 4 \cdot [(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10] \\
&= 4 \cdot [111\dots 10 - 10] = 44444444400 \quad (9 \text{ chữ số } 4) \\
\Rightarrow C &= 44444444400 : 9 = 4938271600
\end{aligned}$$

b, Ta có : $D = 2 + 22 + 222 + \dots + 222\dots 2$ (10 chữ số 2)

$$\begin{aligned}
D &= 2(1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 11) \quad (10 \text{ chữ số } 1) \\
9D &= 2(9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots 99) \quad (10 \text{ chữ số } 9) \\
9D &= 2 \cdot [(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{10} - 1)] \\
&= 2 \cdot [(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10] \\
&= 2 \cdot [111\dots 10 - 10] = 22222222200 \quad (9 \text{ chữ số } 2) \\
\Rightarrow D &= 22222222200 : 9 = 2469135800
\end{aligned}$$

ĐS7.II DÃY CÁC PHÂN SỐ.

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

Với $a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0; n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$+ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \Rightarrow \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n};$$

$$+ b \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^{n-1}}; \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^{n+1}}.$$

Với $a, b, c \in N^*$, ta có:

$$+ \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b};$$

$$+ \frac{b-a}{a \cdot b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b};$$

$$+ \frac{b+a}{a \cdot b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b};$$

$$+ \frac{c-a}{a \cdot b \cdot c} = \frac{1}{a \cdot b} - \frac{1}{b \cdot c}.$$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Dãy các phân số mà mẫu số sau gấp mẫu số trước 1 số không đổi

I. Phương pháp giải.

Để thu gọn tổng A gồm các phân số mà mẫu số sau gấp mẫu số trước 1 số m không đổi, ta sẽ lấy

$$A \cdot m \text{ hoặc } A \cdot \frac{1}{m}.$$

II. Bài toán.

Bài 1. Tính tổng : $A = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{100}}.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{7} A = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{101}}$$

$$A - \frac{1}{7} A = \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^2}\right) + \left(\frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{7^{100}} - \frac{1}{7^{100}}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7^{101}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{6}{7} \cdot A = \frac{7^{100} - 1}{7^{101}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{7^{100} - 1}{6 \cdot 7^{100}}.$$

Bài 2. Tính tổng: $B = \frac{5}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots + \frac{5}{3^{20}}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{3} B = \frac{5}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{5}{3^{20}} + \frac{5}{3^{21}}$$

$$B - \frac{1}{3} B = \left(\frac{5}{3^2} - \frac{5}{3^2}\right) + \left(\frac{5}{3^3} - \frac{5}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{5}{3^{20}} - \frac{5}{3^{20}}\right) + \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3^{21}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot B = \frac{5 \cdot 3^{20} - 5}{3^{21}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{5 \cdot 3^{20} - 5}{2 \cdot 3^{20}} ..$$

Bài 3. Thu gọn các tổng sau:

a, $D = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2017}$

b, $E = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$

Lời giải

a, Ta có: $D = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{2016}} - \frac{1}{7^{2017}}$

$$\frac{1}{7}D = \frac{1}{7} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{2017}} - \frac{1}{7^{2018}}$$

$$D + \frac{1}{7}D = \left(\frac{-1}{7} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7^2} + \frac{-1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{7^{2017}} + \frac{1}{7^{2017}}\right) + \left(1 - \frac{1}{7^{2018}}\right)$$

$$\frac{8}{7}D = \frac{7^{2018} - 1}{7^{2018}}$$

$$\Rightarrow D = \frac{7^{2018} - 1}{8 \cdot 7^{2018}}$$

b, Ta có: $\frac{1}{3}E = \frac{-1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{51}} - \frac{1}{3^{52}}$

$$E + \frac{1}{3}E = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{-1}{3^2}\right) + \left(\frac{-1}{3^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{3^{51}} + \frac{1}{3^{51}}\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{-1}{3^{52}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}E = -\frac{3^{51} + 1}{3^{52}}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{3^{51} + 1}{4 \cdot 3^{51}}$$

Bài 4. Tính tổng: $C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$.

Lời giải

a, Ta có: $\frac{1}{2}C = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{101}}$

$$C - \frac{1}{4}C = \frac{3}{4}C = \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98}} - \frac{1}{2^{98}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{101}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}C = \frac{2^{100} - 1}{2^{101}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2^{100} - 1}{3 \cdot 2^{99}}$$

Bài 5. Tính tổng $G = \frac{3}{5} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^7} + \dots + \frac{3}{5^{100}}$.

Lời giải

Ta có: $G = \frac{3}{5} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^7} + \dots + \frac{3}{5^{100}}$ $G = 3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5^{100}}\right)$

Đặt $A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5^{100}} \Rightarrow \frac{1}{5^3}A = \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{5^{10}} + \dots + \frac{1}{5^{103}}$

$$A - \frac{1}{125}A = \left(\frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^4}\right) + \left(\frac{1}{5^7} - \frac{1}{5^7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{5^{100}} - \frac{1}{5^{100}}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{103}}\right)$$

$$\frac{124 \cdot A}{125} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5^{103}} = \frac{5^{102} - 1}{5^{103}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5^{102} - 1}{5^{100} \cdot 124}$$

Bài 6. Cho biểu thức: $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$

Tính giá trị của biểu thức $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$

