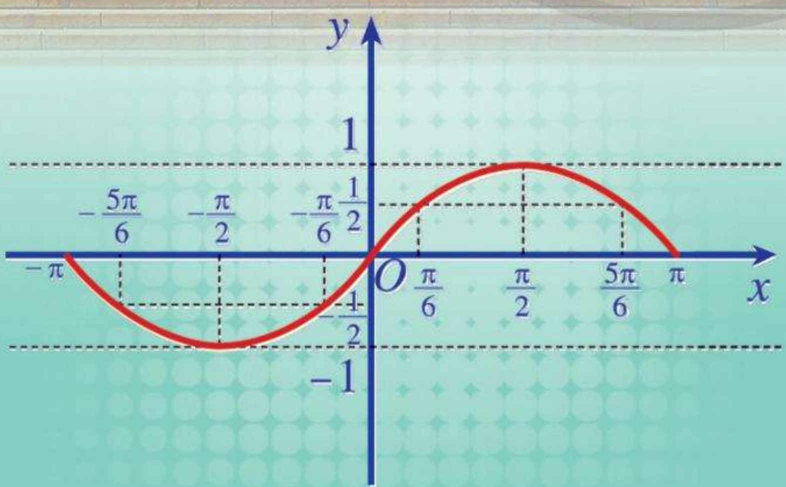
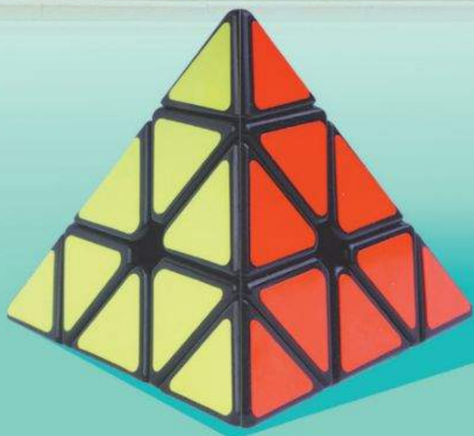
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

Toán 11

TẬP MỘT

BẢN MẪU





CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN - THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA
Môn: Toán – Lớp 11

(Kèm theo Quyết định số 2026/QĐ-BGDĐT ngày 21 tháng 7 năm 2022 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Họ và tên	Chức vụ Hội đồng
Ông Lê Mậu Hải	Chủ tịch
Bà Cao Thị Hà	Phó Chủ tịch
Ông Phạm Đức Tài	Uỷ viên, Thư kí
Ông Phạm Khắc Ban	Uỷ viên
Ông Nguyễn Hắc Hải	Uỷ viên
Ông Nguyễn Doãn Phú	Uỷ viên
Ông Nguyễn Chiến Thắng	Uỷ viên
Bà Nguyễn Thị Vĩnh Thuyên	Uỷ viên
Ông Đinh Cao Thượng	Uỷ viên
Bà Vũ Thị Như Trang	Uỷ viên
Ông Phạm Đình Tùng	Uỷ viên

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

Toán 11

TẬP MỘT

BẢN MẪU

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH

CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG
Gợi mở vấn đề, dẫn dắt học sinh vào bài học

HOẠT ĐỘNG
Giúp học sinh phân tích, kiến tạo kiến thức mới với sự hướng dẫn của giáo viên

KHÁM PHÁ KIẾN THỨC
Phát hiện kiến thức mới từ hoạt động

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM
Nội dung kiến thức trọng tâm

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG
- Sử dụng những kiến thức vừa học để làm những bài tập cơ bản
- Vận dụng kiến thức đã biết để giải quyết vấn đề, đặc biệt những vấn đề thực tiễn

LƯU Ý
Những kiến thức, kĩ năng cần lưu ý thêm

TÌM HIỂU THÊM. TÌM TÒI – MỞ RỘNG
Giúp học sinh tìm hiểu thêm những kiến thức mới góp phần mở rộng nội dung bài học

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Các em học sinh lớp 11 yêu quý!

Năm học này, chúng ta lại vui mừng gặp nhau qua cuốn sách Toán 11. Sách Toán 11 tiếp tục giúp các em có thêm nhiều hiểu biết về đại số (như: hàm số lượng giác, dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân, hàm số mũ và hàm số lôgarit), một số yếu tố giải tích (như: giới hạn, hàm số liên tục, đạo hàm). Ở những lớp dưới, các em đã được học hình học phẳng, môn học giúp các em tìm hiểu tính chất của các hình trong mặt phẳng. Ngoài ra, các em cũng đã được làm quen với những hình khối trong không gian. Để tìm hiểu sâu sắc hơn tính chất của các hình trong không gian, các em sẽ được nghiên cứu hình học không gian. Các em cũng được tiếp tục làm quen với thống kê và xác suất; tiến hành những hoạt động thực hành và trải nghiệm; đặc biệt về những hoạt động tài chính đơn giản; sử dụng phần mềm toán học trong thực hành tính toán và vẽ hình hình học. Qua đó giúp các em hiểu biết thêm những công cụ quan trọng của toán học trong việc giải quyết các vấn đề thực tiễn.

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những câu chuyện lí thú về khoa học tự nhiên, về văn hoá và nghệ thuật, kiến trúc, thể thao và du lịch. Từ đó, các em được tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là được "làm giàu" về vốn văn hoá chung và có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học – Đưa bài học vào cuộc sống".

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với các thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học toán và có thêm nhiều niềm vui.

Các tác giả

MỤC LỤC

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: góc lượng giác, giá trị lượng giác của góc lượng giác; các phép biến đổi lượng giác; hàm số lượng giác và đồ thị; phương trình lượng giác cơ bản.

§1 GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Trên mặt chiếc đồng hồ, kim giây đang ở vị trí ban đầu chỉ vào số 3 (*Hình 1*). Kim giây quay ba vòng và một phần tư vòng (tức là $3\frac{1}{4}$ vòng) đến vị trí cuối chỉ vào số 6. Khi quay như thế, kim giây đã quét một góc với tia đầu chỉ vào số 3, tia cuối chỉ vào số 6.

Hình 1

Góc đó gợi nên khái niệm gì trong toán học?
Những góc như thế có tính chất gì?

I. GÓC LƯỢNG GIÁC

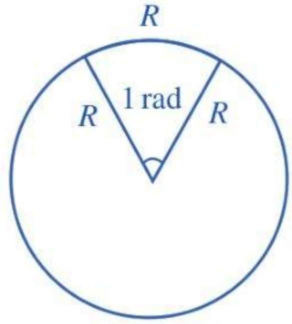
1. Góc hình học và số đo của chúng

1 Nêu định nghĩa góc trong hình học phẳng.

Như chúng ta đã biết, góc (còn được gọi là góc hình học) là hình gồm hai tia chung gốc. Mỗi góc có một số đo, đơn vị đo góc (hình học) là độ. Cụ thể như sau: Nếu ta chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn mỗi cung đó là 1°.

Số đo của một góc (hình học) không vượt quá 180°.

Một đơn vị khác được sử dụng nhiều khi đo góc là radian (đọc là ra-đi-an). Nếu trên đường tròn, ta lấy một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì góc ở tâm chắn cung đó gọi là góc có *số đo* 1 *radian*, gọi tắt là *góc* 1 *radian* (*Hình* 2). 1 radian còn viết tắt là 1 rad.



Hình 2

Nhận xét

Ta biết góc ở tâm có số đo 180^o sẽ chắn cung bằng nửa đường tròn (có độ dài bằng πR) nên số đo góc 180^o bằng $\frac{\pi R}{R}$ rad $= \pi$ rad.

Do đó, 1 rad $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^o \approx 57^o17'45''$ và $1^o = \left(\frac{\pi}{180}\right)$rad $\approx 0{,}0175$ rad.

Chú ý: Người ta thường không viết chữ radian hay rad sau số đo của góc. Chẳng hạn, $\frac{\pi}{2}$ rad cũng được viết là $\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 1 Hãy hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt sau.

Độ	30^o	?	60^o	?	120^o	?	180^o
Radian	?	$\frac{\pi}{4}$	?	$\frac{\pi}{2}$	?	$\frac{3\pi}{4}$	?

Giải

Ta có bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt.

Độ	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	180^o
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

1 Hãy hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc sau.

Độ	18^o	?	72^o	?
Radian	?	$\frac{2\pi}{9}$	?	$\frac{5\pi}{6}$

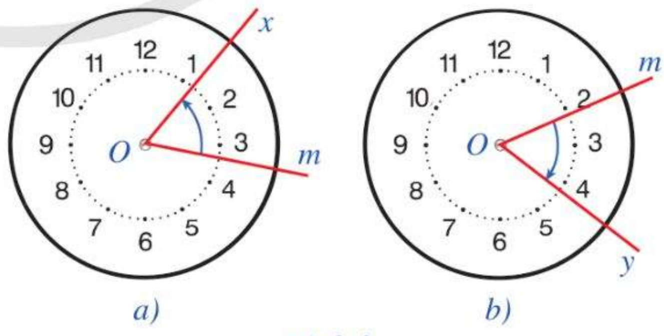
2. Góc lượng giác và số đo của chúng

a) Khái niệm

2 So sánh chiều quay của kim đồng hồ với:

a) Chiều quay từ tia *Om* đến tia *Ox* trong *Hình 3a*.

b) Chiều quay từ tia *Om* đến tia *Oy* trong *Hình 3b*.

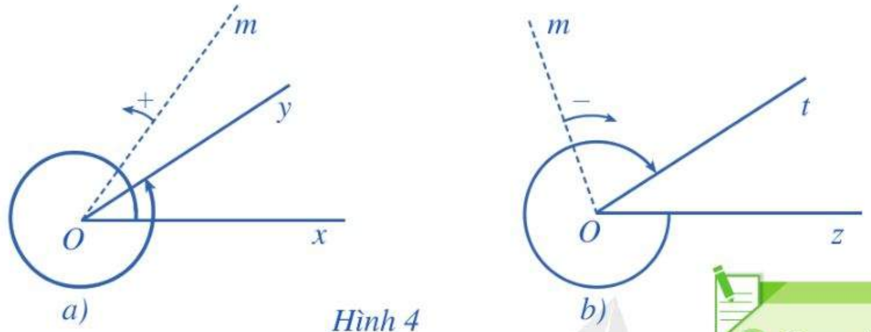


Hình 3

Để khảo sát việc quay tia *Om* quanh điểm *O* trong mặt phẳng, ta cần chọn một chiều quay gọi là *chiều dương*. Thông thường, ta chọn chiều dương là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ và chiều cùng chiều quay của kim đồng hồ gọi là *chiều âm*.

Cho hai tia Ou, Ov. Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói: Tia Om quét một *góc lượng giác* với tia đầu Ou và tia cuối Ov, kí hiệu là (Ou, Ov).

Ví dụ 2 Đọc tên góc lượng giác, tia đầu và tia cuối của góc lượng giác đó trong *Hình 4a*.



Hình 4

Giải:

Trong *Hình 4a*, góc lượng giác là (Ox, Oy) với tia đầu Ox và tia cuối Oy.

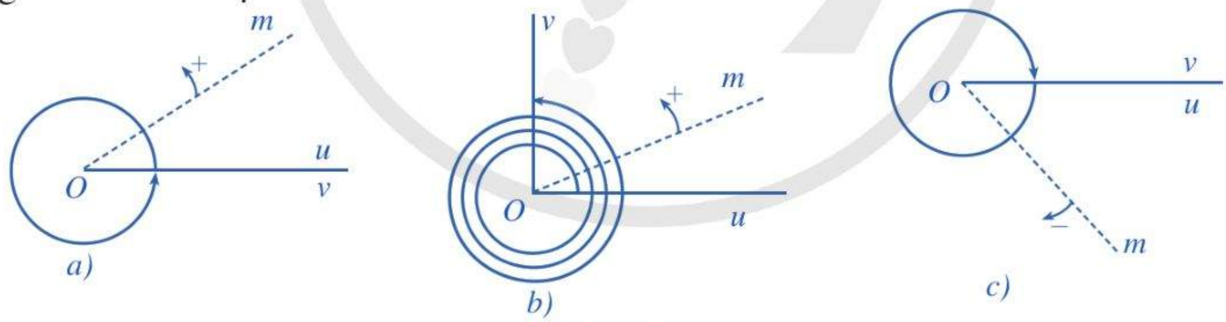
2 Đọc tên góc lượng giác, tia đầu và tia cuối của góc lượng giác đó trong *Hình 4b*.

3

a) Trong *Hình 5a*, tia Om quay theo chiều dương đúng một vòng. Hỏi tia đó quét nên một góc bao nhiêu độ?

b) Trong *Hình 5b*, tia Om quay theo chiều dương ba vòng và một phần tư vòng (tức là $3\frac{1}{4}$ vòng). Hỏi tia đó quét nên một góc bao nhiêu độ?

c) Trong *Hình 5c*, tia Om quay theo chiều âm đúng một vòng. Hỏi tia đó quét nên một góc bao nhiêu độ?



Hình 5

Nhận xét: Khi tia Om quay góc a° thì góc lượng giác mà tia đó quét nên có *số đo* a° (hay $\frac{\pi a}{180}$ rad). Vì thế, mỗi một góc lượng giác đều có một số đo, đơn vị đo góc lượng giác là độ hoặc radian. Nếu góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng α thì ta kí hiệu là sđ$(Ou, Ov) = \alpha$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha$.

Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou, tia cuối Ov và số đo của góc đó.

Ví dụ 3 Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác trong mỗi trường hợp sau:

a) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo 510°;

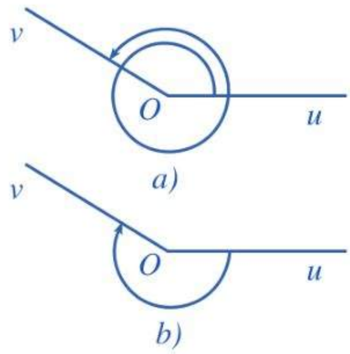
b) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo $-\dfrac{7\pi}{6}$.

Giải

a) Ta có $510^{\circ} = 360^{\circ} + 150^{\circ}$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo 510° được biểu diễn ở *Hình 6a*.

b) Ta có $-\dfrac{7\pi}{6} = -\pi + \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo $-\dfrac{7\pi}{6}$ được biểu diễn ở *Hình 6b*.

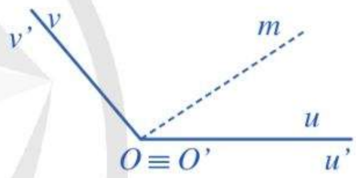
3 Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo $-\dfrac{5\pi}{4}$.



Hình 6

b) Tính chất

4 Trong *Hình 7*, hai góc lượng giác (Ou, Ov), $(O'u', O'v')$ có tia đầu trùng nhau $Ou \equiv O'u'$, tia cuối trùng nhau $Ov \equiv O'v'$. Nêu dự đoán về mối liên hệ giữa số đo của hai góc lượng giác trên.



Hình 7

Nhận xét: Quan sát *Hình 7* ta thấy:

- Tia Om quay (chỉ theo chiều dương) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov rồi quay tiếp một số vòng đến trùng với tia cuối Ov;
- Tia Om quay (chỉ theo chiều dương) xuất phát từ tia $O'u' \equiv Ou$ đến trùng với tia $O'v' \equiv Ov$ rồi quay tiếp một số vòng đến trùng với tia cuối $O'v' \equiv Ov$.

Như vậy, sự khác biệt giữa hai góc lượng giác (Ou, Ov), $(O'u', O'v')$ chính là số vòng quay quanh điểm O. Vì vậy, sự khác biệt giữa số đo của hai góc lượng giác đó chính là bội nguyên của 360° khi hai góc đó tính theo đơn vị độ (hay bội nguyên của 2π rad khi hai góc đó tính theo đơn vị radian).

Người ta có thể chứng minh được định lí sau:

Cho hai góc lượng giác (Ou, Ov), $(O'u', O'v')$ có tia đầu trùng nhau $(Ou \equiv O'u')$, tia cuối trùng nhau $(Ov \equiv O'v')$. Khi đó, nếu sử dụng đơn vị đo là độ thì ta có:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k360^{\circ} \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

Nếu sử dụng đơn vị đo là radian thì công thức trên có thể viết như sau:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k2\pi \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

Ví dụ 4 Cho góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo 60^o. Cho góc lượng giác $(O'u', O'v')$ có tia đầu $O'u' \equiv Ou$, tia cuối $O'v' \equiv Ov$. Viết công thức biểu thị số đo góc lượng giác $(O'u', O'v')$.

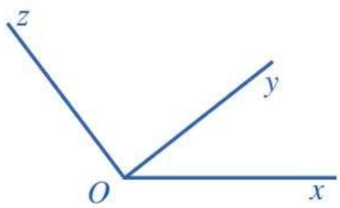
Giải

Ta có: $(O'u', O'v') = (Ou, Ov) + k360^o$

$= 60^o + k360^o$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4 Cho góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo $-\frac{4\pi}{3}$. Cho góc lượng giác $(O'u', O'v')$ có tia đầu $O'u' \equiv Ou$, tia cuối $O'v' \equiv Ov$. Viết công thức biểu thị số đo góc lượng giác $(O'u', O'v')$.

5 Cho góc (hình học) xOz, tia Oy nằm trong góc xOz (*Hình 8*). Nêu mối liên hệ giữa số đo của góc xOz và tổng số đo của hai góc xOy và yOz.



Hình 8

Người ta có thể chứng minh được định lí sau, gọi là *hệ thức Chasles* (Sa-lơ) về số đo của góc lượng giác:

Với ba tia tuỳ ý Ou, Ov, Ow, ta có:

$$(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 5 Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Tìm số đo của góc lượng giác (Ov, Ow).

Giải

Theo hệ thức Chasles, ta có:

$(Ov, Ow) = (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi$

$$= \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

5 Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{11\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của góc lượng giác (Ov, Ow).

II. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Trong mục này, ta sẽ mở rộng các giá trị lượng giác của góc hình học thành giá trị lượng giác của góc lượng giác. Đó là cơ sở để xây dựng các hàm số lượng giác (biến số thực), những hàm số quan trọng trong toán học, khoa học – kĩ thuật và trong thực tiễn.

1. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta quy ước: Chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm. Như vậy, mặt phẳng toạ độ Oxy đã được định hướng.

6

a) Trong mặt phẳng toạ độ (định hướng) Oxy, hãy vẽ đường tròn tâm O với bán kính bằng 1.

b) Hãy nêu chiều dương, chiều âm trên đường tròn tâm O với bán kính bằng 1.

Trong mặt phẳng toạ độ đã được định hướng Oxy, lấy điểm $A(1 ; 0)$. Đường tròn tâm O, bán kính $OA = 1$ được gọi là *đường tròn lượng giác* (hay *đường tròn đơn vị*) gốc A.

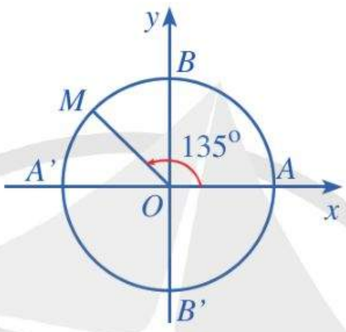
Chú ý: Các điểm $B(0 ; 1)$, $A'(-1 ; 0)$, $B'(0 ; -1)$ nằm trên đường tròn lượng giác.

Ví dụ 6 Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = 135^{\circ}$.

Giải

Gọi M là điểm chính giữa của cung BA' trên đường tròn lượng giác.

Ta có: $(OA, OM) = 135^{\circ}$ (*Hình 9*).



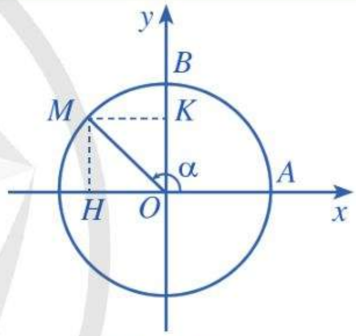
Hình 9

6 Xác định điểm N trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, ON) = -\dfrac{\pi}{3}$.

2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

7

a) Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = 60^{\circ}$.



Hình 10

b) So sánh: hoành độ của điểm M với $\cos 60^{\circ}$; tung độ của điểm M với $\sin 60^{\circ}$.

Trong trường hợp tổng quát, với mỗi góc lượng giác α, lấy điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$ (*Hình 10*).

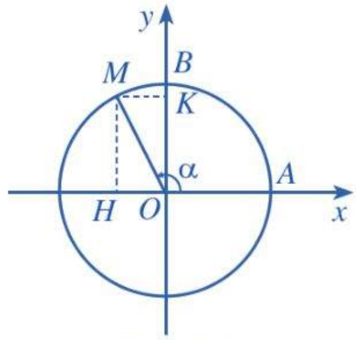
Gọi toạ độ của điểm M trong hệ toạ độ Oxy là $(x ; y)$.

- Hoành độ x của điểm M gọi là *côsin* của góc lượng giác α và kí hiệu $\cos\alpha$, $\cos\alpha = x$.
- Tung độ y của điểm M gọi là *sin* của góc lượng giác α và kí hiệu $\sin\alpha$, $\sin\alpha = y$.
- Nếu $\cos\alpha \neq 0$ thì tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là *tang* của góc lượng giác α và kí hiệu $\tan\alpha$, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- Nếu $\sin\alpha \neq 0$ thì tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là *côtang* của góc lượng giác α và kí hiệu $\cot\alpha$, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Ví dụ 7 Tìm các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = 120^o$.

Giải

Lấy điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha = 120^o$ (*Hình 11*). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các trục Ox, Oy.



Hình 11

Khi đó, ta có: $\widehat{AOM} = 120^o$, suy ra $\widehat{BOM} = \widehat{KOM} = 30^o$.

Theo hệ thức trong tam giác vuông KOM, ta có:

$OK = OM \,.\, \cos\widehat{KOM} = \cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và

$MK = OM \,.\, \sin\widehat{KOM} = \sin 30^o = \dfrac{1}{2}$. Do đó, $M\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Vậy:

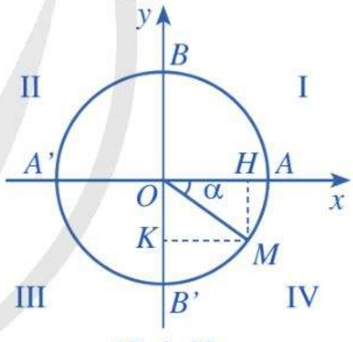
$\sin 120^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^o = -\dfrac{1}{2}$; $\tan 120^o = \dfrac{\sin 120^o}{\cos 120^o} = -\sqrt{3}$; $\cot 120^o = \dfrac{\cos 120^o}{\sin 120^o} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

7 Tìm giá trị lượng giác của góc lượng giác $\beta = -\dfrac{\pi}{4}$.

8 Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = -30^o$.

Dấu của các giá trị lượng giác của góc $\alpha = (OA, OM)$ phụ thuộc vào vị trí điểm M trên đường tròn lượng giác (*Hình 12*). Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau:

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–



Hình 12

Ví dụ 8 Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Giải

Do $-\pi < -\dfrac{3\pi}{4} < -\dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) < 0$; $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) < 0$; $\tan\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) > 0$; $\cot\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) > 0$.

8 Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

9 Cho góc lượng giác α. So sánh:

a) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ và 1;

b) $\tan\alpha \,.\, \cot\alpha$ và 1 với $\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$;

c) $1 + \tan^2\alpha$ và $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ với $\cos\alpha \neq 0$;

d) $1 + \cot^2\alpha$ và $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ với $\sin\alpha \neq 0$.

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ với mọi α;
- $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$ với $\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$;
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ với $\cos\alpha \neq 0$;
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ với $\sin\alpha \neq 0$.

Ví dụ 9 Cho góc lượng giác α sao cho $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\tan\alpha = -2$. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

Giải

Do $\tan\alpha = -2$ nên $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2$, suy ra $\sin\alpha = -2\cos\alpha$.

Vì $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ nên $\cos^2\alpha + (-2\cos\alpha)^2 = 1$, suy ra $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$. Do $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos\alpha > 0$.

Từ đó ta có: $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, suy ra $\sin\alpha = -2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

9 Cho góc lượng giác α sao cho $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ và $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$. Tìm $\cos\alpha$.

10 Tìm các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = 45^\circ$.

Bảng dưới đây nêu lên các giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

Ví dụ 10 Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \cos^2\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{4} + \cot^2\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2}.$$

Giải

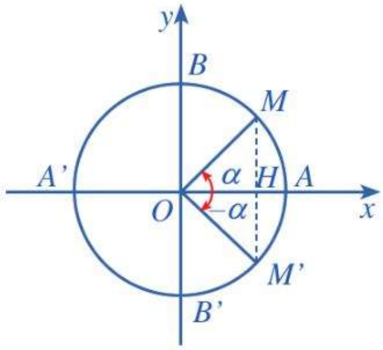
Ta có: $P = \cos^2\dfrac{\pi}{3} + \tan\dfrac{\pi}{4} + \cot^2\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1 = \dfrac{21}{4}$.