Lời giải

Ta có: $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$

$$3A = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$A + 3A = -1 + \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \cdot \left(-1 + \frac{1}{3^{100}}\right)$$

$$\Rightarrow A < 0 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)$$

$$B = 4 \cdot |A| + \frac{1}{3^{100}} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

Vậy $B = 1$

Bài 7. Tính tổng $H = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2017}{3^{2017}}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{3}H = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \dots + \frac{2016}{3^{2017}} + \frac{2017}{3^{2018}}$

$$H - \frac{1}{3}H = \left(\frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{3}{3^3} - \frac{2}{3^3}\right) + \left(\frac{4}{3^4} - \frac{3}{3^4}\right) + \dots + \left(\frac{2017}{3^{2017}} - \frac{2016}{3^{2017}}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2017}{3^{2018}}\right)$$

$$\frac{2}{3}H = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} + \frac{1}{3} - \frac{2017}{3^{2018}} \quad (1)$$

Đặt $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$

$$3A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2016}}$$

$$\Rightarrow 2A = 1 - \frac{1}{3^{2017}} = \frac{3^{2017} - 1}{3^{2017}} \Rightarrow A = \frac{3^{2017} - 1}{2 \cdot 3^{2017}}$$

Thay $A = \frac{3^{2017} - 1}{2 \cdot 3^{2017}}$ vào (1) ta được:

$$\frac{2}{3}H = \frac{3^{2017} - 1}{2 \cdot 3^{2017}} - \frac{2017}{3^{2018}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}H = \frac{3^{2018} - 4037}{2 \cdot 3^{2018}}$$

$$\Rightarrow H = \frac{3^{2018} - 4037}{4 \cdot 3^{2017}}$$

Bài 8. Tính

a, $T = 4 \cdot 5^{100} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{100}}\right) + 1$

b, $I = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$.

Lời giải

a, Ta có: $T = 4 \cdot 5^{100} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{100}}\right) + 1$.

Đặt $M = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{100}}$. Dễ dàng tính được $M = \frac{5^{100} - 1}{4.5^{100}}$. Thay vào tổng T ta được:

$$T = 4.5^{100} \frac{5^{100} - 1}{4.5^{100}} + 1 = 5^{100} - 1 + 1 = 5^{100}.$$

b, Ta có : $I = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow \frac{1}{2}I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{101}}$

$$\Rightarrow I - \frac{1}{2}I = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^{101}}\right)$$

$$\frac{1}{2}I = \frac{2^{101} - 1}{2^{101}} \Rightarrow I = \frac{2^{101} - 1}{2^{100}}.$$

Bài 9. Thu gọn tổng sau: $F = 1 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{100}{2^{100}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2}F = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{5}{2^6} + \dots + \frac{99}{2^{100}} + \frac{100}{2^{101}}$$

$$F - \frac{1}{2}F = \left(\frac{4}{2^4} - \frac{3}{2^4}\right) + \left(\frac{5}{2^5} - \frac{4}{2^5}\right) + \dots + \left(\frac{100}{2^{100}} - \frac{99}{2^{100}}\right) + \left(1 + \frac{3}{2^3} - \frac{1}{2} - \frac{100}{2^{101}}\right)$$

$$\frac{1}{2}F = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{100}{2^{101}}\right)$$

Đặt $A = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$. Tính A rồi thay vào F.

Dạng 2. Dãy các phân số có quy luật triệt tiêu nhau

I. Phương pháp giải.

+ Bước 1: nhận dạng

Để có thể tính đúng và chính xác dãy phân số có quy luật triệt tiêu nhau, ta cần nhận dạng được dãy phân số đó với các đặc điểm sau:

- Mẫu số đưa được về thành tích của 2 hoặc 3 số ở đó số lớn nhất của mẫu trước trùng với số nhỏ nhất của mẫu sau.
- Tử số có giá trị đúng bằng tổng hoặc hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất ở dưới mẫu.

Nếu thấy dãy phân số đã cho chưa thỏa mãn 2 điều kiện trên thì tùy bài toán ta cần nhân thêm hoặc chia bớt để tạo ra được dãy số có quy luật như vậy.

+ Bước 2: áp dụng công thức $\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; $\frac{b+a}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ hoặc $\frac{c-a}{a.b.c} = \frac{1}{a.b} - \frac{1}{b.c}$ (với $a, b, c \in N^*$).

+ Bước 3: tính toán.

II. Bài toán.

Bài 1. Tính nhanh tổng sau:

$$\text{a, } A = \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{24.25};$$

$$\text{b, } B = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{99.101}.$$

Lời giải

$$\text{a, Ta có : } A = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{25}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{4}{25}.$$

$$\text{b, Ta có : } B = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

Bài 2. Tính nhanh tổng sau:

$$a, D = \frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31}$$

$$b, K = \frac{4}{11.16} + \frac{4}{16.21} + \frac{4}{21.26} + \dots + \frac{4}{61.66}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a, \text{Ta có: } D &= 5 \left(\frac{5}{1.6} + \frac{5}{6.11} + \frac{5}{11.16} + \dots + \frac{5}{26.31} \right) \\ &= 5 \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{26} - \frac{1}{31} \right) \\ &= 5 \left(1 - \frac{1}{31} \right) = 5 \cdot \frac{30}{31} = \frac{150}{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b, \text{Ta có: } K &= 4 \left(\frac{1}{11.16} + \frac{1}{16.21} + \frac{1}{21.26} + \dots + \frac{1}{61.66} \right) \\ \Rightarrow 5K &= 4 \left(\frac{5}{11.16} + \frac{5}{16.21} + \frac{5}{21.26} + \dots + \frac{5}{61.66} \right) \\ 5K &= 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{61} - \frac{1}{66} \right) = 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{66} \right) \\ \Rightarrow 5K &= 4 \cdot \frac{55}{11.66} \Rightarrow K = \frac{4}{66} = \frac{2}{33} \end{aligned}$$

Bài 3. Không quy đồng mẫu số các phân số, hãy tính : $B = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4} \\ \Rightarrow \frac{B}{7} &= \frac{5}{2.7} + \frac{4}{7.11} + \frac{3}{11.14} + \frac{1}{14.15} + \frac{13}{15.28} \\ \Rightarrow \frac{B}{7} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{28} = \frac{1}{2} - \frac{1}{28} = \frac{13}{28} \\ \Rightarrow B &= \frac{7.13}{28} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Bài 4. Thực hiện phép tính: $A = 3 \cdot \frac{1}{1.2} - 5 \cdot \frac{1}{2.3} + 7 \cdot \frac{1}{3.4} - \dots + 15 \cdot \frac{1}{7.8} - 17 \cdot \frac{1}{8.9}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 3 \cdot \frac{1}{1.2} - 5 \cdot \frac{1}{2.3} + 7 \cdot \frac{1}{3.4} - \dots + 15 \cdot \frac{1}{7.8} - 17 \cdot \frac{1}{8.9} \\ &= \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \dots + \frac{15}{7.8} - \frac{17}{8.9} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \dots + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Bài 5. Tính nhanh tổng sau: $P = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{10.11.12}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2P &= \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{10.11.12} \\ 2P &= \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{10.11} - \frac{1}{11.12} \right) \\ 2P &= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{11.12} = \frac{65}{132} \Rightarrow P = \frac{65}{264} \end{aligned}$$

Bài 6. Tính tổng sau: $K = \frac{5}{3.7} + \frac{5}{7.11} + \frac{5}{11.15} + \dots + \frac{5}{83.87} + \frac{5}{87.91}$

Lời giải

$$K = \frac{5}{3.7} + \frac{5}{7.11} + \frac{5}{11.15} + \dots + \frac{5}{83.87} + \frac{5}{87.91}$$

$$K = \frac{5}{4} \left(\frac{4}{3.7} + \frac{4}{7.11} + \frac{4}{11.15} + \dots + \frac{4}{83.87} + \frac{4}{87.91} \right)$$

$$K = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{91} \right) \Rightarrow K = \frac{110}{273}.$$

Bài 7. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(\frac{3}{1.8} + \frac{3}{8.15} + \frac{3}{15.22} + \dots + \frac{3}{106.113} \right) - \left(\frac{25}{50.55} + \frac{25}{55.60} + \dots + \frac{25}{95.100} \right)$$

Lời giải

Xét $B = \frac{3}{1.8} + \frac{3}{8.15} + \frac{3}{15.22} + \dots + \frac{3}{106.113}$

$$\Rightarrow 7B = 3 \left(\frac{7}{1.8} + \frac{7}{8.15} + \frac{7}{15.22} + \dots + \frac{7}{106.113} \right)$$

$$\Rightarrow 7B = 3 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{106} - \frac{1}{113} \right)$$

$$7B = 3 \left(1 - \frac{1}{113} \right) = 3 \cdot \frac{112}{113}$$

$$\Rightarrow B = \frac{3.112}{7.113} = \frac{48}{113}.$$

Xét $C = \frac{25}{50.55} + \frac{25}{55.60} + \dots + \frac{25}{95.100}$

$$\Rightarrow 5C = \frac{5}{50.55} + \frac{5}{55.60} + \dots + \frac{5}{95.100}$$

$$\Rightarrow 5C = \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow C = \frac{1}{500}.$$

Khi đó : $A = B - C = \frac{48}{113} - \frac{1}{500}.$

Bài 8. Tính nhanh: $\frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009}$

Lời giải

Ta có : $\frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009}$

$$\Rightarrow A = \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009}$$

$$\Rightarrow 10A = 9 \left(\frac{10}{9.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{10}{29.39} + \dots + \frac{10}{1999.2009} \right) = 9 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2009} \right)$$

$$\Rightarrow 10A = 9 \cdot \frac{2000}{9.2009} = \frac{2000}{2009} \Rightarrow A = \frac{200}{2009}.$$

Bài 9. Tính nhanh tổng sau:

a, $E = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \frac{1}{475} + \frac{1}{755} + \frac{1}{1147}$

b, $C = \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} + \frac{2}{143}.$

Lời giải

a, Ta có : $E = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \frac{1}{475} + \frac{1}{755} + \frac{1}{1147}$

$$E = \frac{1}{1.7} + \frac{1}{7.13} + \frac{1}{13.19} + \dots + \frac{1}{31.37}$$

$$5E = \frac{5}{1.7} + \frac{5}{7.13} + \frac{5}{13.19} + \dots + \frac{5}{31.37}$$

$$5E = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{31} - \frac{1}{37}$$

$$5E = 1 - \frac{1}{37} = \frac{36}{37} \Rightarrow E = \frac{36}{185}$$

b, Ta có : $C = \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \frac{2}{11.13}$

$$C = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$$

$$C = \frac{1}{3} - \frac{1}{13} = \frac{8}{33}$$

Bài 10. Tính tổng

a, $F = \frac{2}{6} + \frac{2}{66} + \frac{2}{176} + \dots + \frac{2}{(5n-4)(5n+1)}$; b, $G = 1 + \frac{9}{45} + \frac{9}{105} + \frac{9}{189} + \dots + \frac{9}{2997}$