10 Tính giá trị của biểu thức:

$$Q = \tan^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}.$$

3. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

11 Trên đường tròn lượng giác, cho hai điểm M, M' sao cho góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$, góc lượng giác $(OA, OM') = -\alpha$ (*Hình 13*).



Hình 13

a) Đối với hai điểm M, M' nêu nhận xét về: hoành độ của chúng, tung độ của chúng.

b) Nêu mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác tương ứng của hai góc lượng giác α và $-\alpha$.

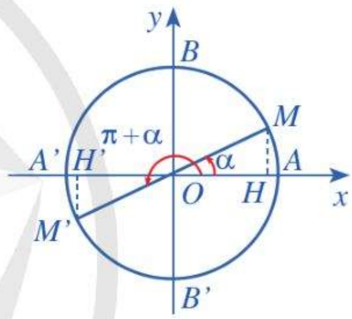
Ta có các công thức sau cho hai góc đối nhau (α và $-\alpha$):

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Ta cũng có các công thức sau cho:

• Hai góc hơn kém nhau π (α và $\alpha + \pi$) (*Hình 14*):

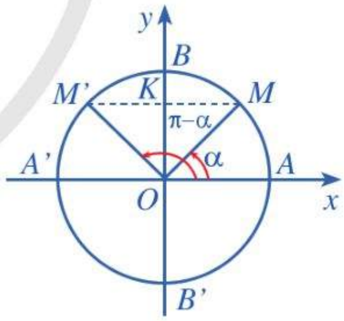
$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \qquad \tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$
$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \qquad \cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$$



Hình 14

• Hai góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$) (*Hình 15*):

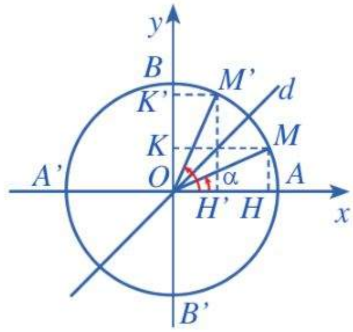
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$



Hình 15

• Hai góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$) (*Hình 16*):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$



Hình 16

Ví dụ 11 Tính:

a) $\sin\frac{13\pi}{4}$;   b) $\sin\frac{\pi}{10}-\cos\frac{2\pi}{5}$;

Giải

Ta có:

a) $\sin\frac{13\pi}{4}=\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\sin\frac{\pi}{10}-\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=0$;

11 Tính:

a) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$;

b) $\tan 1^o.\ \tan 2^o.\ \tan 45^o.\ \tan 88^o.\ \tan 89^o$.

4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc lượng giác khi biết số đo của góc đó. Cụ thể như sau:

- Nếu đơn vị của góc lượng giác là độ (^{o}), trước hết, ta chuyển máy tính sang chế độ "độ".

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\sin 35^o15'33''$	sin 3 5 °'" 1 5 °'" 3 3 °'" =	0.5772758359
$\tan(-205^o)$	tan – 2 0 5 =	– 0.4663076582

- Nếu đơn vị của góc lượng giác là radian (rad), trước hết, ta chuyển máy tính sang chế độ "radian".

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$	cos – 9 SHIFT π ÷ 7 =	– 0.6234898019
$\cot\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	1 ÷ tan 2 SHIFT π ÷ 5 =	0.3249196962

Ví dụ 12 Dùng máy tính cầm tay để tính:

a) $\sin 42^o35'13''$;   b) $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

12 Dùng máy tính cầm tay để tính:

a) $\tan(-75^o)$; b) $\cot\left(-\frac{\pi}{5}\right)$.

Giải

a)

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\sin 42^o35'13''$	sin 4 2 °'" 3 5 °'" 1 3 °'" =	0.6767082232

b)

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	cos 2 SHIFT π ÷ 5 =	0.3090169944

BÀI TẬP

1. Gọi M, N, P là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của các góc lượng giác (OA, OM), (OA, ON), (OA, OP) lần lượt bằng $\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}$. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.

2. Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau: 225^o; -225^o; $-1\,035^o$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{2}$; $-\frac{159\pi}{4}$.

3. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc sau:

a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

b) $k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

c) $\frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

d) $\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

4. Tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ với $-\pi < \alpha < 0$;

c) $\tan\alpha = 3$ với $-\pi < \alpha < 0$;

d) $\cot\alpha = -2$ với $0 < \alpha < \pi$.

5. Tính:

a) $A = \sin^2 5^o + \sin^2 10^o + \sin^2 15^o + ... + \sin^2 85^o$ (17 số hạng).

b) $B = \cos 5^o + \cos 10^o + \cos 15^o + ... + \cos 175^o$ (35 số hạng).

6. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1 h; 3 h; 5 h.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

§2 CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Ở lớp dưới, ta đã làm quen với một số phép tính trong tập hợp các số thực, chẳng hạn: phép tính luỹ thừa với số mũ tự nhiên và những công thức để tính toán hay biến đổi những biểu thức chứa các luỹ thừa như vậy. Việc lấy các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã hình thành nên những phép tính mới trong tập hợp các số thực, đó là những *phép tính lượng giác*.

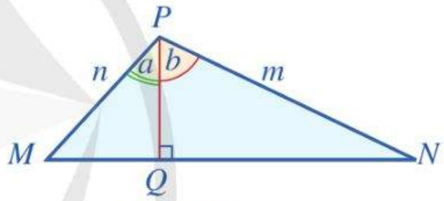
Có hay không những công thức để tính toán hay biến đổi những biểu thức chứa giá trị lượng giác?

I. CÔNG THỨC CỘNG

1 Cho tam giác *MNP* có đường cao *PQ* (*Hình 17*).

a) Viết công thức tính *PQ* theo cạnh n và góc a; công thức tính *PQ* theo cạnh m và góc b.

b) Viết công thức tính diện tích mỗi tam giác *MPQ*, *NPQ*, *MNP* theo các cạnh m, n và các góc a, b, $a + b$.



Hình 17

c) Sử dụng kết quả: $S_{MPN} = S_{MPQ} + S_{NPQ}$, hãy tìm công thức tính $\sin(a+b)$ theo $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$. Từ đó rút ra đẳng thức $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ (∗).

d) Tính $\sin(a - b)$ bằng cách biến đổi $\sin(a - b) = \sin[a + (-b)]$ và sử dụng công thức (*).

Trong trường hợp tổng quát, với các góc lượng giác a, b, ta có các công thức sau (thường được gọi chung là *công thức cộng* đối với sin):

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Ví dụ 1 Tính $\sin 75^\circ$.

Giải

Áp dụng công thức cộng, ta có:

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

1 Tính $\sin \dfrac{\pi}{12}$

2

a) Tính $\cos(a+b)$ bằng cách biến đổi $\cos(a+b)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(a+b)\right]=\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right]$ và sử dụng công thức cộng đối với sin.

b) Tính $\cos(a-b)$ bằng cách biến đổi $\cos(a-b)=\cos[a+(-b)]$ và sử dụng công thức $\cos(a+b)$ có được ở câu a.

Trong trường hợp tổng quát, với các góc lượng giác a, b, ta có các công thức sau (thường được gọi chung là *công thức cộng* đối với côsin):

- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

Ví dụ 2 Tính $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Giải

Áp dụng công thức cộng, ta có:

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2 Tính $\cos 15^{\circ}$.

3

a) Sử dụng công thức cộng đối với sin và côsin, hãy tính $\tan(a+b)$ theo $\tan a$ và $\tan b$ khi các biểu thức đều có nghĩa.

b) Khi các biểu thức đều có nghĩa, hãy tính $\tan(a-b)$ bằng cách biến đổi $\tan(a-b)=\tan[a+(-b)]$ và sử dụng công thức $\tan(a+b)$ có được ở câu a.

Trong trường hợp tổng quát, với các góc lượng giác a, b, ta có các công thức sau (thường được gọi chung là *công thức cộng* đối với tang):

- $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$
- $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

(khi các biểu thức đều có nghĩa).

Ví dụ 3 Tính $\tan\frac{7\pi}{12}$.

Giải

Áp dụng công thức cộng đối với tang, ta có:

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}=-2-\sqrt{3}.$$

3 Tính $\tan 165^{\circ}$.

II. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

4 Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$ bằng cách thay $b = a$ trong công thức cộng.

Một cách tổng quát, ta có các công thức sau (thường gọi là *công thức nhân đôi*):

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$ (khi các biểu thức đều có nghĩa)

Nhận xét

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$ (thường gọi là *công thức hạ bậc*).

Ví dụ 4 Cho $\sin a + \cos a = \dfrac{1}{2}$. Tính:

a) $\sin 2a$;   b) $\cos 4a$.

Giải

a) Do $\sin a + \cos a = \dfrac{1}{2}$ nên $(\sin a + \cos a)^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a\cos a = \dfrac{1}{4}$

hay $1 + 2\sin a\cos a = \dfrac{1}{4}$. Suy ra $\sin 2a = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$.

b) Áp dụng công thức nhân đôi, ta có: $\cos 4a = \cos(2 \,.\, 2a) = 1 - 2\sin^2 2a = -\dfrac{1}{8}$.

4 Cho $\tan\dfrac{a}{2} = -2$. Tính $\tan a$.

Ví dụ 5 Biết $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính: $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Giải

Ta có: $\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$. Mà $\cos\dfrac{\pi}{12} > 0$ nên $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

5 Tính: $\sin\dfrac{\pi}{8}$, $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

5 Sử dụng công thức cộng, rút gọn mỗi biểu thức sau:

$\cos(a + b) + \cos(a - b)$; $\cos(a + b) - \cos(a - b)$; $\sin(a + b) + \sin(a - b)$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có các công thức sau (thường gọi là *công thức biến đổi tích thành tổng*):

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Ví dụ 6 Cho $\sin 2x = -\frac{1}{3}$. Tính: $A = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

$$A = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{1}{3}.$$

6 Cho $\cos a = \frac{2}{3}$.

Tính: $B = \cos\frac{3a}{2}\cos\frac{a}{2}$.

IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

6 Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và đặt $a + b = u$; $a - b = v$ rồi biến đổi các biểu thức sau thành tích: $\cos u + \cos v$; $\cos u - \cos v$; $\sin u + \sin v$; $\sin u - \sin v$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có các công thức sau (thường gọi là *công thức biến đổi tổng thành tích*):

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

Ví dụ 7 Tính:

a) $\sin\frac{11\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$;   b) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$.

7 Tính:

$$D = \frac{\sin\frac{7\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{7\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}}.$$

Giải

a) $\sin\frac{11\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12} = 2\cos\frac{\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = 2.\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

b) $\cos 105^{\circ} + \cos 15^{\circ} = 2\cos\frac{105^{\circ} + 15^{\circ}}{2}\cos\frac{105^{\circ} - 15^{\circ}}{2} = 2\cos 60^{\circ}\cos 45^{\circ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Ví dụ 8 Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

$$u = 40\sin(120\pi t) + 10\sin(360\pi t) \quad (\mathrm{V});$$
$$i = 4\sin(120\pi t) + \sin(360\pi t) \qquad (\mathrm{A}).$$

(*Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage*)

Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P = u \cdot i$ (W). Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có luỹ thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
P = u \cdot i &= \left[40\sin(120\pi t) + 10\sin(360\pi t)\right] \cdot \left[4\sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)\right] \\
&= 160\sin^2(120\pi t) + 10\sin^2(360\pi t) + 80\sin(120\pi t)\sin(360\pi t) \\
&= 80\left[1 - \cos(240\pi t)\right] + 5\left[1 - \cos(720\pi t)\right] + 40\left[\cos(360\pi t - 120\pi t) - \cos(360\pi t + 120\pi t)\right] \\
&= 85 - 80\cos(240\pi t) - 5\cos(720\pi t) + 40\cos(240\pi t) - 40\cos(480\pi t) \\
&= 85 - 40\cos(240\pi t) - 5\cos(720\pi t) - 40\cos(480\pi t) \ (\mathrm{W}).
\end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. Cho $\cos a = \frac{3}{5}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính: $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right)$, $\tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Tính:

$A = \sin(a - 17^{\circ})\cos(a + 13^{\circ}) - \sin(a + 13^{\circ})\cos(a - 17^{\circ})$;

$B = \cos\left(b + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - b\right) - \sin\left(b + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - b\right)$.

3. Cho $\tan(a + b) = 3$, $\tan(a - b) = 2$. Tính: $\tan 2a$, $\tan 2b$.

4. Cho $\sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính: $\cos 2a$, $\cos 4a$.

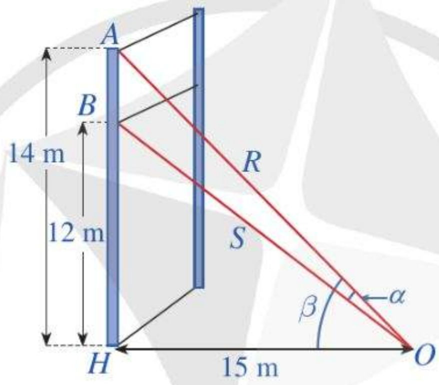
5. Cho $\sin a + \cos a = 1$. Tính: $\sin 2a$.

6. Cho $\cos 2a = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính: $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$.

7. Cho $\cos 2x = \frac{1}{4}$. Tính: $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; $B = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

8. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$.

9. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (*Hình 18*).

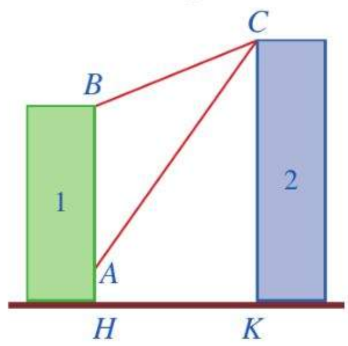


Hình 18

a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

10. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20$ m. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (*Hình 19*). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32$ m, $AH = 6$ m, $BH = 24$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

§3 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

Guồng nước (hay còn gọi là cọn nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hoá đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m. Khi guồng quay đều, khoảng cách h (m) từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 2,5\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$, với x (phút) là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$).

(*Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020*).

Khoảng cách h phụ thuộc vào thời gian quay x như thế nào?

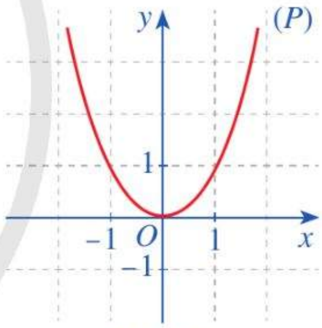
I. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

1

a) Cho hàm số $f(x) = x^2$.

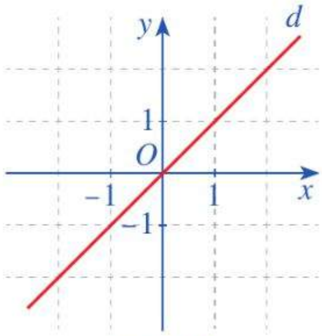
- Với $x \in \mathbb{R}$, hãy so sánh $f(-x)$ và $f(x)$.
- Quan sát parabol (P) là đồ thị của hàm số $f(x) = x^2$ (*Hình 20*) và cho biết trục đối xứng của (P) là đường thẳng nào.



Hình 20

b) Cho hàm số $g(x) = x$.

- Với $x \in \mathbb{R}$, hãy so sánh $g(-x)$ và $-g(x)$.
- Quan sát đường thẳng d là đồ thị của hàm số $g(x) = x$ (*Hình 21*) và cho biết gốc toạ độ O có là tâm đối xứng của đường thẳng d hay không.



Hình 21

Ta nói hàm số $f(x) = x^2$ là *hàm số chẵn*; hàm số $g(x) = x$ là *hàm số lẻ*.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm số chẵn* nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm số lẻ* nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý

- Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1 Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = 3x^2 - 5$ là hàm số chẵn.

Giải

Hàm số $f(x) = 3x^2 - 5$ là hàm số chẵn vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5 = f(x)$.

1

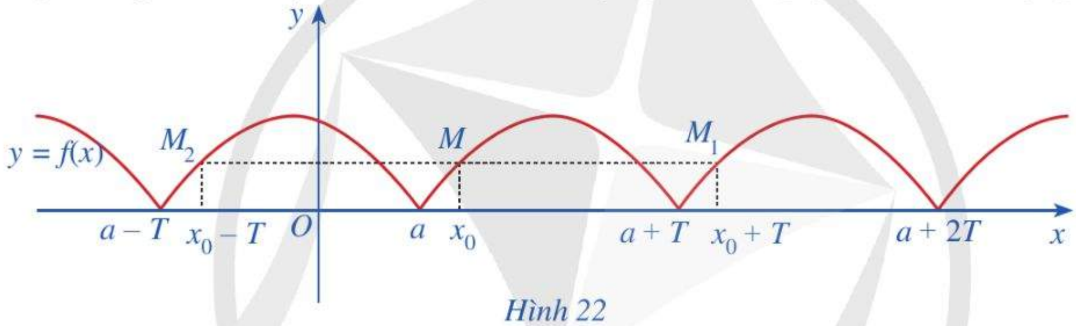
a) Chứng tỏ rằng hàm số $g(x) = x^3$ là hàm số lẻ.

b) Cho ví dụ về hàm số không là hàm số chẵn và cũng không là hàm số lẻ.

2. Hàm số tuần hoàn

2 Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như *Hình 22*.

a) Có nhận xét gì về đồ thị hàm số trên mỗi đoạn $[a ; a + T]$, $[a + T ; a + 2T]$, $[a - T ; a]$?



Hình 22

b) Lấy điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ thuộc đồ thị hàm số với $x_0 \in [a ; a + T]$. So sánh mỗi giá trị $f(x_0 + T)$, $f(x_0 - T)$ với $f(x_0)$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$, ta có:

- $x + T \in D$ và $x - T \in D$;
- $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn (nếu có) các tính chất trên được gọi là *chu kì* của hàm số tuần hoàn đó.

Ví dụ 2 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$

và T là một số hữu tỉ dương.

Chứng minh: $f(x + T) = f(x)$ với mọi x. Từ đó suy ra hàm số $f(x)$ là tuần hoàn.

2 Cho ví dụ về hàm số tuần hoàn.

Giải

Ta thấy hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Xét một số thực x tuỳ ý.

Nếu x là số hữu tỉ thì $x + T$ cũng là số hữu tỉ. Nếu x là số vô tỉ thì $x + T$ cũng là số vô tỉ. Vì thế $f(x + T) = f(x)$ với mọi x. Từ đó suy ra hàm số $f(x)$ là tuần hoàn.

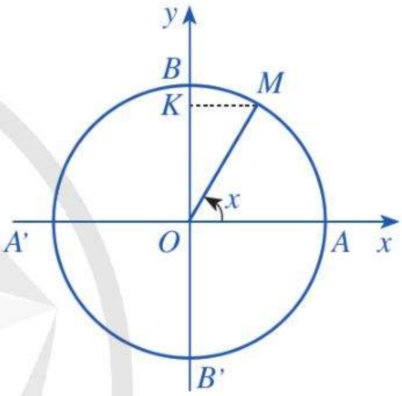
Nhận xét

Cho hàm số tuần hoàn chu kì T. Từ đồ thị hàm số đó trên đoạn $[a ; a + T]$, ta dịch chuyển song song với trục hoành sang phải (hoặc sang trái) theo đoạn có độ dài T thì được đồ thị hàm số trên đoạn $[a + T ; a + 2T]$ (hoặc $[a - T ; a]$).

II. HÀM SỐ $y = \sin x$

1. Định nghĩa

3 Với mỗi số thực x, tồn tại duy nhất điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = x$ (rad) (*Hình 23*). Hãy xác định $\sin x$.



Hình 23

Ứng với mỗi số thực x, có duy nhất một giá trị $\sin x$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực $\sin x$ được gọi là hàm số $y = \sin x$.
Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ là $\mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$

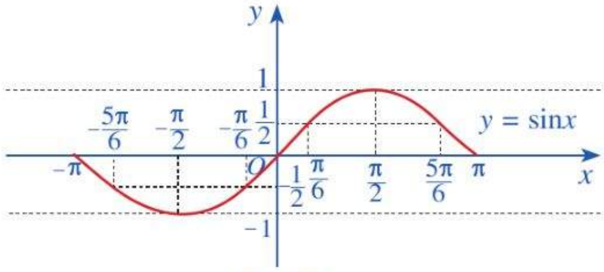
4 Cho hàm số $y = \sin x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

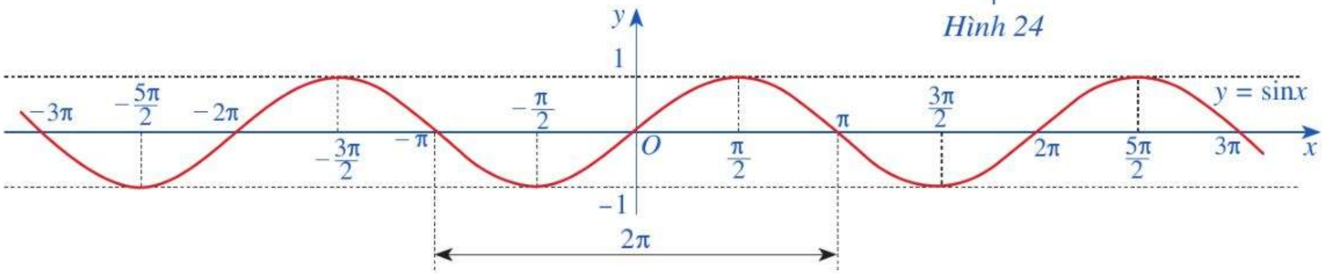
x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm $(x ; y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x ; \sin x)$ với $x \in [-\pi ; \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ (*Hình 24*).

c) Làm tương tự như trên đối với các đoạn $[-3\pi ; -\pi]$, $[\pi ; 3\pi]$, …, ta có đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ được biểu diễn ở *Hình 25*.



Hình 24



Hình 25

3. Tính chất của hàm số $y = \sin x$

5 Quan sát đồ thị hàm số $y = \sin x$ ở *Hình 25*.

a) Nêu tập giá trị của hàm số $y = \sin x$.

b) Gốc toạ độ có là tâm đối xứng của đồ thị hàm số không? Từ đó kết luận tính chẵn, lẻ của hàm số $y = \sin x$.

c) Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài 2π, ta có nhận được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[\pi ; 3\pi]$ hay không? Hàm số $y = \sin x$ có tuần hoàn hay không?

d) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \sin x$.

Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1 ; 1]$ và có tính chất sau:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O;
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn chu kì 2π;
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3 Hàm số $y = \sin x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{2} ; \frac{13\pi}{2}\right)$?

Giải

Do $\left(\frac{11\pi}{2} ; \frac{13\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} + 6\pi ; \frac{\pi}{2} + 6\pi\right)$ nên hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{2} ; \frac{13\pi}{2}\right)$.

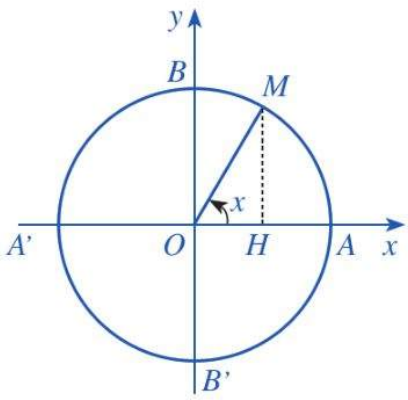
3 Hàm số $y = \sin x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{7\pi}{2} ; -\frac{5\pi}{2}\right)$?

Nhận xét: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (*Hình 25*), ta thấy $\sin x = 0$ tại những giá trị $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Vì vậy, tập hợp các số thực x sao cho $\sin x \neq 0$ là $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

III. HÀM SỐ $y = \cos x$

1. Định nghĩa

6 Với mỗi số thực x, tồn tại duy nhất điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = x$ (rad) (*Hình 26*). Hãy xác định $\cos x$.



Hình 26

Ứng với mỗi số thực x, có duy nhất một giá trị $\cos x$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực $\cos x$ được gọi là hàm số $y = \cos x$.
Tập xác định của hàm số $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.

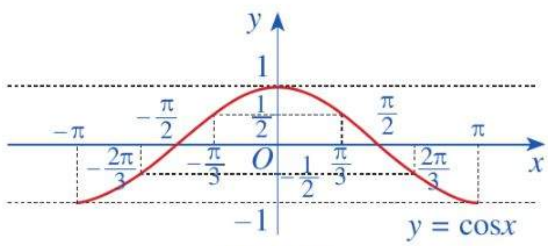
2. Đồ thị của hàm số $y = \cos x$

7 Cho hàm số $y = \cos x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

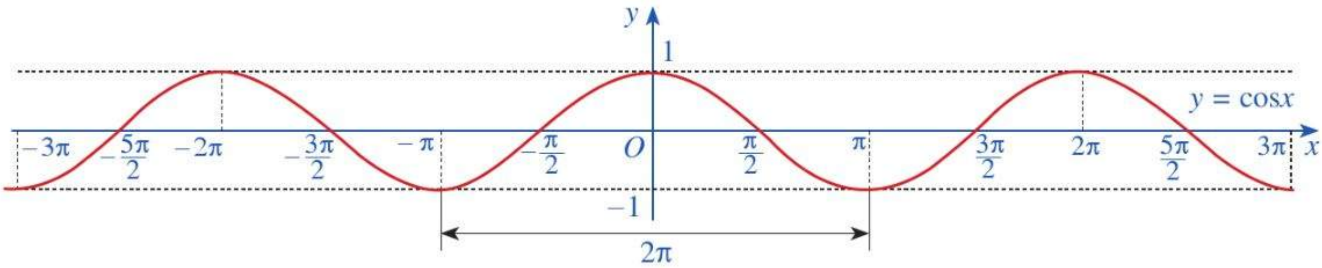
x	$-\pi$	$-\dfrac{2\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	0	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	π
$y = \cos x$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm $(x\ ;\ y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x\ ;\ \cos x)$ với $x \in [-\pi\ ;\ \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi\ ;\ \pi]$ (*Hình 27*).



Hình 27

c) Làm tương tự như trên đối với các đoạn $[-3\pi\ ;\ -\pi]$, $[\pi\ ;\ 3\pi]$, …, ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$ được biểu diễn ở *Hình 28*.



Hình 28

3. Tính chất của hàm số $y = \cos x$

8 Quan sát đồ thị hàm số $y = \cos x$ ở *Hình 28*.

a) Nêu tập giá trị của hàm số $y = \cos x$.

b) Trục tung có là trục đối xứng của đồ thị hàm số không? Từ đó kết luận tính chẵn, lẻ của hàm số $y = \cos x$.

c) Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài 2π, ta nhận được đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[\pi ; 3\pi]$ hay không? Hàm số $y = \cos x$ có tuần hoàn hay không?

d) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \cos x$.

Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1 ; 1]$ và có tính chất sau:

- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung;
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn chu kì 2π;
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi ; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi ; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4 Hàm số $y = \cos x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{25\pi}{3} ; \frac{26\pi}{3}\right)$?

Giải

Do $\left(\frac{25\pi}{3} ; \frac{26\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3} + 8\pi ; \frac{2\pi}{3} + 8\pi\right)$ nên hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{25\pi}{3} ; \frac{26\pi}{3}\right)$.

4 Hàm số $y = \cos x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $(-2\pi ; -\pi)$?

Nhận xét: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$ (*Hình 28*), ta thấy $\cos x = 0$ tại những giá trị $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. Vì vậy, tập hợp các số thực x sao cho $\cos x \neq 0$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

IV. HÀM SỐ $y = \tan x$

1. Định nghĩa

9 Xét tập hợp $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Với mỗi số thực $x \in D$, hãy nêu định nghĩa $\tan x$.

Ta có định nghĩa sau:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in D$ với một số thực $\tan x$ được gọi là hàm số $y = \tan x$. Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Đồ thị của hàm số $y = \tan x$

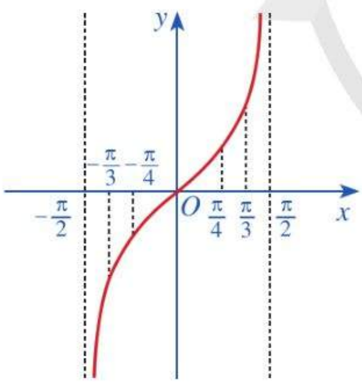
10 Cho hàm số $y = \tan x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

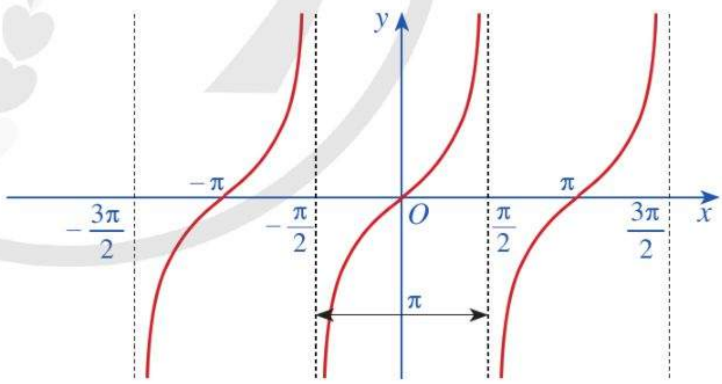
x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \tan x$	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm $(x ; y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x ; \tan x)$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ (*Hình 29*).

c) Làm tương tự như trên đối với các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2}\right)$, ..., ta có đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên D được biểu diễn ở *Hình 30*.



Hình 29



Hình 30

3. Tính chất của hàm số $y = \tan x$

11 Quan sát đồ thị hàm số $y = \tan x$ ở *Hình 30*.

a) Nêu tập giá trị của hàm số $y = \tan x$.

b) Gốc toạ độ có là tâm đối xứng của đồ thị hàm số không? Từ đó kết luận tính chẵn, lẻ của hàm số $y = \tan x$.

c) Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài π, ta nhận được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ hay không? Hàm số $y = \tan x$ có tuần hoàn hay không?

d) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \tan x$.

Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có tính chất sau:

- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O;
- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn chu kì π;
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 5 Xét tính chẵn, lẻ của hàm số: $f(x) = \sin x + \tan x$.

Giải

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$

và $f(-x) = \sin(-x) + \tan(-x) = -\sin x - \tan x$

$= -(\sin x + \tan x) = -f(x)$.

Vậy hàm số $f(x) = \sin x + \tan x$ là hàm lẻ.

5 Với mỗi số thực m, tìm số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

V. HÀM SỐ $y = \cot x$

1. Định nghĩa

12 Xét tập hợp $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Với mỗi số thực $x \in E$, hãy nêu định nghĩa $\cot x$.

Ta có định nghĩa sau:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in E$ với một số thực $\cot x$ được gọi là hàm số $y = \cot x$. Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Đồ thị của hàm số $y = \cot x$

13 Cho hàm số $y = \cot x$.

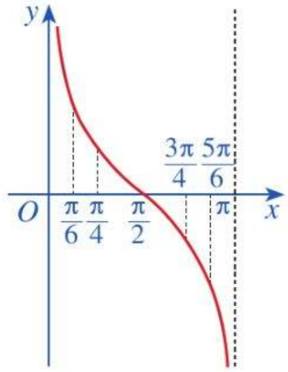
a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y = \cot x$	?	?	?	?	?

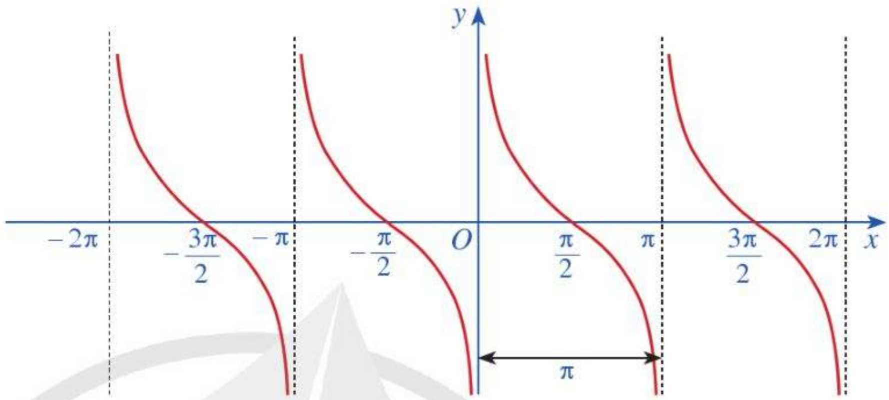
b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm $(x ; y)$ trong bảng giá trị ở câu a.

Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x ; \cot x)$ với $x \in (0 ; \pi)$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0 ; \pi)$ (*Hình 31*).

c) Làm tương tự như trên đối với các khoảng $(\pi ; 2\pi)$, $(-\pi ; 0)$, $(-2\pi ; -\pi)$ …, ta có đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên E được biểu diễn ở *Hình 32*.



Hình 31



Hình 32

3. Tính chất của hàm số $y = \cot x$

14 Quan sát đồ thị hàm số $y = \cot x$ ở *Hình 32*.

a) Nêu tập giá trị của hàm số $y = \cot x$.

b) Gốc toạ độ có là tâm đối xứng của đồ thị hàm số không? Từ đó kết luận tính chẵn, lẻ của hàm số $y = \cot x$.

c) Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0 ; \pi)$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài π, ta nhận được đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(\pi ; 2\pi)$ hay không? Hàm số $y = \cot x$ có tuần hoàn hay không?

d) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \cot x$.

Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có tính chất sau:

- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O;
- Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn chu kì π;
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi ; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 6 Hàm số $y = \cot x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right)$?

Giải

Ta thấy hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right)$.

6 Với mỗi số thực m, tìm số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0 ; \pi)$.

BÀI TẬP

1. Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên đoạn $[-2\pi ; 2\pi]$ để:

a) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 1; b) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 0;

c) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng -1; d) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0.

2. Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên khoảng $\left(-\pi ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ để:

a) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng -1; b) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng 0;

c) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 1; d) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 0.

3. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{9\pi}{2} ; -\dfrac{7\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{21\pi}{2} ; \dfrac{23\pi}{2}\right)$;

b) $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi ; -19\pi)$, $(-9\pi ; -8\pi)$.

4. Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

a) Với mỗi $m \in [-1 ; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$;

b) Với mỗi $m \in [-1 ; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in [0 ; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$;

c) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$;

d) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in (0 ; \pi)$ sao cho $\cot\alpha = m$.

5. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \sin x \cos x$; b) $y = \tan x + \cot x$; c) $y = \sin^2 x$.

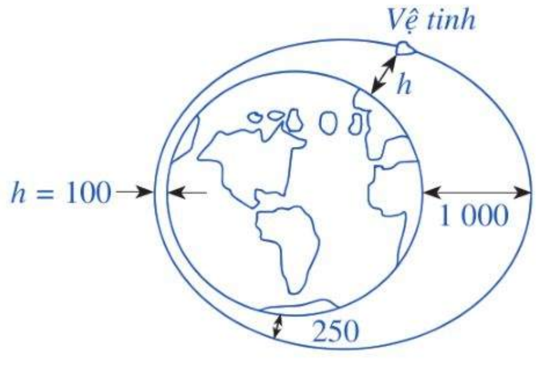
6. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0$, $t = \dfrac{T}{4}$, $t = \dfrac{T}{2}$, $t = \dfrac{3T}{4}$, $t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0 ; 2T]$ trong trường hợp:

a) $A = 3$ cm, $\varphi = 0$; b) $A = 3$ cm, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$; c) $A = 3$ cm, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

7. Trong bài toán mở đầu, hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước 2m.

§4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là đường elip (*Hình 33*). Độ cao h (km) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450\cos\frac{\pi}{50}t$ (*Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021*), trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Tại thời điểm t bằng bao nhiêu thì vệ tinh cách mặt đất 1 000 km; 250 km; 100 km?



Hình 33

Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải một trong các phương trình có dạng: $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, $\cot x = m$, trong đó x là ẩn số, m là số thực cho trước. Các phương trình đó là các phương trình lượng giác cơ bản.

I. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Như ta đã biết, một phương trình với ẩn x có dạng $f(x) = g(x)$ (1), trong đó vế trái $f(x)$ và vế phải $g(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x. Khi giải phương trình (1), ta cần lưu ý tới điều kiện đối với ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa (tức là mọi phép toán đều thực hiện được). Ta cũng nói đó là *điều kiện xác định của phương trình* (hay gọi tắt là *điều kiện của phương trình*).

1 Cho hai phương trình (với cùng ẩn x): $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1)

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad (2)$$

a) Tìm tập nghiệm S_1 của phương trình (1) và tập nghiệm S_2 của phương trình (2).

b) Hai tập S_1, S_2 có bằng nhau hay không?

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

> Hai phương trình (cùng ẩn) được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

Ví dụ 1 Hai phương trình $x - 3 = 0$ và $x^2 - 6x + 9 = 0$ có tương đương không? Vì sao?

Giải

Tập nghiệm của phương trình $x - 3 = 0$ là $S_1 = \{3\}$.

Tập nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 9 = 0$ là $S_2 = \{3\}$.

> **1** Hai phương trình $x - 1 = 0$ và $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ có tương đương không? Vì sao?

Vì $S_1 = S_2$ nên hai phương trình $x - 3 = 0$ và $x^2 - 6x + 9 = 0$ tương đương.

2 Khẳng định $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6$ đúng hay sai?

Trong các phép biến đổi phương trình, đáng chú ý nhất là các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình. Ta gọi chúng là các phép biến đổi tương đương. Như vậy, phép biến đổi tương đương biến một phương trình thành phương trình tương đương với nó.

Định lí sau đây nêu lên một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng:

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương.

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức;

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

Ví dụ 2 Giải phương trình: $x^2 - 6x + 8 = 2 - x$.

Giải

Ta có: $x^2 - 6x + 8 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 - (2 - x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2 ; 3\}$.

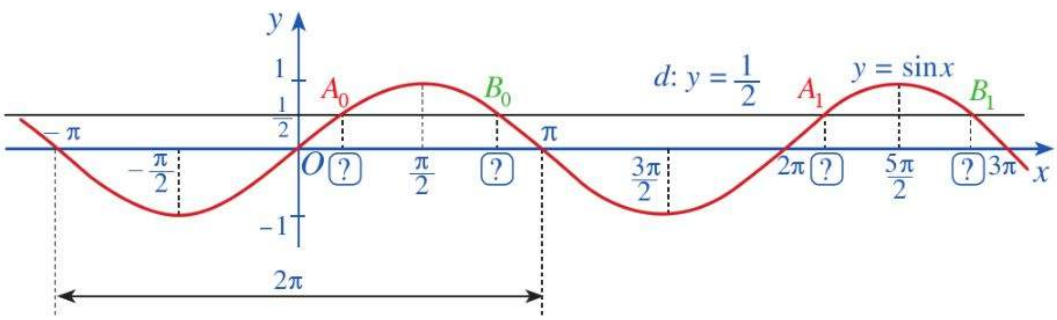
2 Giải phương trình:

$(x-1)^2 = 5x - 11.$

II. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

3

a) Đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = \sin x$, $x \in [-\pi ; \pi]$ tại hai giao điểm A_0, B_0 (*Hình 34*). Tìm hoành độ của hai giao điểm A_0, B_0.



Hình 34

b) Đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = \sin x$, $x \in [\pi ; 3\pi]$ tại hai giao điểm A_1, B_1 (*Hình 34*). Tìm hoành độ của hai giao điểm A_1, B_1.

Nhận xét

Phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

$$x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có thể giải phương trình $\sin x = m$ như sau:

- Với $|m| > 1$, phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$. Khi đó, ta có:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

a) Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\sin x = m$:

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

c) Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin a^{\circ}$ như sau:

$$\sin x = \sin a^{\circ} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^{\circ} + k360^{\circ} \\ x = 180^{\circ} - a^{\circ} + k360^{\circ} \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

3

a) Giải phương trình: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) Tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin 55^{\circ}$.

Ví dụ 3 Giải phương trình:

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

a) Do $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ nên $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

b) Do $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\sin x=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$

Ví dụ 4 Giải phương trình:

a) $\sin 3x=\sin 2x$;

b) $\sin x=\cos 3x$.

> **4** Giải phương trình $\sin 2x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

a) $\sin 3x=\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=2x+k2\pi \\ 3x=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$

b) $\sin x=\cos 3x \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}-3x+k2\pi \\ x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ -2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{4}-k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

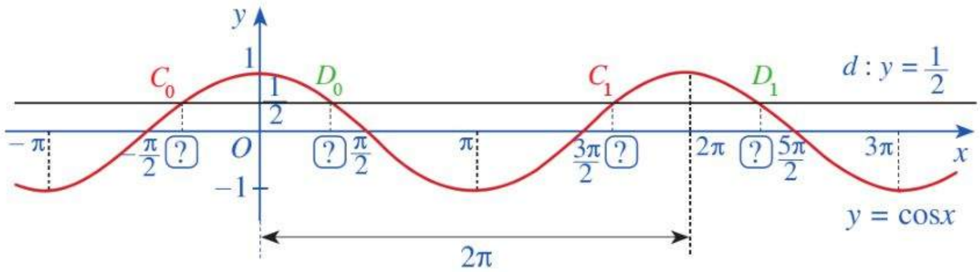
Vì $\left\{-\frac{\pi}{4}-k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ nên ta có thể viết như sau:

$$\sin x=\cos 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

III. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$

4

a) Đường thẳng $d: y=\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=\cos x$, $x\in[-\pi\,;\,\pi]$ tại hai giao điểm C_0, D_0 (*Hình 35*). Tìm hoành độ của hai giao điểm C_0, D_0.



Hình 35

b) Đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = \cos x$, $x \in [\pi ; 3\pi]$ tại hai giao điểm C_1, D_1 (*Hình 35*). Tìm hoành độ của hai giao điểm C_1, D_1.

Nhận xét

Phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có thể giải phương trình $\cos x = m$ như sau:

- Với $|m| > 1$, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm.
- Với $|m| \le 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $[0 ; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$. Khi đó, ta có:

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

a) Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\cos x = m$:

- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

c) Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cos x = \cos a^{\circ}$ như sau: $\cos x = \cos a^{\circ} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^{\circ} + k360^{\circ} \\ x = -a^{\circ} + k360^{\circ} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ví dụ 5 Giải phương trình:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;   b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

a) Do $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\cos x = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

b) Do $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\cos x = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

5

a) Giải phương trình: $\cos x = -\frac{1}{2}$.

b) Tìm góc lượng giác x sao cho $\cos x = \cos(-87^{\circ})$.

Ví dụ 6 Giải phương trình: $\cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

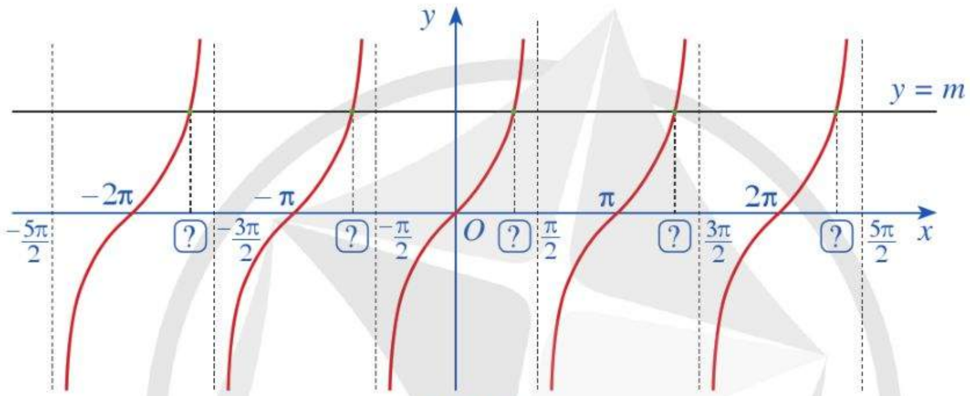
Giải

Ta có: $\cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

6 Giải phương trình được nêu trong bài toán mở đầu.

IV. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$

5 Quan sát các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \tan x$ và đường thẳng $y = m$ (*Hình 36*).



Hình 36

a) Từ hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \tan x$ và đường thẳng $y = m$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, hãy xác định tất cả các hoành độ giao điểm của hai đồ thị đó.

b) Có nhận xét gì về nghiệm của phương trình $\tan x = m$?

Trong trường hợp tổng quát, ta có cách giải phương trình $\tan x = m$ như sau:

Gọi α là số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$. Khi đó với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta có: $\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\tan x = \tan a^{\circ}$ như sau:

$$\tan x = \tan a^{\circ} \Leftrightarrow x = a^{\circ} + k180^{\circ} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 7 Giải phương trình:

a) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\tan x = -1$.

7

a) Giải phương trình: $\tan x = 1$.

b) Tìm góc lượng giác x sao cho $\tan x = \tan 67^{\circ}$.

Giải

a) Do $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

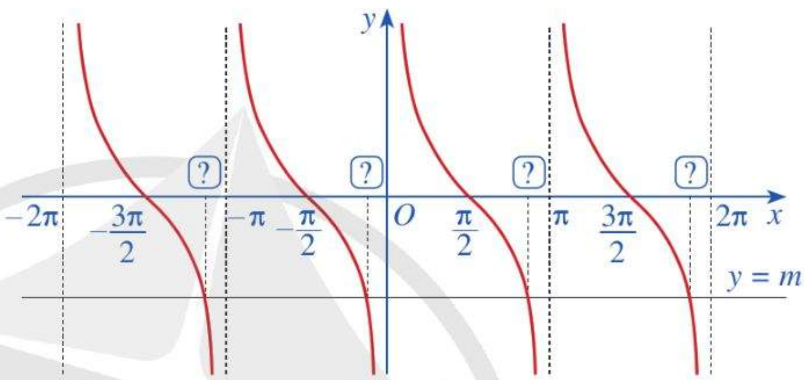
b) Do $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ nên $\tan x = -1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

V. PHƯƠNG TRÌNH $\cot x = m$

6 Quan sát các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cot x$ và đường thẳng $y = m$ (*Hình 37*).

a) Từ hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cot x$ và đường thẳng $y = m$ trên khoảng $(0 ; \pi)$, hãy xác định tất cả các hoành độ giao điểm của hai đồ thị đó.

b) Có nhận xét gì về nghiệm của phương trình $\cot x = m$?



Hình 37

Trong trường hợp tổng quát, ta có cách giải phương trình $\cot x = m$ như sau:

Gọi α là số thực thuộc khoảng $(0 ; \pi)$ sao cho $\cot\alpha = m$. Khi đó với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cot x = \cot a^{\circ}$ như sau:

$$\cot x = \cot a^{\circ} \Leftrightarrow x = a^{\circ} + k180^{\circ}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 8 Giải phương trình: $\cot 2x = -\sqrt{3}$.

Giải

Do $\cot\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ nên $\cot 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot 2x = \cot\frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.

8

a) Giải phương trình: $\cot x = 1$.

b) Tìm góc lượng giác x sao cho $\cot x = \cot(-83^{\circ})$.

VI. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Có thể sử dụng máy tính cầm tay (MTCT) để giải các phương trình lượng giác cơ bản.

Ví dụ 9 Sử dụng MTCT để giải mỗi phương trình sau với kết quả là radian (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

a) $\sin x = 0,6$; b) $\cos x = -\dfrac{1}{3}$; c) $\tan x = \sqrt{3}$.

Giải

Sau khi chuyển máy tính sang chế độ "radian".

a) Bấm liên tiếp $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sin}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$

Ta được kết quả gần đúng là 0,644.

Vậy phương trình $\sin x = 0,6$ có các nghiệm là:

$$x \approx 0,644 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

và $$x \approx \pi - 0,644 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Bấm liên tiếp $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\cos}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

Ta được kết quả gần đúng là 1,911.

Vậy phương trình $\cos x = -\dfrac{1}{3}$ có các nghiệm là: $x \approx \pm 1,911 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) Bấm liên tiếp $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\tan}\ \boxed{\sqrt{\square}}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

Ta được kết quả gần đúng là 1,047.

Vậy phương trình $\tan x = \sqrt{3}$ có nghiệm là: $x \approx 1,047 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

9 Sử dụng MTCT để giải mỗi phương trình sau với kết quả là radian (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn):

a) $\sin x = 0,2$;

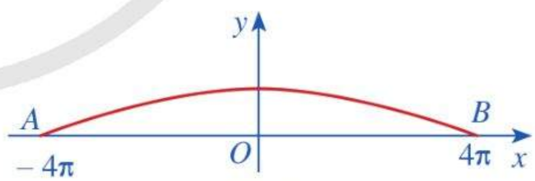
b) $\cos x = -\dfrac{1}{5}$;

c) $\tan x = \sqrt{2}$.

Chú ý

Để giải phương trình $\cot x = a\ (a \neq 0)$ bằng MTCT, ta đưa về giải phương trình $\tan x = \dfrac{1}{a}$.

Ví dụ 10 Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2.\cos\dfrac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở *Hình 38*. Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.



Hình 38

Giải

Với mỗi điểm M nằm trên mặt cầu, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M.