Lời giải

a, Ta có :

$$F = 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{66} + \frac{1}{176} + \dots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \right) = 2 \left(\frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \frac{1}{11.16} + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \right)$$

$$5F = 2 \left(\frac{5}{1.6} + \frac{5}{6.11} + \frac{5}{11.16} + \dots + \frac{5}{(5n-4)(5n+1)} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = 2 \cdot \frac{5n}{5n+1} \Rightarrow F = \frac{2n}{5n+1}$$

b, Ta có : $G = 1 + \frac{3}{15} + \frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \dots + \frac{3}{9999} = 1 + \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \dots + \frac{3}{99.101}$

$$G = 1 + 3 \left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{99.101} \right) \Rightarrow 2G = 2 + 3 \left(\frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{99.101} \right)$$

$$2G = 2 + 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{101} \right) = 2 + 3 \cdot \frac{98}{3.101} = 2 + \frac{98}{101} = \frac{300}{101} \Rightarrow G = \frac{150}{101}$$

Bài 11. Tính nhanh tổng sau: $M = \frac{1}{2.15} + \frac{1}{15.3} + \frac{1}{3.21} + \dots + \frac{6}{87.90}$.

Lời giải

Ta có : $M = \frac{1}{2.15} + \frac{1}{15.3} + \frac{1}{3.21} + \dots + \frac{6}{87.90}$.

$$M = \frac{6}{12.15} + \frac{6}{15.18} + \frac{6}{18.21} + \dots + \frac{6}{87.90}$$

$$M = 2 \left(\frac{3}{12.15} + \frac{3}{15.18} + \dots + \frac{3}{87.90} \right)$$

$$M = 2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{87} - \frac{1}{90} \right)$$

$$M = 2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{90} \right) = \frac{13}{90}$$

Bài 12. Tính nhanh tổng sau

$$a, H = \frac{38}{25} + \frac{9}{10} - \frac{11}{15} + \frac{13}{21} - \frac{15}{28} + \frac{17}{36} - \dots + \frac{197}{4851} - \frac{199}{4950}; \quad b, I = \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \dots - \frac{201}{100.101}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a, \text{ Ta có: } \frac{H}{2} &= \frac{38}{50} + \frac{9}{20} - \frac{11}{30} + \frac{13}{42} - \frac{15}{56} + \dots + \frac{197}{9702} - \frac{199}{9900} \\ \frac{H}{2} &= \frac{38}{50} + \frac{9}{4.5} - \frac{11}{5.6} + \frac{13}{6.7} - \frac{15}{7.8} + \dots + \frac{197}{98.99} - \frac{199}{99.100} \\ \frac{H}{2} &= \frac{38}{50} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} + \frac{1}{99}\right) - \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) \\ \frac{H}{2} &= \frac{38}{50} + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} = \frac{76+25-1}{100} = 1 \Rightarrow H = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b, \text{ Ta có: } I &= \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \dots - \frac{201}{100.101} \\ I &= \frac{1+2}{1.2} - \frac{2+3}{2.3} + \frac{3+4}{3.4} - \dots - \frac{100+101}{100.101} \\ I &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \dots - \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101}\right) \\ I &= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}. \end{aligned}$$

Bài 13. Tính : $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$ và $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$

Lời giải

Ta có :

$$\frac{A}{5} = \frac{4}{31.35} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{41.50} + \frac{7}{50.57} = \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{35}\right) + \left(\frac{1}{35} - \frac{1}{41}\right) + \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{57}\right) = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{7}{31.38} + \frac{5}{38.43} + \frac{3}{43.46} + \frac{11}{46.57} = \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{38}\right) + \left(\frac{1}{38} - \frac{1}{43}\right) + \left(\frac{1}{43} - \frac{1}{46}\right) + \left(\frac{1}{46} - \frac{1}{57}\right) = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{A}{5} = \frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{5}{2}.$$

Bài 14. Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết :

$$A = \frac{1}{1.300} + \frac{1}{2.301} + \frac{1}{3.302} + \dots + \frac{1}{101.400} \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{1.102} + \frac{1}{2.103} + \frac{1}{3.104} + \dots + \frac{1}{299.400}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} 299A &= \frac{299}{1.300} + \frac{299}{2.301} + \dots + \frac{299}{101.400} \\ \Rightarrow 299A &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{300}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{301}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{302}\right) + \dots + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{400}\right) \\ \Rightarrow 299A &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101}\right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \dots + \frac{1}{400}\right) \\ 101B &= \frac{101}{1.102} + \frac{101}{2.103} + \frac{101}{3.104} + \dots + \frac{101}{299.400} \\ \Rightarrow 101B &= \left(1 - \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{103}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{104}\right) + \dots + \left(\frac{1}{299} - \frac{1}{400}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 101B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{299}\right) - \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{400}\right)$$

$$\Rightarrow 101B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101}\right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \dots + \frac{1}{400}\right)$$

Khi đó : $299A = 101B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{101}{299}$.