Xét phương trình: $4,2.\cos\dfrac{x}{8} = 3 \Leftrightarrow \cos\dfrac{x}{8} = \dfrac{5}{7}$. Do $x \in [-4\pi\ ;\ 4\pi]$ nên $\dfrac{x}{8} \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó, ta có: $\cos\dfrac{x}{8} = \dfrac{5}{7} \Leftrightarrow \dfrac{x}{8} \approx \pm 0,775$, suy ra $\left|\dfrac{x}{8}\right| < 0,78 \Leftrightarrow |x| < 6,24$.

Do sà lan có thể đi qua được gầm cầu nên chiều rộng của khối hàng hoá là:

$$2|x| < 12,48 < 12,5 \text{ (m)}.$$

BÀI TẬP

1. Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$; c) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $2\cos 3x + 5 = 3$; e) $3\tan x = -\sqrt{3}$; g) $\cot x - 3 = \sqrt{3}(1 - \cot x)$.

2. Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$; b) $\sin 2x = \cos 3x$; c) $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

3. Dùng đồ thị hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ để xác định số nghiệm của phương trình:

a) $3\sin x + 2 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$;

b) $\cos x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

4. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

5. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (*Hình 39*). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại *(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)*. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m?

Hình 39

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

1. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng:

A. $(0\ ;\pi)$. B. $\left(-\frac{3\pi}{2}\ ;-\frac{\pi}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{\pi}{2}\ ;\frac{\pi}{2}\right)$. D. $(-\pi\ ;0)$.

2. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\pi\ ;2\pi)$ là:

A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \cot x$.

3. Nếu $\tan(a+b) = 3$, $\tan(a-b) = -3$ thì $\tan 2a$ bằng:

A. 0. B. $\frac{3}{5}$. C. 1. D. $-\frac{3}{4}$.

4. Nếu $\cos a = \frac{1}{4}$ thì $\cos 2a$ bằng:

A. $\frac{7}{8}$. B. $-\frac{7}{8}$. C. $\frac{15}{16}$. D. $-\frac{15}{16}$.

5. Nếu $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\cos b = -\frac{4}{5}$ thì $\cos(a+b)\cos(a-b)$ bằng:

A. 0. B. 2. C. 4. D. 5.

6. Nếu $\sin a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ thì $\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

7. Số nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ trên đoạn $[0\ ;10\pi]$ là:

A. 5. B. 9. C. 10. D. 11.

8. Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0\ ;10\pi]$ là:

A. 10. B. 6. C. 5. D. 11.

9. Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là:

A. $-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. B. $\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. D. $-\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

10. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ trên đoạn $[0\ ;\pi]$ là:

A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

11. Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ rồi xác định số nghiệm của phương trình $3\cos x + 2 = 0$ trên đoạn đó.

12. Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$;

c) $\sin 3x - \cos 5x = 0$;

d) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$;

e) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

g) $\sin x + \cos x = 0$.

13. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \le t < 24$) cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12$ *(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021)*. Tìm t để độ sâu của mực nước là:

a) 15 m;

b) 9 m;

c) 10,5 m.

14. Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4{,}8.\sin\frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở *Hình 40*.

Hình 40

a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

(Nguồn: https://shutterstock.com)

b) Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 13,1 m.

c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là 9 m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 4,3 m.

CHƯƠNG II

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: dãy số; cấp số cộng và cấp số nhân.

§1 DÃY SỐ


Hoa lan ý (1 cánh)


Hoa rum (1 cánh)


Hoa xương rồng (2 cánh)


Hoa duyên linh (3 cánh)


Hoa mận (5 cánh)


Hoa cánh bướm (8 cánh)


Hoa dã quỳ (13 cánh)


Hoa cúc tây (21 cánh)

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Một số loài hoa có số lượng cánh hoa luôn là một số cố định. Số cánh hoa trong các bông hoa thường xuất hiện nhiều theo những con số 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Ta có thể viết số cánh hoa của các bông hoa ở các hình trên lần lượt như sau: vị trí thứ nhất viết số 1, vị trí thứ hai viết số 1, vị trí thứ ba viết số 2, …, vị trí thứ tám viết số 21.

Các số 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 *được viết theo quy tắc trên gợi nên khái niệm nào trong toán học?*

I. KHÁI NIỆM

1 Một vật chuyển động đều với vận tốc 20 m/s. Hãy viết các số chỉ quãng đường (đơn vị: mét) vật chuyển động được lần lượt trong thời gian 1 giây, 2 giây, 3 giây, 4 giây, 5 giây theo hàng ngang.

Ta có khái niệm sau:

• Mỗi hàm số u: $\{1; 2; 3; \ldots; m\} \to \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{N}^*$) được gọi là một dãy số hữu hạn.

Do mỗi số nguyên dương k ($1 \le k \le m$) tương ứng với đúng một số u_k nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$.

• Số u_1 gọi là *số hạng đầu*, số u_m gọi là *số hạng cuối* của dãy số đó.

Ví dụ 1 Hàm số $u(n) = 2n$ xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ là một dãy số hữu hạn. Tìm số hạng đầu, số hạng cuối và viết dãy số trên dưới dạng khai triển.

Giải

Số hạng đầu, số hạng cuối của dãy số lần lượt là: $u_1 = 2$, $u_5 = 10$.

Dạng khai triển của dãy số đó là: 2, 4, 6, 8, 10.

1 Hàm số $u(n) = n^3$ xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ là một dãy số hữu hạn. Tìm số hạng đầu, số hạng cuối và viết dãy số trên dưới dạng khai triển.

2 Cho hàm số $u(n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Hãy viết các số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ theo hàng ngang.

Ta có khái niệm về dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số) như sau:

• Mỗi hàm số u: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ được gọi là một dãy số vô hạn.

Do mỗi số nguyên dương n tương ứng với đúng một số u_n nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$

• Dãy số đó còn được viết tắt là (u_n).

• Số u_1 gọi là *số hạng thứ nhất* (hay *số hạng đầu*), số u_2 gọi là *số hạng thứ hai*, …, số u_n gọi là *số hạng thứ n* và là số hạng tổng quát của dãy số đó.

Chú ý: Dãy số không đổi là dãy số có tất cả các số hạng đều bằng nhau.

Ví dụ 2 Cho (u_n) là dãy các số tự nhiên lẻ viết theo thứ tự tăng dần và $u_1 = 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n).

b) Dự đoán số hạng tổng quát và viết dạng khai triển của dãy số (u_n).

Giải

a) Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là:

$$u_1 = 1;\ u_2 = 3;\ u_3 = 5;\ u_4 = 7;\ u_5 = 9.$$

b) Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được dự đoán là $u_n = 2n - 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: 1, 3, 5, ..., $2n - 1$, ...

2 Cho dãy số $(u_n) = n^2$.

a) Viết năm số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Viết dạng khai triển của dãy số (u_n).

II. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

3 Xét mỗi dãy số sau:

- Dãy số: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 (1)
- Dãy số (u_n) được xác định bởi: Với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$, u_n là số thập phân hữu hạn có phần số nguyên là 1 và phần thập phân là n chữ số thập phân đầu tiên đứng sau dấu "," của số $\sqrt{2}$. Cụ thể là: $u_1 = 1{,}4$; $u_2 = 1{,}41$; $u_3 = 1{,}414$; $u_4 = 1{,}4142$; $u_5 = 1{,}41421$; … (2)
- Dãy số (u_n) với $u_n = (-2)^n$ (3)
- Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1} + 2$ với mọi $n \geq 2$ (4)

a) Hãy nêu cách xác định mỗi số hạng của lần lượt các dãy số (1), (2), (3), (4).

b) Từ đó hãy cho biết dãy số có thể cho bằng những cách nào.

Ta có thể cho dãy số bằng một trong những cách sau:

- Liệt kê các số hạng của dãy số đó (với những dãy số hữu hạn và có ít số hạng).
- Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số đó.
- Cho công thức của số hạng tổng quát của dãy số đó.
- Cho bằng phương pháp truy hồi.

Ví dụ 3 Hãy nêu cách xác định mỗi dãy số sau:

a) Dãy số 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1 000 (5)

b) Dãy số (u_n) được xác định bởi: Với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$, u_n là số thập phân hữu hạn có phần số nguyên là 3 và phần thập phân là n chữ số thập phân đầu tiên đứng sau dấu "," của số π (6)

c) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n$ (7)

d) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$ (8)

Giải

a) Dãy số (5) được xác định bằng cách liệt kê các số hạng của dãy số.

b) Dãy số (6) được xác định bằng cách diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

c) Dãy số (7) được xác định bằng cách cho công thức của số hạng tổng quát của dãy số.

d) Dãy số (8) được xác định bằng cách cho bằng phương pháp truy hồi.

Ví dụ 4 Dãy số được nêu trong phần mở đầu được gọi là dãy số Fibonacci.

Dãy số Fibonacci là dãy số (u_n) được xác định bởi:

$u_1 = 1, u_2 = 1$ và $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$ (9)

Viết mười số hạng đầu của dãy số (u_n).

Giải

Ta có: $u_1 = u_2 = 1$.

Để tìm u_3, thay $n = 3$ vào công thức (9), ta được: $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$.

Để tìm u_4, thay $n = 4$ vào công thức (9), ta được: $u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$.

Cứ như thế, ta tìm được mười số hạng đầu của dãy số (u_n) là: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

> **3** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-3}{3n+1}$. Tìm u_{33}, u_{333} và viết dãy số dưới dạng khai triển.

III. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

4 Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2$. Tính u_{n+1}. Từ đó, hãy so sánh u_{n+1} và u_n với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số tăng* nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số giảm* nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 5 Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = 3n - 2$ là một dãy số tăng.

Giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_{n+1} = 3(n + 1) - 2 = 3n + 1$.

Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = (3n + 1) - (3n - 2) = 3 > 0$ hay $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

> **4** Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{1}{3^n}$ là một dãy số giảm.

Chú ý

Không phải mọi dãy số đều là dãy số tăng hay dãy số giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$ có dạng khai triển: $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm.

IV. DÃY SỐ BỊ CHẶN

5 Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. Khẳng định $u_n \le 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ có đúng không?

- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \ge m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; tức là tồn tại các số m và M sao cho $m \le u_n \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 6 Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$ là bị chặn.

Giải

Ta có: $u_n = \frac{2n+5}{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{n+1} = 2 + \frac{3}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vì $0 < \frac{3}{n+1} \le \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $2 < 2 + \frac{3}{n+1} \le \frac{7}{2}$ hay $2 < u_n \le \frac{7}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

5 Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+4}$ là bị chặn.

BÀI TẬP

1. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức sau:

a) $u_n = 2n^2 + 1$;

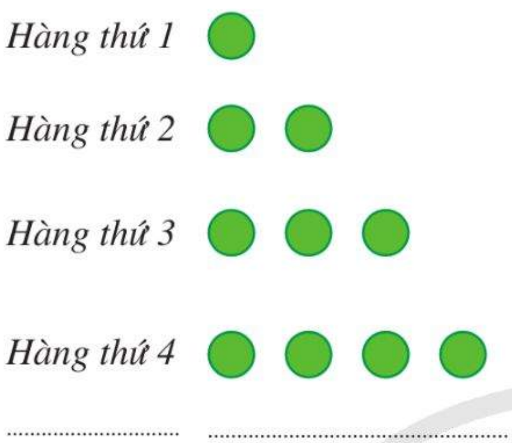
b) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$;

c) $u_n = \frac{2^n}{n}$;

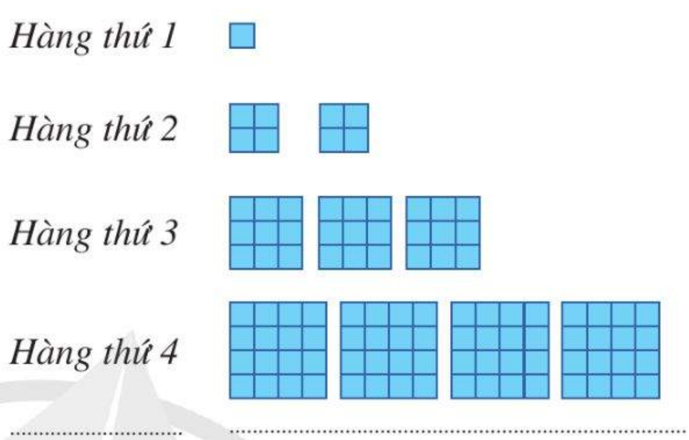
d) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

2. a) Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ n trong *Hình 1*. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n).

b) Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong *Hình 2* (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n).



Hình 1



Hình 2

3. Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = \dfrac{n-3}{n+2}$; b) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n \, . \, n!}$; c) $u_n = (-1)^n \, . \, (2^n + 1)$.

4. Trong các dãy số (u_n) được xác định như sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 2$; b) $u_n = -2n + 1$; c) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n}$.

5. Cho dãy số thực dương (u_n). Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n.

§2 CẤP SỐ CỘNG

Ruộng bậc thang là một hình thức canh tác có nhiều ở khu vực Tây Bắc và Đông Bắc Việt Nam. Hình ảnh ruộng bậc thang thể hiện nét đẹp văn hoá, là công trình nghệ thuật độc đáo của đồng bào vùng cao phía Bắc. Ruộng bậc thang ở một số nơi đã trở thành những địa chỉ tham quan du lịch đầy hấp dẫn của du khách trong nước và quốc tế.

Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất nằm ở độ cao 1 250 m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,2 m.

Ruộng bậc thang Mù Cang Chải – Yên Bái

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 10 *có độ cao là bao nhiêu so với mực nước biển?*

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Cho dãy số – 2, 3, 8, 13, 18, 23, 28.

Kể từ số hạng thứ hai, nêu mối liên hệ của mỗi số hạng với số hạng đứng ngay trước nó.

Cấp số cộng là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d, tức là:

$$u_n = u_{n-1} + d \text{ với } n \geq 2.$$

Số d được gọi là *công sai* của cấp số cộng.

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có:

$$u_n - u_{n-1} = d.$$

Chú ý: Khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

Ví dụ 1 Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$, công sai $d = -2$.

Viết ba số hạng đầu của cấp số cộng đó.

Giải

Ba số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) là: $u_1 = 9$;

$u_2 = u_1 + d = 9 + (-2) = 7$; $u_3 = u_2 + d = 7 + (-2) = 5$.

1 Cho (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = -7$, $u_2 = -2$. Viết năm số hạng đầu của cấp số cộng đó.

Ví dụ 2 Dãy các số tự nhiên lẻ liên tiếp 1, 3, 5, …, $2n - 1$, … có là cấp số cộng hay không? Vì sao?

Giải

Dãy các số tự nhiên lẻ liên tiếp 1, 3, 5, …, $2n - 1$, … là cấp số cộng vì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với 2. Công sai của cấp số cộng này là 2.

2 Cho dãy số (u_n) với $u_n = -5n + 7\ (n \geq 1)$. Dãy (u_n) có là cấp số cộng không? Vì sao?

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

2 Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1, công sai d.

a) Viết năm số hạng đầu của cấp số cộng theo u_1 và d.

b) Dự đoán công thức tính u_n theo u_1 và d.

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geq 2.$$

Nhận xét: Từ công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có: $n = \dfrac{u_n - u_1}{d} + 1$ với $n \geq 2$.

Ví dụ 3 Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{2}$, công sai $d = -\dfrac{1}{2}$.

a) Tính u_{20}.

b) Số -99 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n)?

Giải

a) Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng, ta có:

$$u_{20} = u_1 + (20-1)d = \frac{1}{2} + 19.\left(-\frac{1}{2}\right) = -9.$$

b) Giả sử -99 là số hạng thứ n của cấp số cộng. Ta có:

$$n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = \frac{-99 - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} + 1 = 200.$$

Vậy số -99 là số hạng thứ 200 của cấp số cộng (u_n).

3 Hãy giải bài toán trong phần mở đầu.

III. TỔNG *n* SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

3 Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1, công sai d.

a) So sánh các tổng sau: $u_1 + u_n$; $u_2 + u_{n-1}$; … ; $u_n + u_1$.

b) Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$. So sánh $n(u_1 + u_n)$ với $2S_n$.

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

Nhận xét: Do $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên $u_1 + u_n = 2u_1 + (n-1)d$. Suy ra $S_n = \dfrac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}$.

Ví dụ 4 Tính tổng: $S = 1 + 5 + 9 + 13 + ... + 97$.

Giải

Ta thấy dãy số 1, 5, 9, …, 97 là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng cuối $u_n = 97$, công sai $d = 4$. Vì thế, số các số hạng của cấp số cộng trên là:

$$n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = \frac{97 - 1}{4} + 1 = 25.$$

Vậy $S = \dfrac{(1+97) . 25}{2} = 1\,225$.

4 Tính tổng n số hạng đầu của mỗi cấp số cộng sau:

a) 3, 1, – 1, … với $n = 10$;

b) 1,2; 1,7; 2,2; … với $n = 15$.

Ví dụ 5 Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế, … Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70 800 000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 20$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng.

Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là: $S_{20} = \dfrac{[2 . 20 + (20 - 1) . 1] . 20}{2} = 590$.

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên số vé bán ra là 590.

Vậy giá tiền của một vé là: 70 800 000 : 590 = 120 000 (đồng).

BÀI TẬP

1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Vì sao?

a) 10, – 2, – 14, – 26, – 38;

b) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}$;

c) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$;

d) 1, 4, 7, 10, 13.

2. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng? Nếu là cấp số cộng, hãy tìm số hạng đầu u_1 và công sai d.

a) $u_n = 3 - 2n$; b) $u_n = \dfrac{3n+7}{5}$; c) $u_n = 3^n$.

3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$.

a) Viết công thức của số hạng tổng quát u_n.

b) Số 492 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 300 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$, $u_2 = 1$. Tính u_{10}.

5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = \dfrac{1}{3}$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -1$.

a) Tìm công sai d và viết công thức của số hạng tổng quát u_n.

b) Số -67 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 7 có phải là một số hạng của cấp số cộng trên không?

6. Tính tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 0,3n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

7. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức:

$$x_n = 75 + 5(n - 1).$$

(*Nguồn: https://bibabo.vn*)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

8. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

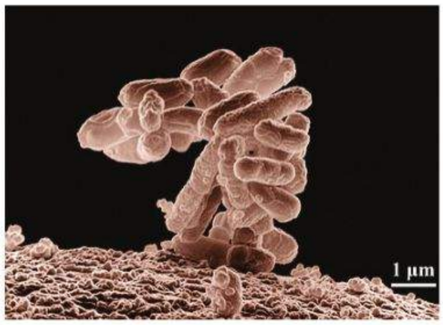
§3 CẤP SỐ NHÂN

Vi khuẩn *E. coli* trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần.

(Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, 2010)

Giả sử lúc đầu có 100 vi khuẩn *E. coli*.

Hỏi có bao nhiêu vi khuẩn E. coli sau 180 phút?



Hình ảnh phóng to của vi khuẩn E.coli

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Cho dãy số $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, 81, 243.

Kể từ số hạng thứ hai, nêu mối liên hệ của mỗi số hạng với số hạng đứng ngay trước nó.

Cấp số nhân là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q, tức là:

$$u_n = u_{n-1} \cdot q \text{ với } n \geq 2.$$

Số q được gọi là *công bội* của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q và $u_n \neq 0$ với mọi $n \geq 1$ thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q.$$

Chú ý: Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

Ví dụ 1 Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$, công bội $q = \frac{-1}{2}$. Viết năm số hạng đầu của cấp số nhân đó.

Giải

Năm số hạng đầu của cấp số nhân là: $u_1 = -2$;

$u_2 = u_1 \cdot q = -2 \cdot \frac{-1}{2} = 1$; $u_3 = u_2 \cdot q = 1 \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}$;

$u_4 = u_3 \cdot q = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{1}{4}$; $u_5 = u_4 \cdot q = \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-1}{8}$.

1 Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -6$, $u_2 = -2$.

a) Tìm công bội q.

b) Viết năm số hạng đầu của cấp số nhân đó.

Ví dụ 2 Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số nhân? Vì sao?

a) 125, 25, 5, 1, $\frac{1}{5}$;

b) 2, – 6, 18, 54.

Giải

Xét các thương của số hạng (kể từ số hạng thứ hai trở đi) với số hạng ngay trước nó, ta thấy:

a) $\dfrac{25}{125} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{\frac{1}{5}}{1} = \dfrac{1}{5}$. Vậy dãy số đã cho là cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{1}{5}$.

2 Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3 . 2^n \ (n \geq 1)$. Dãy (u_n) có là cấp số nhân không? Vì sao?

b) $\dfrac{-6}{2} = -3$, $\dfrac{18}{-6} = -3$, $\dfrac{54}{18} = 3 \neq -3$. Vậy dãy số đã cho không là cấp số nhân.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

2 Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1, công bội q.

a) Viết năm số hạng đầu của cấp số nhân theo u_1 và q.

b) Dự đoán công thức tính u_n theo u_1 và q.

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 . q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

Ví dụ 3 Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 4$, công bội $q = -\dfrac{1}{2}$. Tính u_7.

Giải

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân, ta có: $u_7 = u_1 . q^{7-1} = 4 . \left(\dfrac{-1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{16}$.

Ví dụ 4 Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14%/năm.

(Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

Giải

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là: $u_1 = 97{,}6 + 97{,}6 . 0{,}0114 = 97{,}6 . (1 + 0{,}0114)$
$= 97{,}6 . 1{,}0114 \approx 98{,}7$ (triệu người).

b) Gọi u_n là dân số của Việt Nam sau n năm.

Do tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,14% nên ta có:

$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \,.\, 0{,}0114 = u_{n-1} \,.\, (1 + 0{,}0114)$

$\quad = u_{n-1} \,.\, 1{,}0114$ với $n \geq 2$.

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu

$u_1 = 97{,}6 \,.\, 1{,}0114$, công bội $q = 1{,}0114$.

Vậy dân số của Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020 là:

$u_n = 97{,}6 \,.\, 1{,}0114 \,.\, 1{,}0114^{n-1} = 97{,}6 \,.\, 1{,}0114^n$ (triệu người).

3 Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).

III. TỔNG *n* SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

3 Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1, công bội $q \neq 1$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots + u_1q^{n-1}$.

a) Tính $S_n \,.\, q$ và $S_n - S_n \,.\, q$.

b) Từ đó, hãy tìm công thức tính S_n theo u_1 và q.

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 1$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$.

Ví dụ 5 Tính tổng: $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^9}$.

Giải

S là tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy $S = \dfrac{1 \,.\, \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1\,023}{512}$.

4 Tính tổng n số hạng đầu của mỗi cấp số nhân sau:

a) $3, -6, 12, -24, \ldots$ với $n = 12$;

b) $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}, \ldots$ với $n = 5$.

Ví dụ 6 Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

Giải

Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n.

Ta có: $u_1 = 60$;

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} . 0{,}08 = u_{n-1} . (1 + 0{,}08) = u_{n-1} . 1{,}08.$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1{,}08$.

Áp dụng công thức tính tổng S_n, ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm là: $S_{10} = \dfrac{60(1-1{,}08^{10})}{1-1{,}08} \approx 869{,}194$ (triệu đồng).

BÀI TẬP

1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Vì sao?

a) 5; – 0,5; 0,05; – 0,005; 0,0005;   b) $-9, 3, -1, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{9}$;   c) 2, 8, 32, 64, 256.

2. Chứng minh mỗi dãy số (u_n) với số hạng tổng quát như sau là cấp số nhân:

a) $u_n = \dfrac{-3}{4} . 2^n$;   b) $u_n = \dfrac{5}{3^n}$;   c) $u_n = (-0{,}75)^n$.

3. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$.

a) Tìm u_9.

b) Số – 320 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân trên?

c) Số 160 có phải là một số hạng của cấp số nhân trên không?

4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$, $u_3 = \dfrac{27}{4}$.

a) Tìm công bội q và viết năm số hạng đầu của cấp số nhân trên.

b) Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân trên.

5. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1%/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

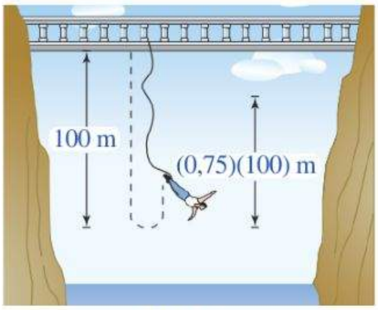
6. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.

b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

7. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (*Hình 3*). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Hình 3

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_n = 3u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Số hạng thứ năm của dãy số (u_n) là:

A. 27. B. 9. C. 81. D. 243.

2. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. 21, – 3, – 27, – 51, – 75.

B. $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}$.

C. $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$.

D. $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60}$.

3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$, công sai $d = 4$. Công thức của số hạng tổng quát u_n là:

A. $u_n = -5 + 4n$. B. $u_n = -1 - 4n$. C. $u_n = -5 + 4n^2$. D. $u_n = -9 + 4n$.

4. Tổng 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên tính từ 1 là:

A. 10 000. B. 10 100. C. 20 000. D. 20 200.

5. Trong các dãy số (u_n) cho bằng phương pháp truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}(n-1)$ với mọi $n \geq 2$.

B. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1} + 1$ với mọi $n \geq 2$.

C. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}^2$ với mọi $n \geq 2$.

D. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

6. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$. Khi đó $\frac{1}{10^{2\,017}}$ là số hạng thứ:

A. 2 016. B. 2 017. C. 2 018. D. 2 019.

7. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \sin n$. B. $u_n = n(-1)^n$. C. $u_n = \frac{1}{n}$. D. $u_n = 2^{n+1}$.

8. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của mỗi dãy số (u_n) sau, biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$; b) $u_n = \dfrac{2}{5^n}$; c) $u_n = (-1)^n \cdot n^2$.

9. Cho cấp số cộng (u_n). Tìm số hạng đầu u_1, công sai d trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_2 + u_5 = 42$ và $u_4 + u_9 = 66$; b) $u_2 + u_4 = 22$ và $u_1 \cdot u_5 = 21$.

10. Cho cấp số nhân (u_n). Tìm số hạng đầu u_1, công bội q trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_6 = 192$ và $u_7 = 384$; b) $u_1 + u_2 + u_3 = 7$ và $u_5 - u_2 = 14$.

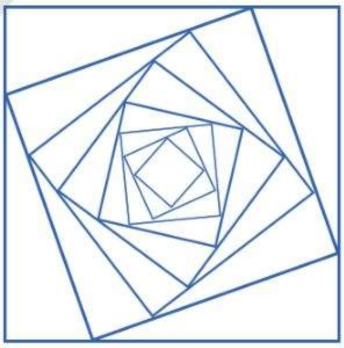
11. Tứ giác *ABCD* có số đo bốn góc *A*, *B*, *C*, *D* theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Biết số đo góc *C* gấp 5 lần số đo góc *A*. Tính số đo các góc của tứ giác *ABCD* theo đơn vị độ.

12. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, … ở hàng thứ *n* có *n* cây. Biết rằng người ta trồng hết 4 950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

13. Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là 12 288 m^2. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

14. Một khay nước có nhiệt độ 23 ^oC được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

15. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (*Hình 4*). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n. Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

16. Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là *a* (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

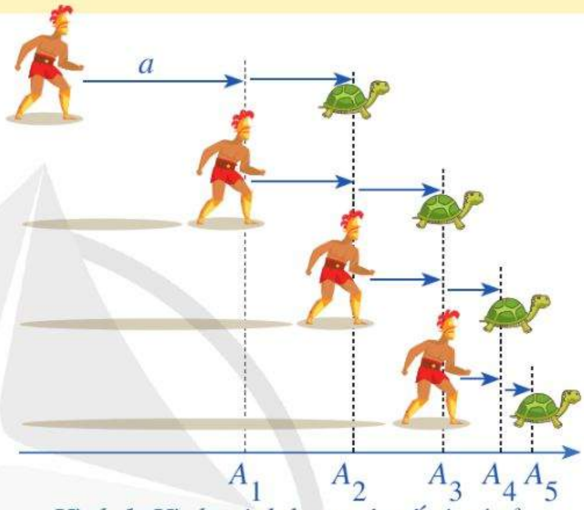
CHƯƠNG III

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: giới hạn của dãy số; giới hạn của hàm số; hàm số liên tục.

§1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Zénon (Zê-nông, 496 – 429 trước Công nguyên) là một triết gia Hy Lạp ở thành phố Edée đã phát biểu nghịch lí như sau: Achilles (A-sin) là một lực sĩ trong thần thoại Hy Lạp, người được mệnh danh là "có đôi chân chạy nhanh như gió" đuổi theo một con rùa trên một đường thẳng. Nếu lúc xuất phát, rùa ở điểm A_1 cách Achilles một khoảng bằng a khác 0. Khi Achilles chạy đến vị trí rùa xuất phát thì rùa chạy về trước một khoảng (như *Hình 1*). Quá trình này tiếp tục vô hạn. Vì thế, Achilles không bao giờ đuổi kịp rùa.



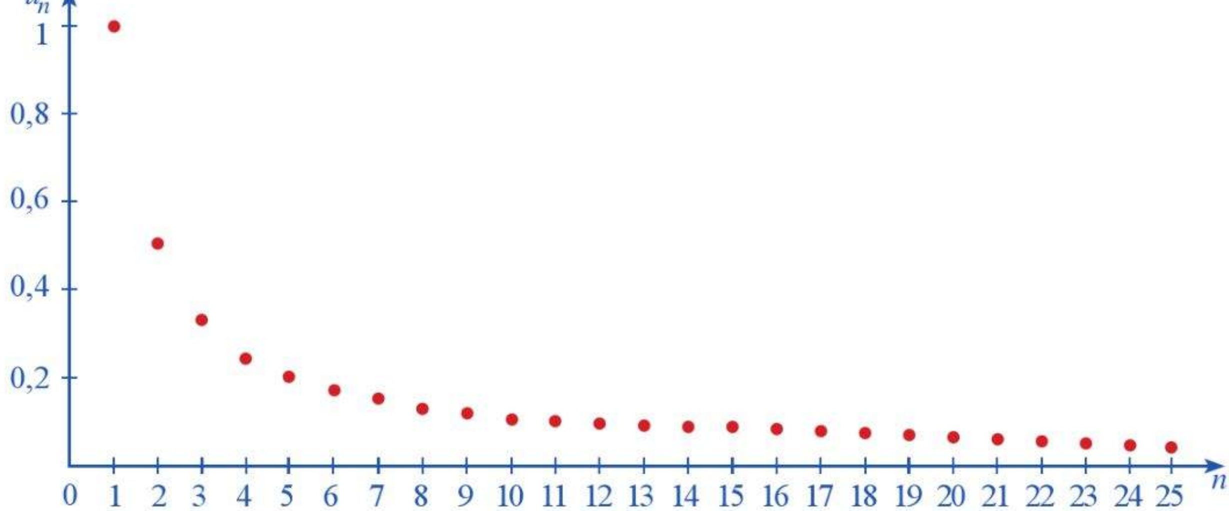
Hình 1. Hình minh hoạ một số vị trí của Achilles và rùa

Trên thực tế, Achilles không đuổi kịp rùa là vô lí. Kiến thức toán học nào có thể giải thích được nghịch lí Zénon nói trên là không đúng?

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

1 *Hình 2* biểu diễn các số hạng của dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{1}{n}$ trên hệ trục toạ độ.



Hình 2

a) Nhận xét về sự thay đổi các giá trị u_n khi n ngày càng lớn.

b) Hoàn thành bảng và trả lời câu hỏi sau:

n	1 000	1 001	...	10 000	10 001	...
$\|u_n - 0\|$	0,001	?	...	0,0001	?	...

Kể từ số hạng u_n nào của dãy số thì khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn 0,001? 0,0001?

• *Kể từ số hạng* $u_{1\,001}$ *trở đi thì khoảng cách từ* u_n *đến* 0 *nhỏ hơn* 0,001.

• *Kể từ số hạng* $u_{10\,001}$ *trở đi thì khoảng cách từ* u_n *đến* 0 *nhỏ hơn* 0,0001.

Ta có định nghĩa dãy số có giới hạn 0 như sau:

Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Chú ý: Ngoài kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, ta cũng sử dụng các kí hiệu sau: $\lim u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Từ Hoạt động 1, ta có: $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

Nhận xét: Nếu u_n ngày càng gần tới 0 khi n ngày càng lớn thì $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 1 Cho dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Giả sử h là số dương bé tuỳ ý cho trước.

a) Tìm số tự nhiên n để $|u_n| < h$.

b) Tính $\lim \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Giải

a) Ta có: $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$. Do đó: $|u_n| < h \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < h \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{h}$.

Vậy với các số tự nhiên n lớn hơn $\dfrac{1}{h}$ thì $|u_n| < h$.

b) Theo định nghĩa về dãy số có giới hạn 0, ta có: $\lim \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

1 Chứng minh rằng:

a) $\lim 0 = 0$;

b) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

2 Cho dãy số (u_n), với $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - 2)$.

Ta có: $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - 2) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Vì thế dãy (u_n) tiến tới 2 khi n dần tới vô cực.

Ta có định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn như sau:

Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.

Chú ý: Ngoài kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, ta cũng sử dụng các kí hiệu sau: $\lim u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 2 Chứng minh rằng:

a) $\lim c = c$, với c là hằng số; b) $\lim \dfrac{6n+1}{n} = 6.$

Giải

a) Do $\lim(c - c) = \lim 0 = 0$ nên theo định nghĩa về dãy số có giới hạn hữu hạn, ta có: $\lim c = c$.

b) Do $\lim\left(\dfrac{6n+1}{n} - 6\right) = \lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{6n+1}{n} = 6.$

2 Chứng minh rằng

$$\lim \frac{-4n+1}{n} = -4.$$

Chú ý

- Một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.
- Không phải dãy số nào cũng có giới hạn, chẳng hạn như dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

2. Một số giới hạn cơ bản

Ta có thể chứng tỏ được các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương cho trước;

b) $\lim \dfrac{c}{n} = 0$; $\lim \dfrac{c}{n^k} = 0$ với c là hằng số, k là số nguyên dương cho trước;

c) Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$;

d) Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là e,

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Một giá trị gần đúng của e là 2,718281828459045.

Ví dụ 3 Chứng minh rằng $\lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Giải

Do $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ nên $\lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

3 Chứng minh rằng $\lim\left(\frac{e}{\pi}\right)^n = 0$.

II. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

3 Cho hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n = 8 + \frac{1}{n}$; $v_n = 4 - \frac{2}{n}$.

a) Tính $\lim u_n$, $\lim v_n$.

b) Tính $\lim(u_n + v_n)$ và so sánh giá trị đó với tổng $\lim u_n + \lim v_n$.

c) Tính $\lim(u_n \,.\, v_n)$ và so sánh giá trị đó với tích $(\lim u_n) \,.\, (\lim v_n)$.

Ta có định lí về giới hạn hữu hạn của một tổng, của một hiệu, của một tích, của một thương và của một căn thức như sau:

a) Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ thì:

$$\lim(u_n + v_n) = a + b;$$
$$\lim(u_n - v_n) = a - b.$$
$$\lim(u_n \,.\, v_n) = a \,.\, b;$$
$$\lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \ (v_n \neq 0, b \neq 0).$$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Ví dụ 4 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)$;

b) $\lim\frac{4n-3}{n}$;

c) $\lim\left(5 + \frac{1}{n}\right)\left(6 - \frac{1}{4^n}\right)$.

Giải

a) $\lim\left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim 2 + \lim\frac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2.$

b) $\lim\frac{4n-3}{n} = \lim\left(\frac{4n}{n} - \frac{3}{n}\right) = \lim 4 - \lim\frac{3}{n} = 4 - 0 = 4.$

c) $\lim\left(5 + \frac{1}{n}\right)\left(6 - \frac{1}{4^n}\right) = \lim\left(5 + \frac{1}{n}\right) . \lim\left[6 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = 5 \,.\, 6 = 30.$

4 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{8n^2 + n}{n^2}$;

b) $\lim\frac{\sqrt{4 + n^2}}{n}$.

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

4 Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

a) So sánh $|q|$ với 1.

b) Tính $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Từ đó, hãy tính $\lim S_n$.

Ta nói (u_n) là cấp số nhân lùi vô hạn và $\lim S_n$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, ..., u_1q^{n-1}, ...$ có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn.*

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là: $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}$.

Ví dụ 5 Tính tổng $T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n-1}} + ...$

Giải

Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân (u_n), có $u_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$ nên $T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n-1}} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

5 Tính tổng

$M = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - ... + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + ...$

Ví dụ 6 Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,(3) dưới dạng phân số.

Giải

Ta có: $0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^n} + ... = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$.

6 Giải thích vì sao nghịch lí Zénon trong phần mở đầu là không đúng.

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

5 Quan sát dãy số (u_n) với $u_n = n^2$ và cho biết giá trị của u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì được hay không kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Ta thấy u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì kể từ một số hạng nào đó trở đi. Ta nói dãy (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$.

Ta có định nghĩa về dãy số có giới hạn vô cực như sau:

• Ta nói dãy số (u_n) *có giới hạn* $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ hay $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

• Ta nói dãy số (u_n) *có giới hạn* $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ hay $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 7 Chứng tỏ rằng $\lim n^2 = +\infty$.

Giải

Xét dãy số $(u_n) = n^2$.

Với M là số dương bất kì, ta thấy: $u_n > M \Leftrightarrow n^2 > M \Leftrightarrow n > \sqrt{M}$.

Vậy với các số tự nhiên $n > \sqrt{M}$ thì $u_n > M$. Do đó, $\lim n^2 = +\infty$.

7 Tính $\lim(-n^3)$.

Nhận xét

• $\lim n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương cho trước.

• $\lim q^n = +\infty$ với $q > 1$ là số thực cho trước.

• Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ (hoặc $\lim v_n = -\infty$) thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

• Nếu $\lim u_n = a$, $a > 0$ và $\lim v_n = 0$, $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

• $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

Ví dụ 8 Chứng tỏ rằng $\lim\left(\dfrac{e}{2}\right)^n = +\infty$.

Giải

Do $\dfrac{e}{2} > 1$ nên $\lim\left(\dfrac{e}{2}\right)^n = +\infty$.

8 Chứng tỏ rằng $\lim \dfrac{n-1}{n^2} = 0$.

BÀI TẬP

1. Cho hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$; $v_n = 5 - \dfrac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim u_n$, $\lim v_n$.

b) $\lim(u_n + v_n)$, $\lim(u_n - v_n)$, $\lim(u_n \cdot v_n)$, $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{5n+1}{2n}$; b) $\lim \dfrac{6n^2+8n+1}{5n^2+3}$; c) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2}$;

d) $\lim \left(2-\dfrac{1}{3^n}\right)$; e) $\lim \dfrac{3^n+2^n}{4\,.\,3^n}$; g) $\lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3^n}$.

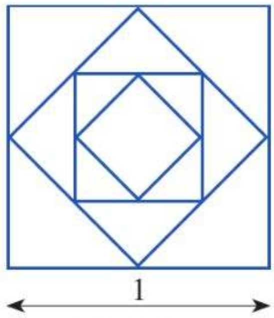
3. a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), với $u_1=\dfrac{2}{3}$, $q=-\dfrac{1}{4}$.

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 1,(6) dưới dạng phân số.

4. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như *Hình 3*. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n;

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.



Hình 3

5. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24\,000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khoẻ của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*).

(*Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021*)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

6. Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$,

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2}$,

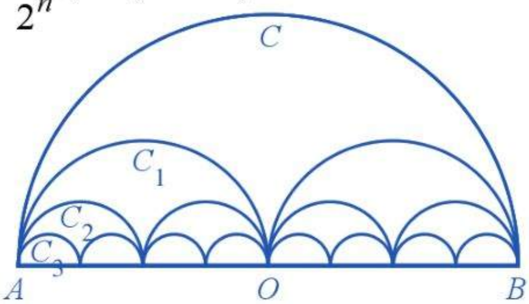
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{4}, \ldots$

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2^n}, \ldots$ (*Hình 4*).

Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n.

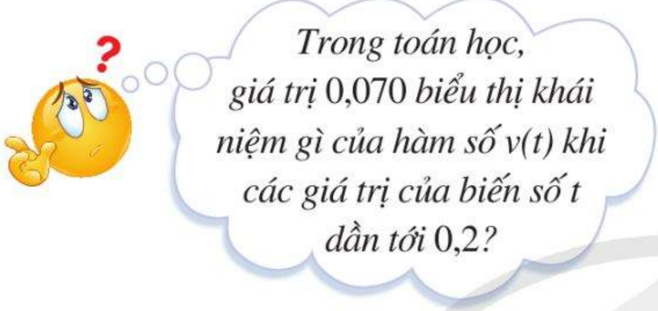
b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

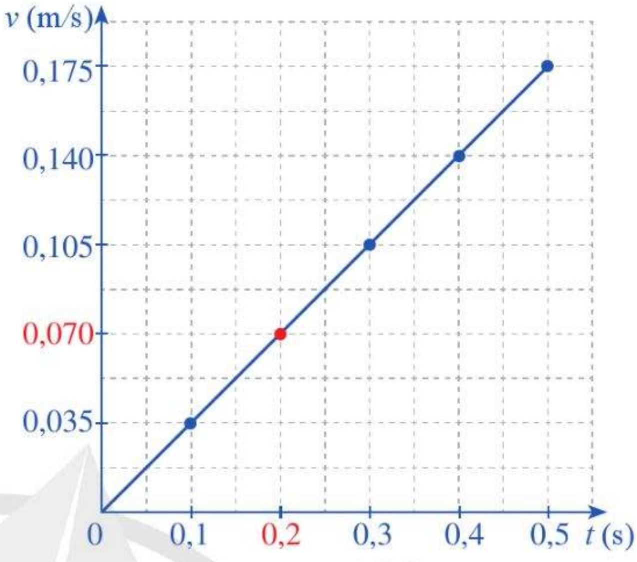


Hình 4

§2 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Hình 5 biểu diễn đồ thị hàm số vận tốc $v(t)$ theo biến số t (t là thời gian, đơn vị: giây). Khi các giá trị của biến số t dần tới 0,2 (s) thì các giá trị tương ứng của hàm số $v(t)$ dần tới 0,070 (m/s).





Hình 5

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

1 Xét hàm số $f(x) = 2x$.

a) Xét dãy số (x_n), với $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. Hoàn thành bảng giá trị $f(x_n)$ tương ứng.

x	$x_1 = 2$	$x_2 = \frac{3}{2}$	$x_3 = \frac{4}{3}$	$x_4 = \frac{5}{4}$	...	$x_n = \frac{n+1}{n}$	...
$f(x)$	$f(x_1) = ?$	$f(x_2) = ?$	$f(x_3) = ?$	$f(x_4) = ?$	...	$f(x_n) = ?$	...

Các giá trị tương ứng của hàm số $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ lập thành một dãy số mà ta kí hiệu là $(f(x_n))$. Tìm $\lim f(x_n)$.

b) Chứng minh rằng với dãy số bất kì (x_n), $x_n \to 1$ ta luôn có $f(x_n) \to 2$.

Dưới đây ta viết khoảng K thay cho các khoảng $(a ; b)$, $(-\infty ; b)$, $(a ; +\infty)$, $(-\infty ; +\infty)$.

Một cách tổng quát ta có:

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.
Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$.
Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, với c là hằng số.

Ví dụ 1 Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ $(x \neq 3)$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$.

Giải

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $x_n \neq 3$ và $\lim x_n = 3$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n^2 - 9}{x_n - 3} = \lim \dfrac{(x_n - 3)(x_n + 3)}{x_n - 3}$

$$= \lim(x_n + 3) = \lim x_n + \lim 3 = 3 + 3 = 6.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$.

1 Sử dụng định nghĩa, chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Chú ý: Hàm số $f(x)$ có thể không xác định tại $x = x_0$ nhưng vẫn tồn tại giới hạn của hàm số đó khi x dần tới x_0.

2. Phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số

2 Cho hai hàm số $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 1$.

a) Tính $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

b) Tính $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$ và so sánh với $\lim\limits_{x \to 1} f(x) + \lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

c) Tính $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) - g(x)]$ và so sánh với $\lim\limits_{x \to 1} f(x) - \lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

d) Tính $\lim\limits_{x \to 1} [f(x).g(x)]$ và so sánh với $\lim\limits_{x \to 1} f(x).\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

e) Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ và so sánh với $\dfrac{\lim\limits_{x \to 1} f(x)}{\lim\limits_{x \to 1} g(x)}$.

Ta thừa nhận định lí sau:

a) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbb{R})$ thì

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \,.\, g(x)] = L \,.\, M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ví dụ 2 Tính:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + x - 6)$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{2x - 1}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + x - 6) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 6$

$= 4 + 2 - 6 = 0.$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{2x - 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x + 3)}{\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1} (2x) + \lim\limits_{x \to 1} 3}{\lim\limits_{x \to 1} (2x) - \lim\limits_{x \to 1} 1} = \dfrac{1 + 2 + 3}{2 - 1} = 6.$

2 Tính:

a) $\lim\limits_{x \to 2} [(x+1)(x^2 + 2x)]$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 + x + 3}$.

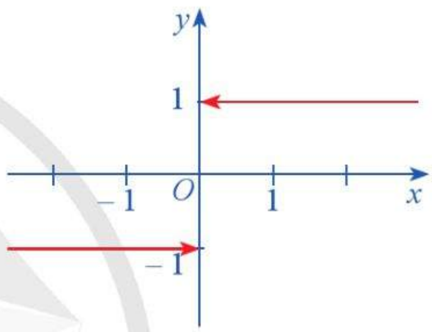
3. Giới hạn một phía

3 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0. \end{cases}$

Hàm số $f(x)$ có đồ thị ở *Hình 6*.

a) Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n < 0$ và $\lim u_n = 0$.
Xác định $f(u_n)$ và tìm $\lim f(u_n)$.

b) Xét dãy số (v_n) sao cho $v_n > 0$ và $\lim v_n = 0$.
Xác định $f(v_n)$ và tìm $\lim f(v_n)$.



Hình 6

Nhận xét

- Ở câu a, ta xét giới hạn của hàm $f(x)$ khi x tiến tới 0 về bên trái. Giới hạn đó là *giới hạn bên trái* của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to 0$.
- Ở câu b, ta xét giới hạn của hàm $f(x)$ khi x tiến tới 0 về bên phải. Giới hạn đó là *giới hạn bên phải* của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to 0$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có các định nghĩa sau:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;x_0)$.

Số L được gọi là *giới hạn bên trái* của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0\,; b)$.

Số L được gọi là *giới hạn bên phải* của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Ví dụ 3 Tính: $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2-x}$.

> **3** Tính $\lim\limits_{x \to -4^+} (\sqrt{x+4}+x)$.

Giải

Với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < 2$ và $x_n \to 2$, ta có:

$\lim\limits_{x_n \to 2^-} \sqrt{2-x_n} = \sqrt{\lim\limits_{x_n \to 2^-}(2-x_n)} = \sqrt{2-\lim\limits_{x_n \to 2^-} x_n} = \sqrt{2-2} = 0.$ Vậy $\lim\limits_{x_n \to 2^-} \sqrt{2-x} = 0.$

Định lí sau đây cho ta mối liên hệ giữa "giới hạn hai phía" $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ với giới hạn bên trái $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ và giới hạn bên phải $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

> $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L.$

Ví dụ 4 Xét hàm số $f(x)$ trong Hoạt động 3. Chứng tỏ rằng không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Giải

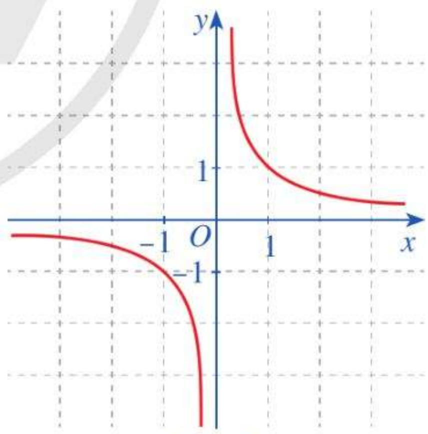
Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Suy ra $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

4 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ có đồ thị như ở *Hình 7*. Quan sát đồ thị đó và cho biết:

a) Khi biến x dần tới dương vô cực thì $f(x)$ dần tới giá trị nào.

b) Khi biến x dần tới âm vô cực thì $f(x)$ dần tới giá trị nào.



Hình 7

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

> a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;+\infty)$.
> Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.
> Kí hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty\,;\ a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

Chú ý

- Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \to +\infty} c = c;\ \lim_{x \to -\infty} c = c;\ \lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^k} = 0;\ \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

- Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Ví dụ 5 Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Giải

Ta có: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2.$$

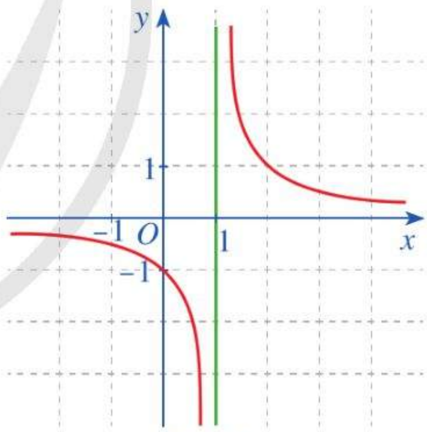
4 Tính $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+2}{4x-5}$.

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC (MỘT PHÍA) CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

5 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ có đồ thị như *Hình 8*. Quan sát đồ thị đó và cho biết:

a) Khi biến x dần tới 1 về bên phải thì $f(x)$ dần tới đâu.

b) Khi biến x dần tới 1 về bên trái thì $f(x)$ dần tới đâu.