Dạng 3. SO SÁNH:

I. Phương pháp giải. Bản chất của bài toán là thu gọn tổng S, kết hợp đánh giá phân số trong một số trường hợp.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho biểu thức $S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{4n-2}} - \frac{1}{2^{4n}} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2020}}$

Chúng tỏ $S < 0,2$

Lời giải

Xét $\frac{1}{2^2} \cdot S = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \dots + \frac{1}{2^{2016}} - \frac{1}{2^{2018}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} \cdot S + S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2020}} \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot S < \frac{1}{4} \Rightarrow S < \frac{1}{5}$$

hay $S < 0,2$

Bài 2. Cho biểu thức: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2}$

Chúng tỏ rằng $A < 1$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A < \frac{9}{10} < 1$$

Vậy $A < 1$

Bài 3. So sánh:

a, $A = \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006}$ và $B = \frac{2004 + 2005}{2005 + 2006}$

b, $A = \frac{2000}{2001} + \frac{2001}{2002}$ và $B = \frac{2000 + 2001}{2002 + 2002}$

Lời giải

$$a, B = \frac{2004 + 2005}{4011} = \frac{2004}{4011} + \frac{2005}{4011} < \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006} = A$$

Vậy $A > B$

$$b, B = \frac{2000 + 2001}{4004} = \frac{2000}{4004} + \frac{2001}{4004} < \frac{2000}{2001} + \frac{2001}{2002} = A$$

Vậy $A > B$

Bài 4. So sánh:

$$a, A = \frac{1985.1987 - 1}{1980 + 1985.1986} \text{ và } 1$$

$$b, A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.54} \text{ và } B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 548}$$

Lời giải

$$a, A = \frac{1985.(1986+1) - 1}{1980 + 1985.1986} = \frac{1985.1986 + 1985 - 1}{1980 + 1985.1986} = \frac{1985.1986 + 1984}{1985.1986 + 1980} > 1$$

$$b, A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{4.(11.13 - 22.26)} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} \text{ và } B = \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137}$$

$$\text{Mà: } \frac{1}{4} > \frac{1}{137} \Rightarrow A > B$$

Bài 5. So sánh:

$$a, A = \frac{33.10^3}{2^3.5.10^3 + 7000} \text{ và } B = \frac{3774}{5217}$$

$$b, A = \frac{244.395 - 151}{244 + 395.243} \text{ và } B = \frac{423134.846267 - 423133}{423133.846267 + 423134}$$

Lời giải

$$a, 7000 = 7.10^3 \Rightarrow A = \frac{33}{47} \text{ và } B = \frac{34}{47} \Rightarrow A < B$$

$$b, A = \frac{(243+1).395 - 151}{244 + 395.243} = \frac{243.395 + 395 - 151}{244 + 395.243} = \frac{243.395 + 244}{244 + 395.243} = 1,$$

Tương tự ta có: Tử số của B là

$$(423133+1).846267 - 423133 = 423133.846267 + 846267 - 423133 = 423133.846267 + 423134 \text{ bằng với mẫu số của } B \text{ nên } B=1.$$

Vậy $A = B$

$$\text{Bài 6. So sánh } M = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52} \text{ và } N = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 548}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{5(11.13 - 22.26)}{4(11.13 - 22.26)} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} \text{ và } N = \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137}$$

$$\text{Bài 7. So sánh: } A = \frac{244.395 - 151}{244 + 395.243} \text{ và } B = \frac{423134.846267 - 423133}{423133.846267 + 423134}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A \text{ có } TS = (243+1)395 - 151 = 243.395 + 395 - 151 = 243.395 + 244 = MS \Rightarrow A = 1$$

$$\text{Và } TS = (423133+1)846267 - 423133 = 423133.846267 + 846267 - 423133 = 423133.846267 + 423134 = MS \Rightarrow B = 1$$

Bài 8. So sánh:

$$a, A = \frac{1919.171717}{191919.1717} \text{ và } B = \frac{18}{19}$$

$$b, A = \frac{4}{7} + 5 + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \frac{6}{7^4} \text{ và } B = \frac{5}{7^4} + 5 + \frac{6}{7^2} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}$$

Lời giải

a, Ta có : $A = \frac{19.101.17.10101}{19.10101.17.101} = 1 > \frac{18}{19} = B$

b, Ta có :

$$A = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{6}{7^4}\right) = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4} + \frac{1}{7^4}\right)$$

$$B = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{6}{7^2} + \frac{5}{7^4}\right) = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4}\right)$$

Mà: $\frac{1}{7^4} = \frac{1}{2401} < \frac{3}{7^2} = \frac{3}{49}$

Bài 9.So sánh:

a, $A = \frac{10}{2^7} + \frac{10}{2^6}$ và $B = \frac{11}{2^7} + \frac{9}{2^6}$

b, $A = \frac{10}{2^7} + \frac{9}{2^6} + \frac{1}{2^6}$ và $B = \frac{10}{2^7} + \frac{9}{2^6} + \frac{1}{2^7}$

Lời giải

a, Ta có : $A = \frac{10}{2^7} + \frac{10}{2^6} = \frac{10}{2^7} + \frac{9}{2^6} + \frac{1}{2^6}$

$$B = \frac{11}{2^7} + \frac{9}{2^6} = \frac{10}{2^7} + \frac{1}{2^7} + \frac{9}{2^6}, \text{ mà: } \frac{1}{2^6} > \frac{1}{2^7} \Rightarrow A > B$$

b, Ta có : $\frac{1}{2^6} > \frac{1}{2^7} \Rightarrow A > B$

Bài 10.So sánh:

a, $M = \frac{7.9 + 14.27 + 21.36}{21.27 + 42.81 + 63.108}$ và $B = \frac{37}{333}$

b, $A = \frac{19}{41} + \frac{23}{53} + \frac{29}{61}$ và $B = \frac{21}{41} + \frac{23}{45} + \frac{33}{65}$

Lời giải

a, Rút gọn M ta có: $A = \frac{7.9(1 + 2.3 + 3.4)}{21.29(1 + 2.3 + 3.4)} = \frac{1}{9}$

$$B = \frac{37:37}{333:37} = \frac{1}{9}$$

Vậy: $A = B$

b, $A = \frac{19}{41} + \frac{23}{53} + \frac{29}{61} < \frac{19}{38} + \frac{23}{46} + \frac{29}{58} = \frac{3}{2}$ và $B = \frac{21}{41} + \frac{23}{45} + \frac{33}{65} > \frac{21}{42} + \frac{23}{46} + \frac{33}{66} = \frac{3}{2}$

Vậy $A < B$

Bài 11.So sánh:

a, $A = \frac{12}{14^{11}} + \frac{23}{14^{12}}$ và $B = \frac{12}{14^{12}} + \frac{23}{14^{11}}$

b, $A = \frac{5^0 + 5^1 + \dots + 5^9}{5^0 + 5^1 + \dots + 5^8}$ và $B = \frac{3^0 + 3^1 + \dots + 3^9}{3^0 + 3^1 + \dots + 3^8}$

Lời giải

a, Ta có : $A = \frac{12}{14^{11}} + \frac{23}{14^{12}} = \frac{12}{14^{11}} + \frac{12}{14^{12}} + \frac{11}{14^{12}}$

$$B = \frac{12}{14^{12}} + \frac{23}{14^{11}} = \frac{12}{14^{11}} + \frac{11}{14^{11}} + \frac{12}{14^{12}}, \text{ mà: } \frac{11}{14^{12}} < \frac{11}{14^{11}} \Rightarrow A < B$$

b, Ta có : $A = \frac{1 + 5(5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^8)}{5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^8} = \frac{1}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^8} + 5 > 2 + 3$

$$B = \frac{1 + 3(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^8)}{3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^8} = \frac{1}{3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^8} + 3$$

Nhận thấy $\frac{1}{3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^8} < 2 \Rightarrow A > B$

Bài 12.So sánh:

a, $A = \frac{n}{n+1}$ và $B = \frac{n+2}{n+3}$ ($n > 0$)

b, $A = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ và $B = \frac{n^2+3}{n^2+4}$ ($n > 1$)

Lời giải

a, Ta có : $A = \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow A < \frac{n+2}{n+1+2} = \frac{n+2}{n+3} = B$

b, Ta có : $A = \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{n^2+1-2}{n^2+1} = 1 + \frac{-2}{n^2+1}$

Và $B = \frac{n^2+3}{n^2+4} = \frac{n^2+4-1}{n^2+4} = 1 + \frac{-1}{n^2+4} = 1 + \frac{-2}{2n^2+8}$

Mà: $\frac{-2}{n^2+1} < \frac{-2}{2n^2+8} \Rightarrow A < B$

Bài 13.So sánh:

a, $A = \frac{10}{50^{10}} + \frac{10}{50^8}$ và $B = \frac{11}{50^{10}} + \frac{9}{50^8}$

b, $A = \frac{2016}{100^{20}} + \frac{2016}{100^{30}}$ và $B = \frac{2017}{100^{20}} + \frac{2015}{100^{30}}$

HD:

a, $A = \frac{10}{50^{10}} + \frac{9}{50^8} + \frac{1}{50^8}$ và $B = \frac{10}{50^{10}} + \frac{1}{50^{10}} + \frac{9}{50^8}$

Mà: $\frac{1}{50^8} > \frac{1}{50^{10}} \Rightarrow A > B$

b, $A = \frac{2016}{100^{20}} + \frac{2015}{100^{30}} + \frac{1}{100^{30}}$ và $B = \frac{2016}{100^{20}} + \frac{1}{100^{20}} + \frac{2015}{100^{30}}$, mà: $\frac{1}{100^{30}} < \frac{1}{100^{20}} \Rightarrow A < B$

Bài 14.So sánh:

a, $A = \frac{n}{n+3}$ và $B = \frac{n-1}{n+4}$

b, $A = \frac{n}{2n+1}$ và $B = \frac{3n+1}{6n+3}$

Lời giải

a, $A = \frac{n}{n+3} > \frac{n-1}{n+3} > \frac{n-1}{n+4} = B$

b, $A = \frac{n}{2n+1} = \frac{3n}{6n+3} < \frac{3n+1}{6n+3} = B$

Bài 15.So sánh:

a, $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ và $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$

b, $A = \frac{2003.2004-1}{2003.2004}$ và $B = \frac{2004.2005-1}{2004.2005}$

Lời giải

a, $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{4}{8^4}$, và $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4}$