Hình 8

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;\ +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \to a^+$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to a$, ta có $f(x_n) \to +\infty$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \to +\infty$ khi $x \to a^+$.

- Các trường hợp $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Chú ý: Ta có hai giới hạn cơ bản sau:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty; \quad \lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty.$$

Ví dụ 6 Tính: $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}$

Giải

Ta có: $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

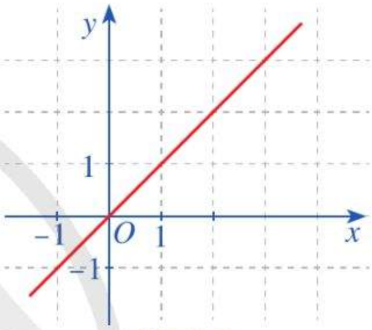
5 Tính: $\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2}$.

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

6 Cho hàm số $f(x) = x$ có đồ thị như *Hình 9*. Quan sát đồ thị đó và cho biết:

a) Khi biến x dần tới dương vô cực thì $f(x)$ dần tới đâu.

b) Khi biến x dần tới âm vô cực thì $f(x)$ dần tới đâu.



Hình 9

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \to +\infty$ khi $x \to +\infty$.

• Các trường hợp $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Chú ý: Ta có ba giới hạn cơ bản sau:

- $\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k là số nguyên dương.
- $\lim_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ với k là số nguyên dương chẵn.
- $\lim_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ với k là số nguyên dương lẻ.

Ví dụ 7 Tính: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

6 Tính: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4$.

BÀI TẬP

1. Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -3} x^2$;

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$.

2. Biết rằng hàm số $f(x)$ thoả mãn $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$. Trong trường hợp này có tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ hay không? Giải thích.

3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4x + 3)$;

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x + 1}{3x - 4}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x - 11}{2x + 3}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$;

e) $\lim\limits_{x \to 6^-} \dfrac{1}{x - 6}$;

g) $\lim\limits_{x \to 7^+} \dfrac{1}{x - 7}$.

5. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \dfrac{50t}{t + 4}$ $(t \geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

6. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50\,000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \overline{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

§3 HÀM SỐ LIÊN TỤC

Cầu Sông Hàn là một trong những cây cầu bắc qua sông Hàn ở Đà Nẵng. Đây là cây cầu quay đầu tiên do kĩ sư, công nhân Việt Nam tự thiết kế và thi công. Khi cầu không quay (*Hình 10a*), mặt cầu liền mạch nên các phương tiện có thể đi lại giữa hai đầu cầu. Khi cầu quay (*Hình 10b*) để các tàu, thuyền có thể đi qua thì mặt cầu không còn liền mạch nữa, các phương tiện không thể đi qua giữa hai đầu cầu.

a) Cầu Sông Hàn khi không quay

b) Cầu Sông Hàn khi quay để tàu đi qua

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 10

Kiến thức gì trong toán học thể hiện chuyển động có đường đi là đường liền mạch?

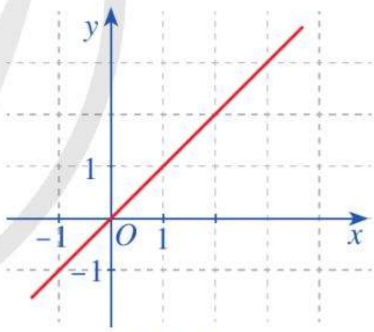
I. KHÁI NIỆM

1. Hàm số liên tục tại một điểm

1 Quan sát đồ thị hàm số $f(x) = x$ ở *Hình 11*.

a) Tính $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) So sánh $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ với $f(1)$.



Hình 11

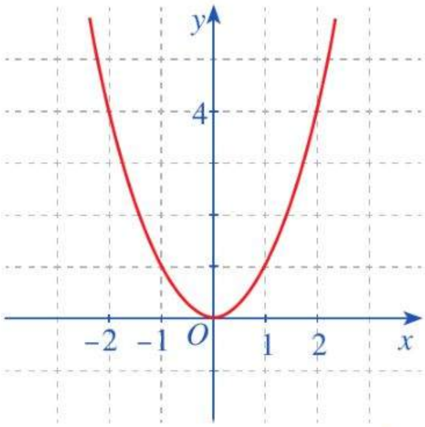
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;b)$ và $x_0 \in (a\,;b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nhận xét: Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0.

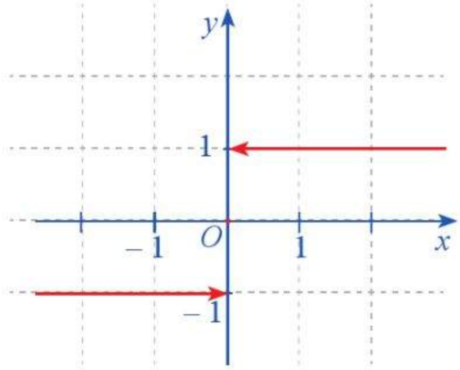
Ví dụ 1 Quan sát đồ thị hàm số trong *Hình 12a* và *Hình 12b*, xác định $f(0)$ và $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Từ đó cho biết mỗi hàm số đó có liên tục tại $x = 0$ hay không. Giải thích.

Giải

Trong *Hình 12a* ta có: $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.



a) *Đồ thị hàm số* $f(x) = x^2$



b) *Đồ thị hàm số* $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$

Hình 12

Như vậy $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Trong *Hình 12b* ta có:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

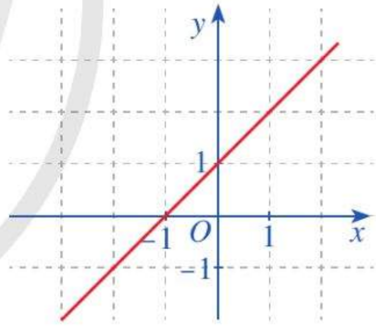
1 Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = x^3 + 1$ tại $x_0 = 1$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn

2 Cho hàm số $f(x) = x + 1$ với $x \in \mathbb{R}$.

a) Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ có liên tục tại điểm x_0 hay không?

b) Quan sát đồ thị hàm số $f(x) = x + 1$ với $x \in \mathbb{R}$ (*Hình 13*), nêu nhận xét về đặc điểm của đồ thị hàm số đó.



Hình 13

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a ; b)$ nếu hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a ; b]$ nếu hàm số đó liên tục trên khoảng $(a ; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Chú ý: Khái niệm hàm số liên tục trên các tập hợp có dạng $(a ; b]$, $[a ; b)$, $(a ; +\infty)$, $[a ; +\infty)$, $(-\infty ; a)$, $(-\infty ; a]$, $(-\infty ; +\infty)$ được định nghĩa tương tự.

Nhận xét: Đồ thị hàm số liên tục trên một khoảng là "đường liền" trên khoảng đó.

Ví dụ 2

a) Hàm số $f(x) = 2x + 3$ có liên tục trên đoạn $[3 ; 4]$ hay không?

b) Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ $(x \neq 2)$ có liên tục trên khoảng $(1 ; 3)$ hay không?

2 Hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{nếu } x<2 \\ -x & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$$

có liên tục trên $\mathbb{R}$ hay không?

Giải

a) Với mỗi $x_0 \in (3 ; 4)$, ta có: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0}(2x+3)=2x_0+3=f(x_0)$. Ta lại có:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x)=\lim_{x \to 3^+}(2x+3)=9=f(3); \quad \lim_{x \to 4^-} f(x)=\lim_{x \to 4^-}(2x+3)=11=f(4).$$

Vậy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[3 ; 4]$.

b) Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ không xác định tại $x = 2$ nên hàm số không liên tục tại $x = 2$.

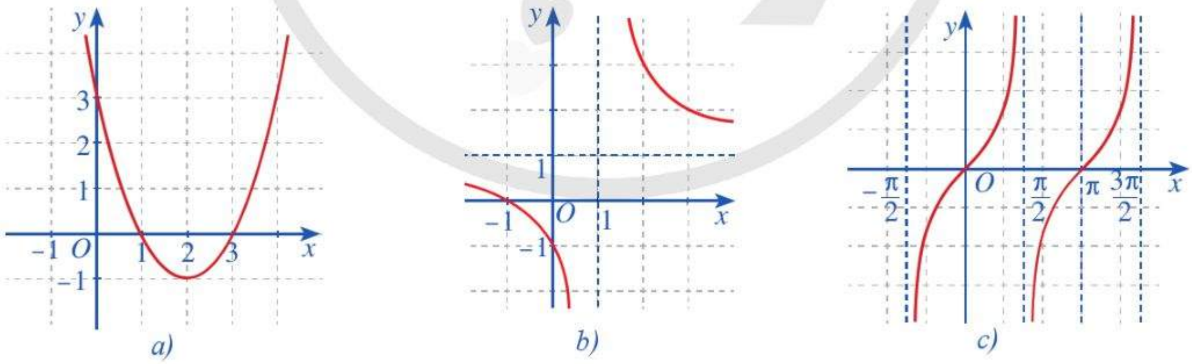
Do $2 \in (1 ; 3)$ nên hàm số đã cho không liên tục trên khoảng $(1 ; 3)$.

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

1. Tính liên tục của một số hàm sơ cấp cơ bản

Các hàm đa thức, hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), hàm căn thức, hàm số lượng giác là những hàm sơ cấp cơ bản. Sau đây, ta sẽ xét tính liên tục của những hàm đó.

3 Quan sát đồ thị các hàm số: $y=x^2-4x+3$ (*Hình 14a*); $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ (*Hình 14b*); $y=\tan x$ (*Hình 14c*) và nêu nhận xét về tính liên tục của mỗi hàm số đó trên từng khoảng của tập xác định.



Hình 14

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

- Các hàm đa thức và hai hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Các hàm phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
- Hàm căn thức $y=\sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$.

Ví dụ 3 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ nếu } x\neq 3\\ a \quad \text{ nếu } x=3.\end{cases}$

Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giải

Do $f(x)=x+1$ nếu $x\neq 3$ nên hàm số đó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty\,;3)$ và $(3\,;+\infty)$.

Với $x=3$ thì $f(3)=a$. Ta có: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x+1)=3+1=4$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=3$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)\Leftrightarrow a=4$.

3 Hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-8}$ có liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty\,;8)$, $(8\,;+\infty)$ hay không?

2. Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục

4 Cho hai hàm số $f(x)=x^3+x$ và $g(x)=x^2+1$ $(x\in\mathbb{R})$. Hãy cho biết:

a) Hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ có liên tục tại $x=2$ hay không.

b) Các hàm số $f(x)+g(x)\,;f(x)-g(x)\,;f(x).g(x)\,;\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có liên tục tại $x=2$ hay không.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ và $y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_0;

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

Ví dụ 4 Cho hàm số

$$f(x)=x^3+2x+\frac{6}{x-2}.$$

a) Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x=3$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của hàm số đó.

4 Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ trên $\mathbb{R}$.

Giải

Tập xác định hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

a) Ta thấy: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3+2x+\dfrac{6}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 3}x^3+\lim\limits_{x\to 3}(2x)+\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6}{x-2}$

$$=3^3+2.3+\frac{6}{3-2}=f(3).$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=3$.

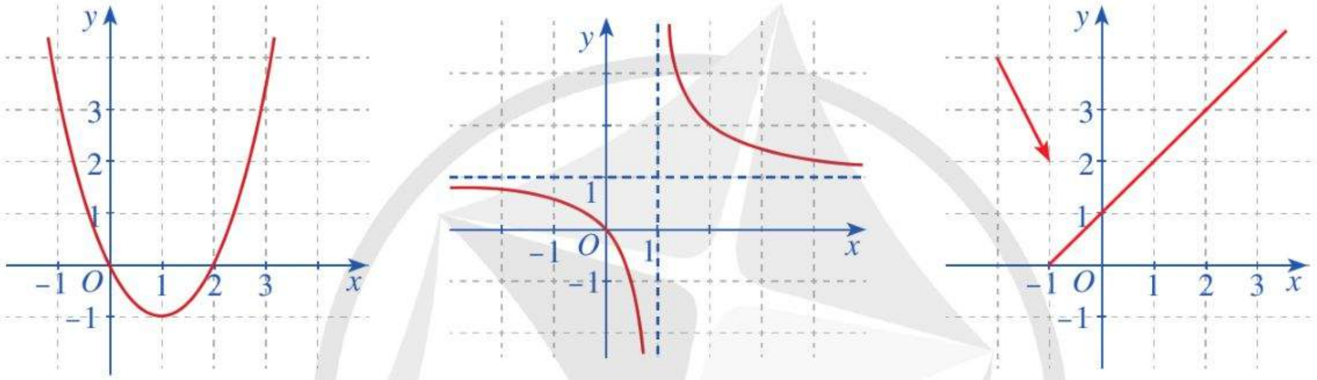
b) Hàm số $g(x)=x^3+2x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số $g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty\,;2)$ và $(2\,;+\infty)$.

Hàm số $h(x) = \dfrac{6}{x-2}$ là hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên mỗi khoảng xác định $(-\infty\,;\,2)$ và $(2\,;\,+\infty)$. Vậy hàm số $f(x) = g(x) + h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty\,;\,2)$ và $(2\,;\,+\infty)$.

BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số $f(x) = 2x^3 + x + 1$ tại điểm $x = 2$.

2. Trong các hàm số có đồ thị ở *Hình 15a, 15b, 15c*, hàm số nào liên tục trên tập xác định của hàm số đó? Giải thích.



a) Đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 2x$

b) Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

c) Đồ thị hàm số $h(x) = \begin{cases} -2x \text{ nếu } x < -1 \\ x + 1 \text{ nếu } x \geq -1 \end{cases}$

Hình 15

3. Bạn Nam cho rằng: "Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0, còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0, thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ không liên tục tại x_0". Theo em, ý kiến của bạn Nam đúng hay sai? Giải thích.

4. Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau trên tập xác định của hàm số đó:

a) $f(x) = x^2 + \sin x$; b) $g(x) = x^4 - x^2 + \dfrac{6}{x-1}$; c) $h(x) = \dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{x-1}{x+4}$.

5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{nếu } x \neq 4 \\ 2a + 1 & \text{nếu } x = 4. \end{cases}$

a) Với $a = 0$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 4$.

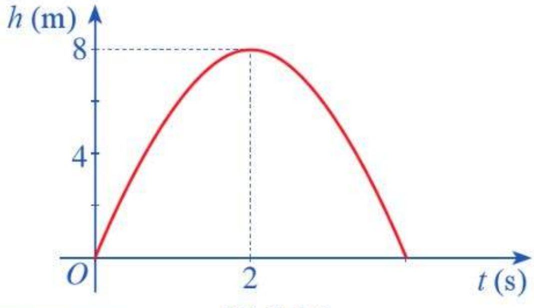
b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 4$?

c) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên tập xác định của nó?

6. *Hình 16* biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên theo thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim\limits_{t \to 2}(-2t^2 + 8t)$.



Hình 16

TÌM HIỂU THÊM

1. Giới hạn của hàm số

Ở bài học trước, ta đã định nghĩa khái niệm $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ trong trường hợp hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, ở đó khoảng K chứa điểm x_0 và khoảng K có một trong những dạng sau: $(a ; b)$, $(-\infty ; b)$, $(a ; +\infty)$, $(-\infty ; +\infty)$.

Tuy nhiên, các hàm số thường gặp có thể có miền xác định ở dạng phức tạp hơn, chẳng hạn miền xác định có thể có dạng $[0 ; 3)$ và $x_0 = 1 \in [0; 3)$. Vì thế, ta cần mở rộng khái niệm trên cho những hàm số có miền xác định ở dạng phức tạp hơn.

Cụ thể, ta có thể làm như sau:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $K \subset \mathbb{R}$ và cho $x_0 \in \mathbb{R}$. Giả sử có số thực $a > 0$ sao cho $(x_0 - a ; x_0 + a) \subset K$ hoặc $(x_0 - a ; x_0 + a) \setminus \{x_0\} \subset K$.

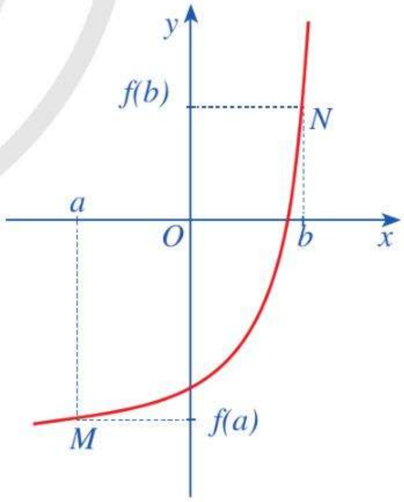
Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (x_0 - a ; x_0 + a) \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

2. Ứng dụng tính liên tục của hàm số vào xét sự tồn tại nghiệm của phương trình

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ sao cho $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Khi đó, đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$ là một đường cong liền nét đi từ điểm $M(a ; f(a))$ nằm dưới trục hoành đến điểm $N(b; f(b))$ nằm phía trên trục hoành (*Hình 17*). Vì thế, trong khoảng $(a ; b)$ đồ thị đó sẽ cắt trục hoành, tức là tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = 0$. Nói cách khác, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a ; b)$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a) . f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = 0$.



Hình 17

Ví dụ Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x - 4 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x - 4$. Ta có: $f(0) = -4$; $f(2) = 6$. Suy ra $f(0).f(2) < 0$. Do $f(x)$ liên tục trên $[0 ; 2]$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0 ; 2)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và $x_0 \in (a\ ;\ b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 là:

A. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

B. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

C. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

D. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{2n^2 + 6n + 1}{8n^2 + 5}$;

b) $\lim \dfrac{4n^2 - 3n + 1}{-3n^3 + 5n^2 - 2}$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2 - n + 3}}{8n - 5}$;

d) $\lim \left(4 - \dfrac{2^{n+1}}{3^n}\right)$;

e) $\lim \dfrac{4 . 5^n + 2^{n+2}}{6 . 5^n}$;

g) $\lim \dfrac{2 + \dfrac{4}{n^3}}{6^n}$.

3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -3} (4x^2 - 5x + 6)$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$.

4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x + 8}{5x - 2}$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x + 8}{5x - 2}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2}$;

e) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{3x^2 + 4}{2x + 4}$;

g) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{3x^2 + 4}{2x + 4}$.

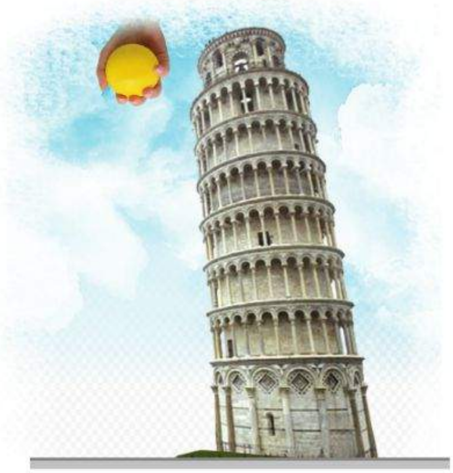
5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{nếu } x < 2 \\ 4 & \text{nếu } x = 2 \\ -3x + b & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$

a) Với $a = 0$, $b = 1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$.

b) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục tại $x = 2$?

c) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục trên tập xác định?

6. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (*Hình 18*). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



Hình 18

7. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$.

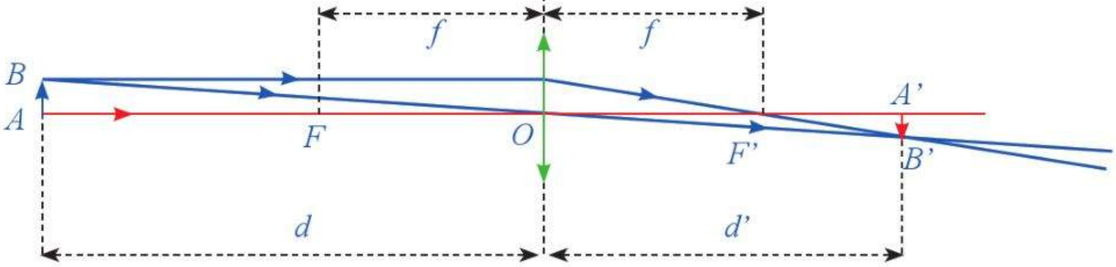
a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$.

8. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như *Hình 19*. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b) Tìm $\lim\limits_{d \to f^+} \varphi(d)$, $\lim\limits_{d \to f^-} \varphi(d)$ và $\lim\limits_{d \to f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.



Hình 19

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

CHỦ ĐỀ 1. MỘT SỐ HÌNH THỨC ĐẦU TƯ TÀI CHÍNH

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Một số khái niệm cơ bản

Đầu tư tài chính là việc mua một tài sản tài chính với hi vọng rằng nó sẽ tạo ra thu nhập hoặc đánh giá cao trong tương lai và được bán với giá cao hơn. Có nhiều hình thức đầu tư tài chính, chẳng hạn: đầu tư bất động sản; đầu tư vàng; đầu tư chứng khoán.

Trong thực tiễn ngày nay, đầu tư chứng khoán là hình thức đầu tư phổ biến, bao gồm: chứng khoán vốn – cổ phiếu hoặc chứng khoán nợ – trái phiếu (trong đó có trái phiếu chính phủ, trái phiếu doanh nghiệp). Sau đây, ta sẽ giới thiệu một số khái niệm cơ bản.

a) Vốn điều lệ của công ty cổ phần được chia thành các phần bằng nhau, mỗi phần bằng nhau gọi là *cổ phần* (Điểm a, Khoản 1, Điều 111, Luật Doanh nghiệp 2020).

b) Giá trị cổ phần được thể hiện bằng *cổ phiếu.* Bên cạnh đó, cổ phiếu là một loại chứng khoán (được coi là tài sản) và cũng là đối tượng giao dịch trên sàn chứng khoán (Khoản 1, Điều 4, Luật Chứng khoán 2019).

c) Theo Khoản 2, Điều 13, Luật Chứng khoán 2019, *mệnh giá cổ phiếu* (hoặc chứng chỉ quỹ) chào bán ra công chúng là 10 nghìn đồng. Như vậy, mệnh giá cổ phiếu là 10 nghìn đồng. Các sàn giao dịch chứng khoán sẽ quy định mức giá tối thiểu mà nhà đầu tư phải bỏ ra khi tham gia giao dịch cổ phiếu.

d) *Mệnh giá trái phiếu* chào bán ra công chúng là 100 nghìn đồng và bội số của 100 nghìn đồng (Khoản 2, Điều 13, Luật Chứng khoán 2019).

e) *Lợi nhuận ròng* của doanh nghiệp được hiểu là khoản tiền chênh lệch giữa tổng doanh thu bán được trừ đi tất cả các khoản chi phí, kể cả thuế. Như vậy, lợi nhuận ròng chính là tiền lãi của doanh nghiệp sau khi đã đóng thuế.

g) *Cổ tức* là khoản lợi nhuận ròng được trả cho mỗi cổ phần bằng tiền mặt hoặc bằng tài sản khác.

h) Mỗi công ty niêm yết trên sàn giao dịch chứng khoán đều được Ủy ban Chứng khoán Nhà nước cấp cho một mã riêng, và thường là tên viết tắt của công ty đó.

Chẳng hạn, Công ty cổ phần Sữa Việt Nam có mã là VNM (Vinamilk); Ngân hàng Thương mại cổ phần Đầu tư và Phát triển Việt Nam có mã là BID (BIDV).

Hiện nay, ở Việt Nam có hai Sở giao dịch chứng khoán chính thức là: Sở Giao dịch Chứng khoán Hà Nội (HNX) có trang web là *https://hnx.vn/vi-vn* và Sở Giao dịch Chứng khoán TP.Hồ Chí Minh (HOSE) có trang web là *https://hsx.vn.*

Danh sách các mã chứng khoán giao dịch (được sắp xếp theo thứ tự từ A – Z) có thể tìm kiếm tại hai trang web trên.

2. Các hình thức trả cổ tức

Có hai hình thức chi trả cổ tức phổ biến nhất, đó là: trả bằng tiền và trả bằng cổ phiếu.

- Trả cổ tức bằng tiền là việc doanh nghiệp trả cổ tức bằng tiền trực tiếp vào tài khoản chứng khoán cho cổ đông.

Tại thị trường chứng khoán Việt Nam, khi một doanh nghiệp công bố tỉ lệ trả cổ tức bằng tiền, doanh nghiệp đó dựa trên mệnh giá cổ phiếu, tức là 10 000 đồng/cổ phiếu.

- Trả cổ tức bằng cổ phiếu khá phổ biến ở những doanh nghiệp đang trong giai đoạn tăng trưởng cao. Bởi lúc này doanh nghiệp đang có nhu cầu cao được giữ lại lợi nhuận để mở rộng kinh doanh.

Ví dụ 1 Ngày 18/11/2020, Tổng Công ty Cổ phần Vận tải Dầu khí có mã cổ phiếu là PVT chi trả cổ tức năm 2019 như sau: bằng tiền với tỉ lệ 4%; bằng cổ phiếu với tỉ lệ 15% (*Nguồn: https://petrovietnam.petrotimes.vn*). Hãy cho biết:

a) Một cổ phiếu PVT sẽ nhận được bao nhiêu tiền.

b) Một cổ đông nắm giữ 100 cổ phiếu PVT sẽ nhận được thêm bao nhiêu cổ phiếu mới.

Giải: a) Một cổ phiếu PVT sẽ nhận được số tiền là: $4\% \times 10\,000 = 400$ (đồng).

b) Một cổ đông nắm giữ 100 cổ phiếu PVT sẽ nhận được thêm số cổ phiếu mới là:

$$15\% \times 100 = 15 \text{ (cổ phiếu)}.$$

Chú ý: Tỉ lệ trả cổ tức sẽ được tính trên mệnh giá 10 000 đồng/cổ phiếu.

3. Giá của cổ phiếu

Có bốn loại giá cổ phiếu.

a) *Giá khớp lệnh* là giá cổ phiếu mà bên mua chấp nhận mua mức giá bên bán đang treo bán hoặc bên bán chấp nhận bán thẳng vào mức giá mà người bên mua đang chờ mua.

b) *Giá cao nhất* là giá khớp lệnh ở mốc cao nhất trong phiên giao dịch.

c) *Giá thấp nhất* là giá khớp ở mốc thấp nhất trong phiên giao dịch.

d) *Giá trung bình* của cổ phiếu được tính bằng trung bình cộng của giá cao nhất và giá thấp nhất.

Tất cả các loại giá trên của một mã cổ phiếu ở một phiên giao dịch có thể tìm kiếm được tại hai trang web là *https://hnx.vn/vi-vn* và *https://hsx.vn* hoặc tại những trang web của các công ty chứng khoán.

Ví dụ 2 Theo trang web *https://stockbiz.vn/Stocks/VCB*, mã cổ phiếu VCB của Ngân hàng Thương mại cổ phần Ngoại thương Việt Nam (Vietcombank) trong phiên giao dịch ngày 14/10/2022 có giá cao nhất là 68 500 đồng, giá thấp nhất là 67 300 đồng. Hãy hoàn thiện bảng số liệu thống kê sau:

Đơn vị tính: 1 000 VNĐ

Ngày	Giá cao nhất	Giá thấp nhất	Giá trung bình
14/10/2022	?	?	?

Giải: Ta có bảng số liệu thống kê như sau:

(Đơn vị tính: 1 000 VNĐ)

Ngày	Giá cao nhất	Giá thấp nhất	Giá trung bình
14/10/2022	68,50	67,30	67,90

4. Đầu tư chứng khoán thông qua mua bán cổ phiếu

Ví dụ 3 Cô Hạnh dự định đầu tư vào chứng khoán của doanh nghiệp X. Mỗi cổ phiếu của doanh nghiệp đó có giá trung bình tại một số thời điểm được thống kê trong *Bảng 1*:

Thời điểm	14/10/2019	14/10/2020	14/10/2021	14/10/2022
Giá trung bình mỗi cổ phiếu (đồng)	85 370	87 850	96 550	68 000

Bảng 1

Vào ngày 14/10/2019, cô Hạnh mua 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X.

a) Số tiền cô Hạnh đã đầu tư để mua số cổ phiếu nói trên là bao nhiêu?

b) Tính số tiền lãi cô Hạnh thu được nếu bán toàn bộ 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào các thời điểm sau: 14/10/2020; 14/10/2021.

c) Nếu cô Hạnh bán toàn bộ 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào thời điểm 14/10/2022 thì cô Hạnh sẽ bị lỗ bao nhiêu tiền?

Giải: a) Số tiền cô Hạnh đã đầu tư để mua 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X là:

$$85\,370 \times 10\,000 = 853\,700\,000 \text{ (đồng)}.$$

b) Số tiền lãi cô Hạnh thu được nếu bán toàn bộ 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào thời điểm 14/10/2020 là: $87\,850 \times 10\,000 - 853\,700\,000 = 24\,800\,000$ (đồng).

Số tiền lãi cô Hạnh thu được nếu bán toàn bộ 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào thời điểm 14/10/2021 là: $96\,550 \times 10\,000 - 853\,700\,000 = 111\,800\,000$ (đồng).

c) Số tiền cô Hạnh bị lỗ nếu bán toàn bộ 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào thời điểm 14/10/2022 là: $853\,700\,000 - 68\,000 \times 10\,000 = 173\,700\,000$ (đồng).

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

Yêu cầu: Thực hành tính toán lợi nhuận trong đầu tư chứng khoán.

Tiến trình tổ chức các hoạt động bao gồm: phần chuẩn bị; phần thực hiện; phần tổng kết.

1. Phần chuẩn bị

1 Giáo viên thực hiện nhiệm vụ sau: Chia lớp thành những nhóm học sinh và giao nhiệm vụ các nhóm tìm hiểu thông tin về một số cổ phiếu của doanh nghiệp niêm yết trên thị trường chứng khoán Việt Nam qua hai trang web là *https://hnx.vn/vi-vn* và *https://hsx.vn* hoặc tại những trang wed của công ty chứng khoán.

2 Mỗi nhóm học sinh trao đổi, thảo luận để xác định rõ nhiệm vụ của nhóm và thực hành tính toán lợi nhuận trong đầu tư chứng khoán.

a) Nhiệm vụ 1: Xác định cổ phiếu của doanh nghiệp niêm yết trên thị trường chứng khoán

Thống nhất các công việc cần làm sau đây:

- Lựa chọn cổ phiếu của doanh nghiệp niêm yết trên thị trường chứng khoán theo tiêu chí sau: chọn trong 30 mã cổ phiếu có vốn hoá lớn được các Sở Giao dịch Chứng khoán Hà Nội (HNX) và Sở Giao dịch Chứng khoán TP. Hồ Chí Minh (HOSE) đưa ra;
- Ở mỗi năm 2019, 2020, 2021, 2022, chọn ra một thời điểm, chẳng hạn: thời điểm ngày 14 tháng 10 của mỗi một năm nói trên.

b) Nhiệm vụ 2: Tính toán lợi nhuận trong đầu tư chứng khoán

Thống nhất các công việc cần làm sau đây:

- Xác định giá trung bình của cổ phiếu đó tại những thời điểm đã chọn ra.
- Tính tổng số tiền đầu tư mua 10 000 cổ phiếu đã lựa chọn tại thời điểm năm 2019.
- Tính lợi nhuận thu được sau khi bán 10 000 cổ phiếu tại những thời điểm đã lựa chọn của các năm 2020, 2021, 2022.

2. Phần thực hiện

Giả sử mỗi nhóm học sinh mua 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp đã lựa chọn.

Báo cáo về lợi nhuận đầu tư theo mẫu sau:

- Thời điểm mua cổ phiếu: Ngày … tháng … năm 2019
- Số tiền đầu tư mua 10 000 cổ phiếu đã lựa chọn: ……….

Thời điểm bán	14/10/2020	14/10/2021	14/10/2022
Số tiền thu được sau khi bán 10 000 cổ phiếu (đồng)	?	?	?
Lợi nhuận thu được sau khi bán 10 000 cổ phiếu (đồng)	?	?	?

3. Phần tổng kết

3 Làm việc chung cả lớp để thực hiện các nhiệm vụ sau:

– Các nhóm báo cáo lợi nhuận trong đầu tư chứng khoán của nhóm. Từ đó, cả lớp góp ý cho phương án đầu tư của mỗi nhóm.

– Tổng kết và rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

- Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.
- Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

- Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.
- Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

CHƯƠNG IV

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: đường thẳng và mặt phẳng trong không gian, cách xác định mặt phẳng, hình biểu diễn của một hình trong không gian, hình chóp và hình tứ diện; hai đường thẳng song song, đường thẳng và mặt phẳng song song, hai mặt phẳng song song, định lí Thalès trong không gian, hình lăng trụ và hình hộp; phép chiếu song song.

§1 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Như ta đã biết, điểm và đường thẳng là hai đối tượng cơ bản của hình học phẳng. Từ hai đối tượng cơ bản đó và những quan hệ cơ bản giữa chúng, ta xây dựng nên hình học phẳng.

Đối với hình học không gian cũng vậy. *Điểm*, *đường thẳng*, *mặt phẳng* là ba đối tượng cơ bản của hình học không gian. Từ ba đối tượng cơ bản đó và những quan hệ cơ bản giữa chúng, ta tạo nên những vật thể khác nhau (như: hình chóp, hình nón, ...) và xây dựng nên hình học không gian để nghiên cứu tính chất của những hình như vậy.

Kim tự tháp nhỏ có dạng hình chóp tứ giác đều nằm ở sân Napoléon của bảo tàng Louvre, Paris

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 1

1. Mặt phẳng

1 Sân vận động Old Trafford (*Hình 2*) ở thành phố Manchester, có biệt danh là "Nhà hát của những giấc mơ", với sức chứa 75 635 người, là sân vận động lớn thứ hai ở Vương quốc Anh.

Quan sát *Hình 2* và cho biết, mặt sân vận động thường được làm phẳng hay cong.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 2

Nhận xét: Mặt sân vận động cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng trong không gian.

Người ta thường biểu diễn một mặt phẳng bằng một hình bình hành và dùng các chữ cái đặt trong dấu ngoặc đơn () để đặt tên cho mặt phẳng ấy. Ví dụ: mặt phẳng (P) (*Hình 3*), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β), ...

Hình 3

Trong thực tiễn có nhiều ví dụ minh hoạ cho mặt phẳng. Chẳng hạn: tấm gương phẳng, mặt bàn, bảng treo tường (*Hình 4*), ... Cho ta hình ảnh một phần mặt phẳng trong không gian.


Hình 4

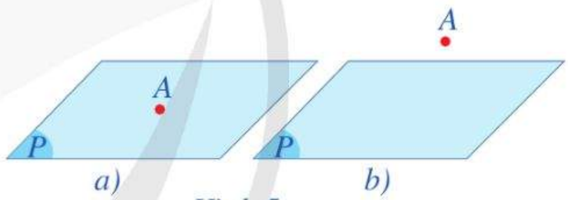
1 Nêu ví dụ trong thực tiễn minh hoạ hình ảnh của một phần mặt phẳng.

2. Điểm thuộc mặt phẳng

2 Quan sát *Hình 1*, nếu coi mặt sân Napoléon là một phần của mặt phẳng (P) thì đỉnh của kim tự tháp có thuộc mặt phẳng (P) hay không?

Nhận xét: Với mỗi điểm A và mặt phẳng (P), chỉ xảy ra một trong hai khả năng sau:

- Điểm A thuộc mặt phẳng (P), ta kí hiệu $A \in (P)$ (*Hình 5a*).
- Điểm A không thuộc mặt phẳng (P) hay A nằm ngoài (P), ta kí hiệu $A \notin (P)$ (*Hình 5b*).

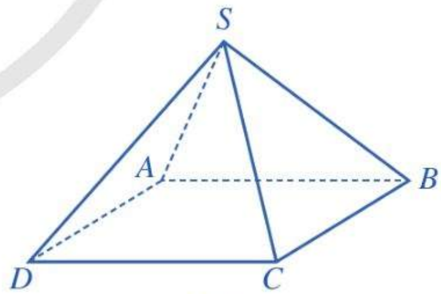


Hình 5

3. Hình biểu diễn của một hình trong không gian

a) Khái niệm

Để hình dung được kim tự tháp tại bảo tàng Louvre ở *Hình 1*, ta vẽ trên mặt phẳng như *Hình 6* minh hoạ kim tự tháp đó. *Hình 6* gọi là hình biểu diễn của kim tự tháp kính tại bảo tàng Louvre.



Hình 6

Một cách tổng quát, ta quy ước:

> Hình được vẽ trong mặt phẳng để giúp ta hình dung được về một hình trong không gian gọi là *hình biểu diễn* của hình không gian đó.

b) Quy tắc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

Để việc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian được thuận lợi và thống nhất, ta quy ước như sau:

1) Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng;
2) Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau);
3) Hình biểu diễn giữ nguyên tính liên thuộc giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng;
4) Những đường nhìn thấy được vẽ bằng nét liền, những đường không nhìn thấy được vẽ bằng nét đứt.

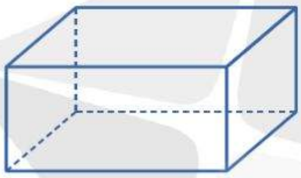
Chú ý: Các quy tắc khác sẽ được đề cập sau.

Ví dụ 1 Dựa trên *Hình 7*, vẽ hình biểu diễn của hộp phấn.

Giải

Hình biểu diễn của hộp phấn có thể vẽ như *Hình 8*.

Hình 7



Hình 8

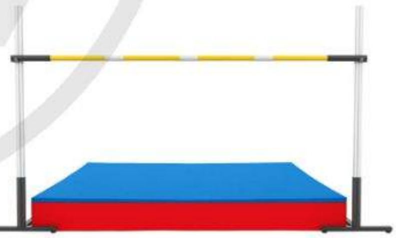
2 Vẽ hình biểu diễn của mặt phẳng (P) và đường thẳng a xuyên qua nó.

II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Do thực tiễn, kinh nghiệm và quan sát, người ta thừa nhận một số tính chất của hình học không gian. Sau đây, ta sẽ làm quen với những tính chất thừa nhận đó.

3 *Hình 9* là hình ảnh xà ngang trong môn Nhảy cao.

Quan sát *Hình 9* và cho biết ta cần bao nhiêu điểm đỡ để giữ cố định được xà ngang đó.



(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 9

Tính chất 1

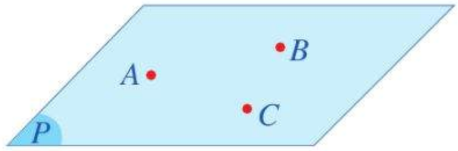
Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

4 Quan sát *Hình 10*. Đó là hình ảnh bếp củi với kiềng ba chân. "Kiềng ba chân" là vật dụng bằng sắt, có hình vòng cung được gắn ba chân, dùng để đặt nồi lên khi nấu bếp. Bếp củi và kiềng ba chân là hình ảnh hết sức quen thuộc với nhiều gia đình ở Việt Nam. Vì sao kiềng ba chân khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh?

Hình 10

Tính chất 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.



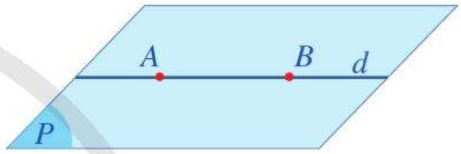
Hình 11

Như vậy, mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Mặt phẳng đó được kí hiệu mp(ABC) hay đơn giản là (ABC) (*Hình 11*).

Tính chất 3

Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.

Như vậy, nếu một đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A, B của mặt phẳng (P) thì mọi điểm của đường thẳng d đều nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó, ta nói d nằm trong (P), hoặc (P) chứa d, hoặc (P) đi qua d, kí hiệu: $d \subset (P)$ hay $(P) \supset d$ (*Hình 12*).



Hình 12

Ví dụ 2 *Hình 13* minh hoạ người thợ đang kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà. Hãy cho biết người thợ kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà bằng cách nào.


Hình 13

Giải

Người thợ đặt thước dẹt dài lên mặt sàn nhà ở các vị trí khác nhau. Nếu thước đó luôn áp sát mặt sàn (không bị cập kênh) thì mặt sàn là phẳng.

Tính chất 4

Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ví dụ 3 Giải thích tại sao:

a) Chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại địa hình mà vẫn đứng vững (*Hình 14*).

b) Bàn, ghế bốn chân thường hay bị cập kênh.


Hình 14

Giải

a) Giá đỡ ba chân của máy ảnh khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh vì theo Tính chất 2, ba điểm không thẳng hàng nào cũng xác định một mặt phẳng.

b) Bàn, ghế bốn chân thường hay bị cập kênh vì theo Tính chất 3, bốn điểm có thể không cùng nằm trên một mặt phẳng.

5 *Hình 15* mô tả một phần của phòng học. Nếu coi bức tường chứa bảng và sàn nhà là hình ảnh của hai mặt phẳng thì giao của hai mặt phẳng đó là gì?

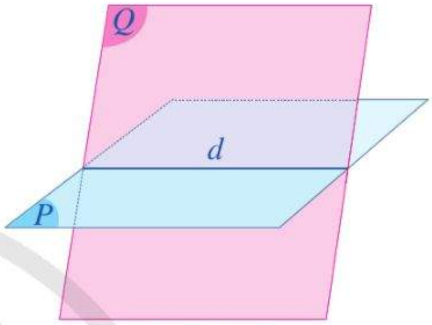
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 15

Tính chất 5

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Nếu hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) có điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất d chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng d đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$ (*Hình 16*).



Hình 16

Ví dụ 4 Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$, ngoài mặt phẳng (P) cho một điểm S. Hãy xác định:

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SCB) và (SCD);

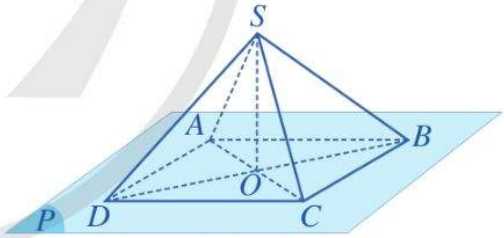
b) Giao điểm của mặt phẳng (SAC) với đường thẳng BD.

Giải. (*Hình 17*)

a) Vì S và C cùng thuộc hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) là đường thẳng SC.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó, vì O thuộc mặt phẳng (SAC) nên điểm O là giao điểm của mặt phẳng (SAC) với đường thẳng BD.

3 Trong Ví dụ 4, xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).



Hình 17

Nhận xét: Qua Ví dụ 4, ta thấy:

- Có thể xác định giao tuyến của hai mặt phẳng bằng cách đi tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến cần tìm.
- Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) (với giả thiết a cắt (P)), ta có thể làm như sau:

Chọn một đường thẳng b thích hợp trong mặt phẳng (P) và tìm giao điểm M của hai đường thẳng a và b. Khi đó, M là giao điểm cần tìm.

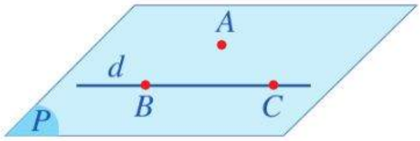
Tính chất 6

Trên mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Trên đây là các tính chất được thừa nhận không chứng minh. Dựa trên những tính chất được thừa nhận đó, ta có thể chứng minh được những tính chất khác.

III. MỘT SỐ CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG

6 Cho điểm A không thuộc đường thẳng d. Lấy hai điểm phân biệt B và C thuộc đường thẳng d (*Hình 18*).



Hình 18

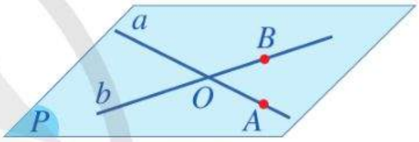
a) Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có đi qua đường thẳng d hay không?

b) Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm A và đường thẳng d?

Định lí 1

Cho điểm A không thuộc đường thẳng d. Khi đó, qua điểm A và đường thẳng d có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu mp(A, d) hoặc (A, d).

7 Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O. Lấy điểm A trên đường thẳng a (A khác O), lấy điểm B trên đường thẳng b (B khác O) (*Hình 19*).



Hình 19

a) Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, O có đi qua hai đường thẳng a và b hay không?

b) Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua hai đường thẳng a và b?

Định lí 2

Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Khi đó, qua a và b có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu mp(a, b).

Nhận xét: Từ Tính chất 2 và hai định lí trên, ta thấy mặt phẳng hoàn toàn được xác định theo một trong ba cách sau:

- Đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.
- Đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

4 Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC. Điểm D không thuộc mặt phẳng (P). Hỏi qua hai đường thẳng AD và BC có xác định được một mặt phẳng không?

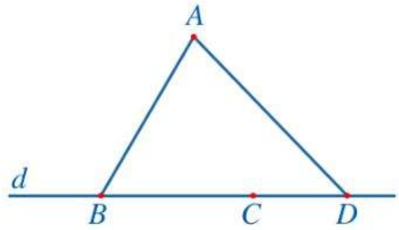
Ví dụ 5

a) Cho điểm A không thuộc đường thẳng d. Trên d lấy ba điểm B, C, D đôi một khác nhau. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O. Đường thẳng c không đi qua O và cắt các đường thẳng a, b. Chứng minh rằng ba đường thẳng a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng.

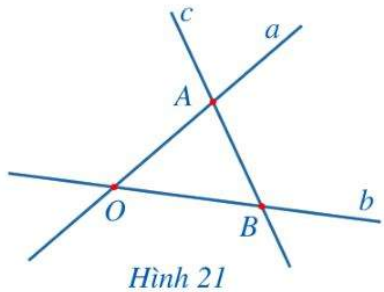
Giải

a) (*Hình 20*) Theo Định lí 1, qua điểm A và đường thẳng d có mặt phẳng (α). Do $B, C, D \in d$ nên $B, C, D \in (\alpha)$. Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.



Hình 20

b) (*Hình 21*) Theo Định lí 2, qua hai đường thẳng a, b có mặt phẳng (β). Giả sử đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b lần lượt tại các điểm A và B. Do c không đi qua O nên A khác B. Ta có $A \in a, B \in b$ nên $A, B \in (\beta)$. Suy ra c nằm trong mặt phẳng (β). Vậy ba đường thẳng a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng.



Hình 21

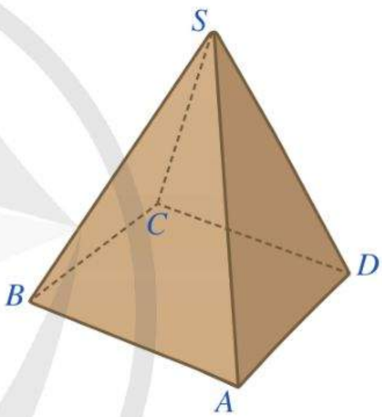
IV. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

1. Hình chóp

8 *Hình 22* là hình ảnh của một hộp quà lưu niệm có dạng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Quan sát *Hình 22* và trả lời các câu hỏi:

a) Đỉnh S có nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ hay không?

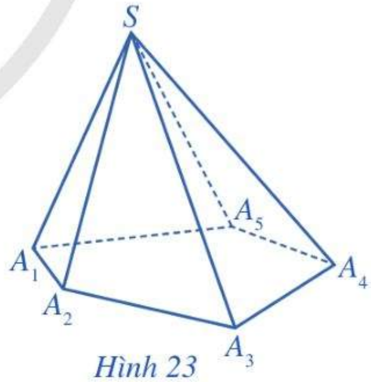
b) Mỗi mặt của hộp quà lưu niệm có dạng hình gì?



Hình 22

Trước hết, ta quy ước như sau: Từ nay, khi nói đến "tam giác", ta có thể hiểu là hình gồm ba cạnh của nó hoặc là hình gồm ba cạnh và các điểm nằm trong tam giác đó. Đối với đa giác cũng như thế.

Trong mặt phẳng (P), cho đa giác $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$. Lấy điểm S nằm ngoài (P). Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác: $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là *hình chóp*, kí hiệu $S.A_1A_2...A_n$.



Hình 23

Chú ý

- Trong hình chóp $S.A_1A_2...A_n$
  – Điểm S gọi là *đỉnh*;
  – Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là *mặt đáy*;
  – Các cạnh của mặt đáy gọi là *cạnh đáy*, các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các *cạnh bên*;
  – Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là các *mặt bên*.

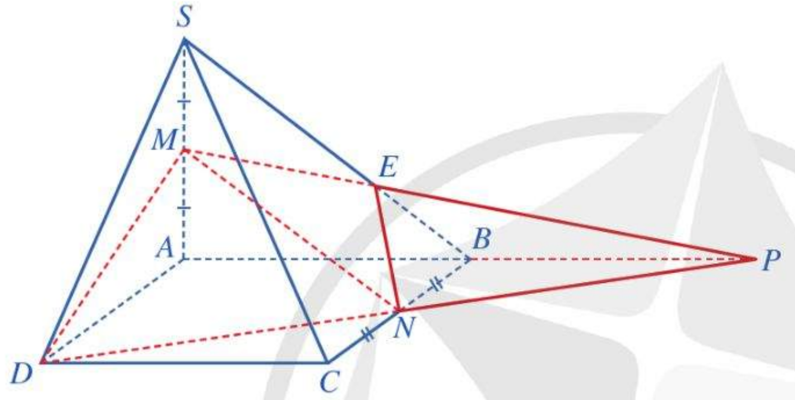
- Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, … thì hình chóp tương ứng gọi là *hình chóp tam giác*, *hình chóp tứ giác*, *hình chóp ngũ giác*, … *Hình 23* minh hoạ cho hình chóp ngũ giác $S.A_1A_2A_3A_4A_5$.