Mà: $\frac{4}{8^4} < \frac{4}{8^3} \Rightarrow A < B$

b, $A = 1 + \frac{-1}{2003.2004}$, $B = 1 + \frac{-1}{2004.2005}$

Mà: $\frac{-1}{2003.2004} < \frac{-1}{2004.2005} \Rightarrow A < B$

Bài 16.So sánh :

a, $A = \frac{2^{2010}+1}{2^{2007}+1}$ và $B = \frac{2^{2012}+1}{2^{2009}+1}$

b, $A = \frac{3^{123}+1}{3^{125}+1}$ và $B = \frac{3^{122}}{3^{124}+1}$

Lời giải

a, $A = \frac{2^{2010} + 2^3 - 7}{2^{2007} + 1} = 2^3 - \frac{7}{2^{2002} + 1}$ $B = \frac{2^{2012} + 2^3 - 7}{2^{2009} + 1} = 2^3 - \frac{7}{2^{2009} + 1}$

b, $A = \frac{3^{123} + \frac{1}{3^2} + \frac{8}{9}}{3^{125} + 1} = \frac{\frac{1}{3^2}(3^{125} + 1) + \frac{8}{9}}{3^{125} + 1} = \frac{1}{3^2} + \frac{\frac{8}{9}}{3^{125} + 1}$

Tương tự : $B = \frac{1}{3^2} + \frac{\frac{8}{9}}{3^{124} + 1}$

Bài 17. So sánh : $A = \frac{2}{60.63} + \frac{2}{63.66} + \dots + \frac{2}{117.120} + \frac{2}{2011}$ và

$B = \frac{5}{40.44} + \frac{5}{44.48} + \frac{5}{48.52} + \dots + \frac{5}{76.80} + \frac{5}{2011}$

Lời giải

$$3A = 2 \left(\frac{3}{60.63} + \frac{3}{63.66} + \dots + \frac{3}{117.120} + \frac{3}{2011} \right) = 2 \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{120} + \frac{3}{2011} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{120} + \frac{3}{2011} \right) = \frac{1}{60} + \frac{6}{2011}$$

$A = \frac{1}{180} + \frac{2}{2011}$

$$4B = 5 \left(\frac{4}{40.44} + \frac{4}{44.48} + \dots + \frac{4}{76.80} + \frac{4}{2011} \right) = 5 \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{80} + \frac{4}{2011} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1}{80} + \frac{4}{2011} \right) = \frac{1}{16} + \frac{20}{2011}$$

$B = \frac{1}{64} + \frac{5}{2011} > \frac{1}{180} + \frac{2}{2011} = A$

Bài 18. So sánh tổng $S = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{41} + \frac{1}{42}$ với $\frac{1}{2}$

Lời giải

$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ và $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} < \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{1}{20}$ nên $S < \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$

Bài 19.

So sánh: $A = \frac{-9}{10^{2012}} + \frac{-19}{10^{2011}}$ và $B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2012}}$

Lời giải

$A = \frac{-9}{10^{2012}} + \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2011}}$

$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2012}} + \frac{-10}{10^{2012}}$, Mà: $\frac{-10}{10^{2011}} < \frac{-10}{10^{2012}} \Rightarrow A < B$

Bài 20. So sánh $A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$ với $B = 4$

Lời giải

$A = \frac{2007-1}{2007} + \frac{2008-1}{2008} + \frac{2009-1}{2009} + \frac{2006+3}{2006} = 4 + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2008} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2009} > 4$

ĐS7.III.TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN HAY VỀ DÃY SỐ VÀ DÃY PHÂN SỐ TỪ CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI.

Bài 1.ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 7-PHÒNG GD -ĐT THÁI THỤY- NĂM HỌC 2020 - 2021

Cho $A = 1 - \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \dots - \left(\frac{3}{4}\right)^{2019} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2020}$

- a. Tính A .
- b. Chứng minh A không là số nguyên.

Lời giải

a. $\frac{3}{4}A = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \dots - \left(\frac{3}{4}\right)^{2020} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2021}$

$$\frac{3}{4}A + A = \left(\frac{3}{4}\right)^{2021} + 1$$

$$A = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2021} + 1}{\frac{3}{4} + 1}$$

b. Ta có $\left(\frac{3}{4}\right)^{2021} < \frac{3}{4}$

Nên $\left(\frac{3}{4}\right)^{2021} + 1 < \frac{3}{4} + 1$

Suy ra $A < 1$ (tử nhỏ hơn mẫu), mà $A > 0$ (do tử và mẫu đều dương). Nên $0 < A < 1$
Vậy A không thể là số nguyên.

Bài 2.ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 7 HUYỆN THANH TRÌ - NĂM HỌC 2020 - 2021

Cho $B = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{2021^2} - 1\right)$. So sánh B và $\frac{1}{2}$

Lời giải

$$B = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{2021^2} - 1\right) = \left(\frac{1-2^2}{2^2}\right)\left(\frac{1-3^2}{3^2}\right)\left(\frac{1-4^2}{4^2}\right)\dots\left(\frac{1-2021^2}{2021^2}\right)$$

$$= \left(\frac{-1.3}{2^2}\right)\left(\frac{-2.4}{3^2}\right)\left(\frac{-3.5}{4^2}\right)\dots\left(\frac{-2020.2022}{2021^2}\right)$$

$$= \frac{-1.3}{2^2} \cdot \frac{-2.4}{3^2} \cdot \frac{-3.5}{4^2} \dots \frac{-2020.2022}{2021^2}$$

$$= \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-2020)}{2.3.4\dots 2021} \cdot \frac{3.4.5\dots 2022}{2.3.4\dots 2021}$$

$$= \frac{1}{2021} \cdot \frac{2022}{2}$$

$$= \frac{1011}{2021} > \frac{1011}{2022} = \frac{1}{2}$$

Vậy $B > \frac{1}{2}$

Bài 3. KỶ THI CHỌN LỚP CHẤT LƯỢNG CAO - PHÒNG GD - ĐT HÀ TRUNG - NĂM HỌC 2020 - 2021

Thực hiện phép tính:

$$C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \left(1 + \frac{1}{4.6}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{98.100}\right).$$

Lời giải

$$C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \left(1 + \frac{1}{4.6}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{98.100}\right).$$

$$= \frac{1.3+1}{1.3} \cdot \frac{2.4+1}{2.4} \cdot \frac{3.5+1}{3.5} \cdot \frac{4.6+1}{4.6} \dots \frac{98.100+1}{98.100}$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)+1}{1.3} \cdot \frac{(3-1)(3+1)+1}{2.4} \cdot \frac{(4-1)(4+1)+1}{3.5} \cdot \frac{(5-1)(5+1)+1}{4.6} \dots \frac{(99-1)(99+1)+1}{98.100}$$

$$= \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{5.5}{4.6} \dots \frac{99.99}{98.100} = \frac{2.99}{1.100} = \frac{99}{50}$$

Bài 4. KỶ THI CHỌN LỚP CHẤT LƯỢNG CAO - PHÒNG GD - ĐT HÀ TRUNG - NĂM HỌC 2020 - 2021

Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2020^2}$. Chứng minh $A < 1$.

Lời giải

Ta có $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2020}$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} = 1 - \frac{1}{2020} < 1$$

Vậy $A < 1$.

Bài 5. ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI PHÒNG GD -ĐT QUẬN HÀ ĐÔNG - NĂM HỌC: 2017-2018

Tìm x biết:

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right| + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{3^2}\right) \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{2018^2}\right)$$

Lời giải

Tính được : $\left(\frac{1}{49} - \frac{1}{3^2}\right) \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{7^2}\right) \dots \left(\frac{1}{47} - \frac{1}{2018^2}\right) = 0$ vì $\left(\frac{1}{49} - \frac{1}{7^2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3, 2) + \frac{2}{5} \right| + 0$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| -\frac{14}{5} \right|$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{3} \right| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = 2 \\ x + \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Kết luận: Vậy $x = \frac{5}{3}$ hoặc $x = -\frac{7}{3}$

Bài 6. KỶ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI - PHÒNG GD - ĐT HUYỆN Ý YÊN - NĂM HỌC: 2014-2015

Thực hiện phép tính

$$\left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{44.49} \right) \cdot \frac{1-3-5-7-\dots-49}{89}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{44.49} \right) \cdot \frac{1-3-5-7-\dots-49}{89} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{5}{4.9} + \frac{5}{9.14} + \frac{5}{14.19} + \dots + \frac{5}{44.49} \right) \cdot \frac{1-(3+5+7+\dots+49)}{89} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{44} - \frac{1}{49} \right) \cdot \frac{1-(3+49).24:2}{89} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right) \cdot \frac{-623}{89} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{45}{4.49} \cdot \frac{-623}{89} \\ &= -\frac{9}{28} \end{aligned}$$

Bài 7. ĐỀ THI OLIMPIC LỚP 7 - PHÒNG GD&ĐT THANH OAI - Năm học: 2016-2017

Cho 2016 số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2016}$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2016}} = 300.$$

Chứng tỏ rằng tồn tại ít nhất hai số trong 2016 số đã cho bằng nhau.

Lời giải

Giả sử: $a_{2016} > a_{2015} > a_{2014} > \dots > a_1 \geq 1$

$$\Rightarrow a_{2016} \geq 2016, a_{2015} \geq 2015, \dots, a_1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2015}} + \frac{1}{a_{2016}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016}$$

$$\Leftrightarrow 300 \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} < \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow 300 < \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \frac{2008}{8} < 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 251 = 259 \text{ (điều này vô lý)}$$

Vậy tồn tại ít nhất hai số trong 2016 số đã cho bằng nhau.

Bài 8. ĐỀ HSG TOÁN 7 - PHÒNG GD VÀ ĐT TIỀN HẢI - NĂM 2020-2021

Tính $A = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2021} - 1\right)$

Lời giải

$$A = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2021} - 1\right)$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \dots \frac{-2020}{2021}$$

$$= \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \dots (-2020)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2021}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2020}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2021}$$

$$= \frac{1}{2021}$$

Bài 9. ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC: 2020 – 2021- PHÒNG GD&ĐT HUYỆN CHƯƠNG MỸ

Cho biểu thức: $B = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2021^3}$. Chứng minh rằng: $B < \frac{1}{2^2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2^3} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\frac{1}{4^3} < \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}$$

...

$$\frac{1}{2021^3} < \frac{1}{2020 \cdot 2021 \cdot 2022}$$

Do đó $B < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021 \cdot 2022}$

Mà $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021 \cdot 2022}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{2020.2021.2022} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2020.2021} - \frac{1}{2021.2022} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2021.2022} \right) < \frac{1}{2^2} \end{aligned}$$

Suy ra $B < \frac{1}{2^2}$

Vậy $B < \frac{1}{2^2}$

Bài 10.

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Ta thấy $A > \frac{25}{75} + \frac{25}{100} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

Và $A < \frac{25}{50} + \frac{25}{75} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Vậy $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$