Ví dụ 6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, BC.

a) Xác định giao điểm của mặt phẳng (DMN) với các đường thẳng AB, SB.

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (DMN) với các mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Giải. (*Hình 24*)



Hình 24

> **5** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và AD.
>
> a) Xác định giao điểm của mặt phẳng (CMN) với các đường thẳng AB, SB.
>
> b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (CMN) với mỗi mặt phẳng (SAB) và (SBC).

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ có DN cắt AB tại P. Vì $P \in DN$ nên $P \in (DMN)$. Do đó, P là giao điểm của mặt phẳng (DMN) với AB.

Trong mặt phẳng (SAB) có MP cắt SB tại E. Vì $E \in MP$ nên $E \in (DMN)$. Do đó, E là giao điểm của mặt phẳng (DMN) với SB.

b) Vì M và E cùng thuộc hai mặt phẳng (DMN) và (SAB) nên giao tuyến của mặt phẳng (DMN) với mặt phẳng (SAB) là đường thẳng ME.

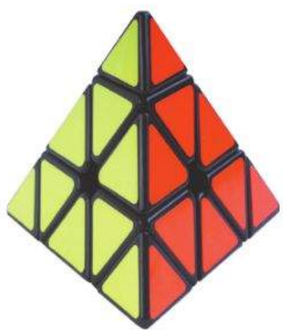
Vì N và E cùng thuộc hai mặt phẳng (DMN) và (SBC) nên giao tuyến của mặt phẳng (DMN) với mặt phẳng (SBC) là đường thẳng NE.

2. Hình tứ diện

9 *Hình 25* là hình ảnh của khối rubik tam giác (Pyraminx). Quan sát *Hình 25* và trả lời các câu hỏi:

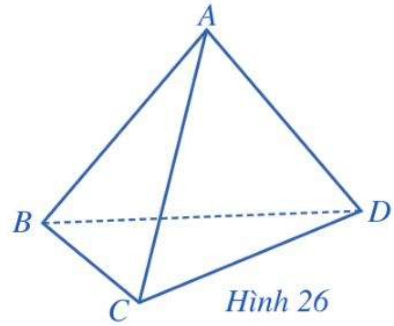
a) Khối rubik tam giác có bao nhiêu đỉnh? Các đỉnh có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

b) Khối rubik tam giác có bao nhiêu mặt? Mỗi mặt của khối rubik tam giác là những hình gì?



Hình 25

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn là *tứ diện*), kí hiệu là $ABCD$.



Hình 26

Chú ý

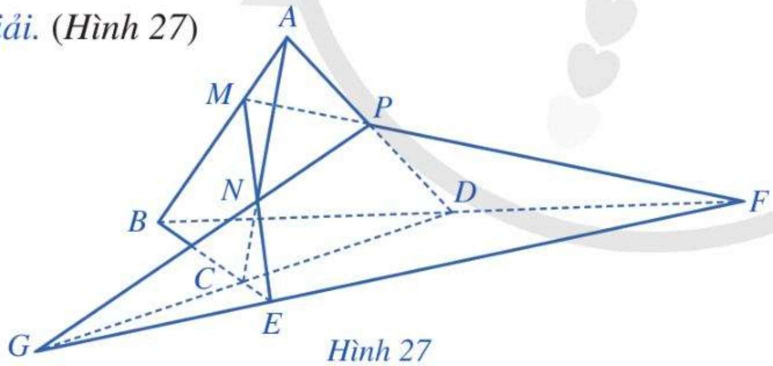
- Trong hình tứ diện $ABCD$ (*Hình 26*)
  - Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh*.
  - Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh*. Hai cạnh không có điểm chung gọi là *hai cạnh đối diện*.
  - Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các *mặt*.
  - Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là *đỉnh đối diện* với mặt đó.
- Hình tứ diện có các mặt là tam giác đều là *hình tứ diện đều*.
- Mỗi hình chóp tam giác là một hình tứ diện. Ngược lại, nếu ta quy định rõ đỉnh và mặt đáy trong một hình tứ diện thì hình tứ diện đó trở thành hình chóp tam giác.

Ví dụ 7 Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, AD sao cho:
$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$, $\frac{AP}{AD} = \frac{1}{2}$.

a) Xác định E, F, G lần lượt là giao điểm của các đường thẳng MN, MP, NP với mặt phẳng (BCD).

b) Chứng minh rằng các điểm E, F, G thẳng hàng.

Giải. (*Hình 27*)



Hình 27

a) Trong mặt phẳng (ABC), gọi E là giao điểm của MN và BC. Vì $E \in BC$ nên $E \in (BCD)$. Do đó, E là giao điểm của MN với mặt phẳng (BCD).

Trong mặt phẳng (ABD), gọi F là giao điểm của MP và BD. Vì $F \in BD$ nên $F \in (BCD)$. Do đó, F là giao điểm của MP với mặt phẳng (BCD).

Trong mặt phẳng (ACD), gọi G là giao điểm của NP và CD. Vì $G \in CD$ nên $G \in (BCD)$. Do đó, G là giao điểm của NP với mặt phẳng (BCD).

b) Do E, F, G cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt (MNP) và (BCD) nên theo Tính chất 4, các điểm E, F, G đều thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (BCD). Vậy ba điểm E, F, G thẳng hàng.

6 Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AD, BC sao cho: $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AN}{AD} = \frac{2}{3}$, $\frac{BP}{BC} = \frac{3}{4}$.

a) Xác định E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AC, BD với mặt phẳng (MNP).

b) Chứng minh rằng các đường thẳng NE, PF và CD cùng đi qua một điểm.

Nhận xét: Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có thể chỉ ra ba điểm đó cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

BÀI TẬP

1. Khi trát tường, dụng cụ không thể thiếu của người thợ là thước dẹt dài (*Hình 28*). Công dụng của thước dẹt này là gì? Giải thích.

Hình 28

2. *Hình 29* là hình ảnh của chặn giấy bằng gỗ có bốn mặt phân biệt là các tam giác. Vẽ hình biểu diễn của chặn giấy bằng gỗ đó.

Hình 29

3. Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng ba đường thẳng a, b, c cùng đi qua một điểm, hay còn gọi là ba đường thẳng đồng quy.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O và AB cắt CD tại P. Điểm M thuộc cạnh SA (M khác S, M khác A). Gọi N là giao điểm của MP và SB, I là giao điểm của MC và DN. Chứng minh rằng S, O, I thẳng hàng.

5. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC sao cho $MA = 2MS$, $NS = 2NC$.

a) Xác định giao điểm của MN với mặt phẳng (ABC).

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (BMN) với mặt phẳng (ABC).

6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy không là hình thang. Gọi M là trung điểm của SA.

a) Xác định giao điểm của CD với mặt phẳng (SAB).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SBC).

7. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI).

b) Gọi G là giao điểm của AM và BN. Chứng minh rằng: $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{GN}{GB} = \dfrac{1}{3}$.

c) Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng CP, DQ cùng đi qua điểm G và $\dfrac{GP}{GC} = \dfrac{GQ}{GD} = \dfrac{1}{3}$.

§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Trong thực tế, ta quan sát thấy nhiều hình ảnh gợi nên những đường thẳng song song với nhau. Chẳng hạn các cột treo cờ của tổ chức và các nước thành viên ASEAN (*Hình 30*).

Hai đường thẳng song song trong không gian có tính chất gì?

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 30

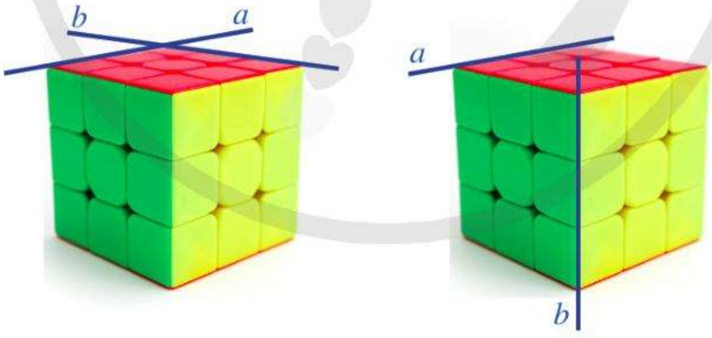
I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG PHÂN BIỆT

Trong mục này, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả sử hai đường thẳng là phân biệt.

1

a) Hãy nêu các vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mặt phẳng.

b) Quan sát hai đường thẳng a và b trong *Hình 31a*, *31b* và cho biết các đường thẳng đó có cùng nằm trong một mặt phẳng không.



a) *b)*

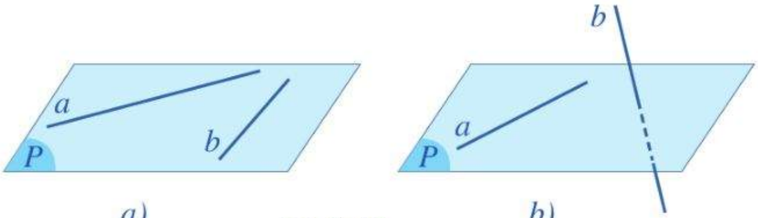
Hình 31

• Hai đường thẳng a và b ở Hình 31a cùng nằm trong một mặt phẳng.

• Hai đường thẳng a và b ở Hình 31b không cùng nằm trong một mặt phẳng.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng a và b phân biệt trong không gian. Khi đó chỉ xảy ra một trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa a và b. Khi đó ta nói a và b *đồng phẳng (Hình 32a).*

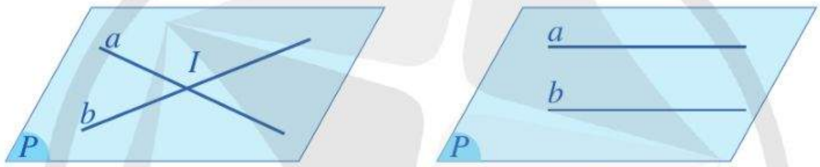


a) *Hình 32* *b)*

Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa a và b. Khi đó ta nói a và b *chéo nhau*, hay *a chéo với b* (*Hình 32b*).

Khi hai đường thẳng a và b (phân biệt) đồng phẳng, ta đã biết có hai khả năng xảy ra:

- a và b có một điểm chung duy nhất I. Ta nói a và b cắt nhau tại I và kí hiệu là $a \cap b = \{I\}$. Ta còn có thể viết $a \cap b = I$ (*Hình 33a*).



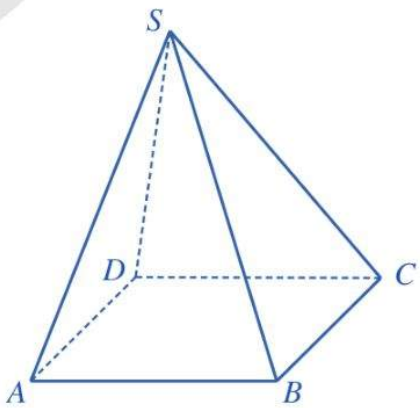
a) *Hình 33* *b)*

- a và b không có điểm chung. Ta nói a và b *song song với nhau* và kí hiệu là $a \parallel b$ (*Hình 33b*).

Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng song song a và b. Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu là mp(a, b).

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (*Hình 34*). Hãy xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau: AB và CD; SA và BC.

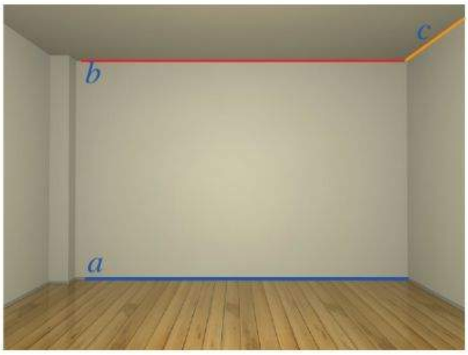


Hình 34

Giải

$ABCD$ là hình bình hành nên AB và CD song song với nhau.

Do bốn điểm S, A, B, C không cùng nằm trên một mặt phẳng nên hai đường thẳng SA và BC chéo nhau.



Hình 35

1 Quan sát một phần căn phòng (*Hình 35*), hãy cho biết vị trí tương đối của các cặp đường thẳng a và b; a và c; b và c.

II. TÍNH CHẤT

2 Trong không gian, cho điểm M và đường thẳng d không đi qua điểm M (*Hình 36*). Nêu dự đoán về số đường thẳng đi qua điểm M và song song với đường thẳng d.

Hình 36

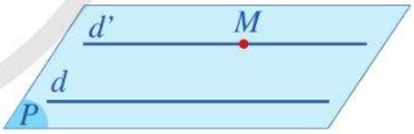
Định lí 1

Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Chứng minh

Trong không gian, giả sử M là điểm không nằm trên đường thẳng d.

– Khi đó điểm M và đường thẳng d xác định duy nhất một mặt phẳng (P) (*Hình 37*). Trong mặt phẳng (P), theo tiên đề Euclid về đường thẳng song song, có một đường thẳng d' đi qua M và song song với đường thẳng d. Như vậy, trong không gian, tồn tại đường thẳng d' đi qua M và song song với d.



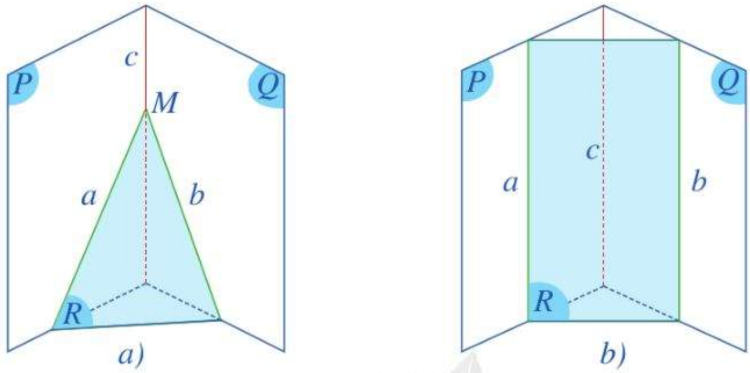
Hình 37

– Trong không gian, giả sử d'' là một đường thẳng đi qua M và song song với d. Do $d'' \parallel d$ nên d'' và d nằm trong cùng mặt phẳng (Q). Khi đó, mặt phẳng (Q) cũng đi qua điểm M và đường thẳng d, suy ra mặt phẳng (Q) trùng với mặt phẳng (P). Do vậy, đường thẳng d'' nằm trong mặt phẳng (P). Trong mặt phẳng (P), hai đường thẳng d', d'' cùng đi qua M và song song với d nên d' và d'' trùng nhau. Vậy định lí được chứng minh.

3 Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt a, b, c, trong đó $a = (P) \cap (R)$, $b = (Q) \cap (R)$, $c = (P) \cap (Q)$.

– Nếu hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm M thì đường thẳng c có đi qua điểm M hay không (*Hình 38a*)?

– Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b thì đường thẳng a có song song với đường thẳng c hay không (*Hình 38b*)?



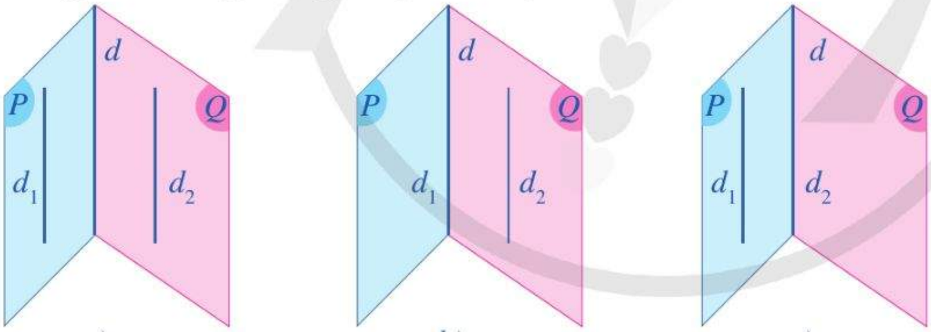
Hình 38

Định lí 2 (về giao tuyến của ba mặt phẳng).

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy, hoặc đôi một song song với nhau.

Từ Định lí 2, ta suy ra hệ quả sau:

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó (*Hình 39*).

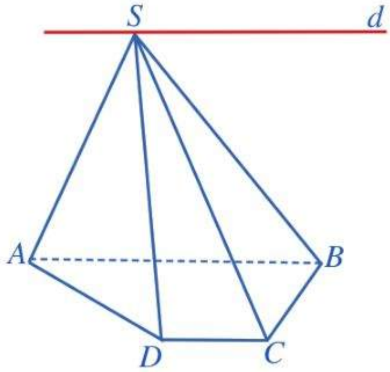


Hình 39

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB // CD. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Giải. (*Hình 40*)

Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng AB và CD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD.



Hình 40

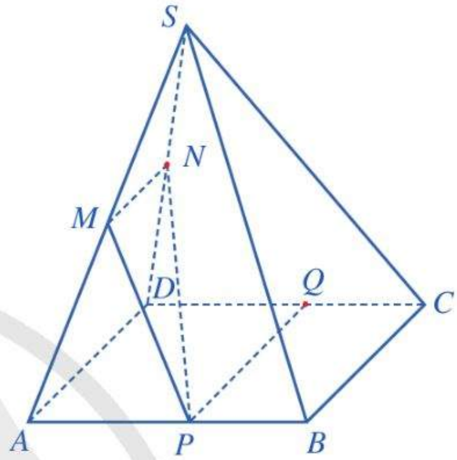
Ví dụ 3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD và P là một điểm nằm trên cạnh AB (P khác A và B). Đường thẳng CD cắt mặt phẳng (MNP) tại điểm Q. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ.

Giải. (*Hình 41*)

Ba mặt phẳng (SAD), $(ABCD)$, (MNP) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến AD, MN, PQ.

Trong tam giác SAD ta có MN là đường trung bình nên $MN // AD$, do đó theo Định lí 2 ta suy ra ba đường thẳng AD, MN, PQ đôi một song song. Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ.

2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAB) và (SCD); (SAD) và (SBC).



Hình 41

4 Trong mặt phẳng, hãy nêu vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba.

Định lí 3

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Khi hai đường thẳng a và b cùng song song với đường thẳng c, ta kí hiệu $a // b // c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

Ví dụ 4 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, BC, AD, AC và BD. Chứng minh rằng:

a) $MP // QN$ và $MP = QN$;

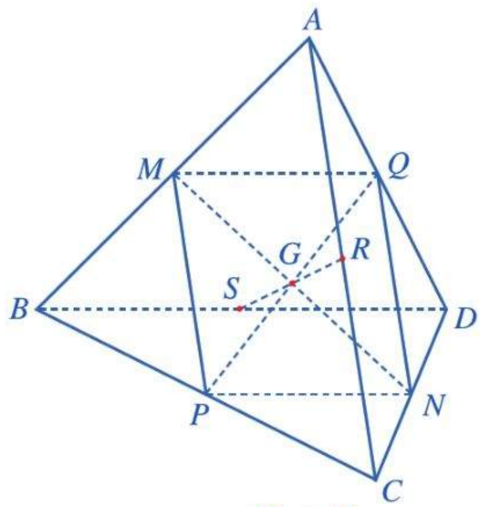
b) Các đoạn thẳng MN, PQ, RS cùng đi qua trung điểm G của mỗi đoạn.

Giải. (*Hình 42*)

a) Trong tam giác ABC ta có MP là đường trung bình nên $MP // AC$ và $MP = \frac{1}{2}AC$ (1).

Trong tam giác ACD ta có QN là đường trung bình nên $QN // AC$ và $QN = \frac{1}{2}AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MP // QN$ và $MP = QN$.



Hình 42

b) Từ kết quả câu a) ta có tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành nên MN, PQ cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Lí luận tương tự ta cũng có tứ giác $MSNR$ là hình bình hành nên MN, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn. Vậy MN, PQ, RS cùng đi qua trung điểm G của mỗi đoạn.

3 Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SC. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, BC sao cho $\frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng MN song song với PQ.

BÀI TẬP

1. Quan sát phòng học của lớp và nêu lên hình ảnh của hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau.

2. Quan sát *Hình 43* và cho biết vị trí tương đối của hai trong ba cột tuabin gió có trong hình.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 43

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SD. Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC); (MNP) và $(ABCD)$.

4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng đường thẳng G_1G_2 song song với đường thẳng CD.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB. Chứng minh rằng đường thẳng NC song song với đường thẳng MD.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA; I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ.

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC).

7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Trên cạnh AC lấy điểm K. Gọi M là giao điểm của BK và AI, N là giao điểm của DK và AJ. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BD.

§3 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

Trong thực tiễn, ta thường gặp nhiều đồ dùng, vật thể gợi nên hình ảnh đường thẳng song song với mặt phẳng. Chẳng hạn, thanh barrier song song với mặt đường (*Hình 44*).

Thế nào là đường thẳng song song với mặt phẳng trong không gian?

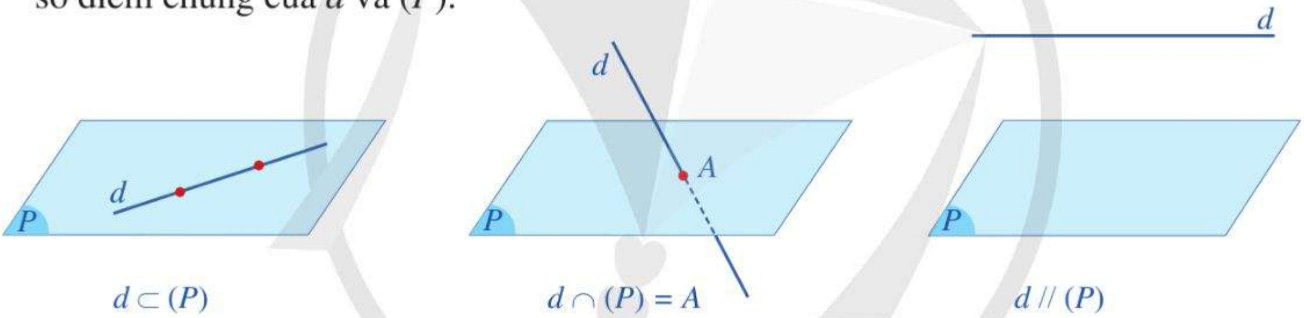
Hình 44

I. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

1

a) Trong *Hình 44*, thanh barrier và mặt đường gợi nên hình ảnh đường thẳng d và mặt phẳng (P). Cho biết đường thẳng d và mặt phẳng (P) có điểm chung hay không.

b) Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P). Hãy cho biết các khả năng có thể xảy ra đối với số điểm chung của d và (P).



$d \subset (P)$
a)

$d \cap (P) = A$
b)

$d \,//\, (P)$
c)

Hình 45

Nhận xét: Có ba khả năng có thể xảy ra đối với số điểm chung của d và (P) (*Hình 45*) là:

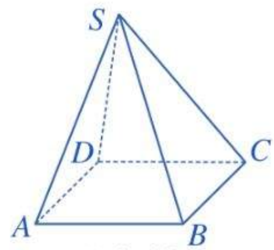
- *d và (P) có từ hai điểm chung trở lên*. Khi đó đường thẳng d *nằm trong* mặt phẳng (P) hay (P) *chứa* d và kí hiệu là $d \subset (P)$ hay $(P) \supset d$ (*Hình 45a*).
- *d và (P) có một điểm chung duy nhất A*. Khi đó ta nói d và (P) *cắt nhau* tại điểm A và kí hiệu là $d \cap (P) = \{A\}$ hay $d \cap (P) = A$ (*Hình 45b*).
- *d và (P) không có điểm chung*. Khi đó ta nói d *song song* với (P) hay (P) *song song* với d và kí hiệu là $d \,//\, (P)$ hay $(P) \,//\, d$ (*Hình 45c*).

Đường thẳng được gọi là *song song* với mặt phẳng nếu chúng không có điểm chung.

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (*Hình 46*). Chứng minh rằng $AB \,//\, (SCD)$.

Giải

Nếu đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) có điểm chung là M thì điểm M nằm trên cả hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD), suy ra điểm M nằm trên CD. Do đó M là điểm chung của hai đường thẳng AB và CD. Điều này không xảy ra vì $AB \parallel CD$. Vậy $AB \parallel (SCD)$.



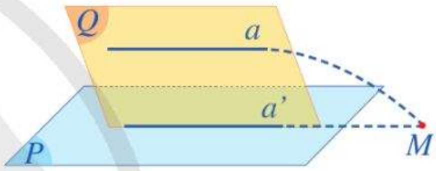
Hình 46

(Nguồn: https://shutterstock.com)
Hình 47

1 Quan sát các xà ngang trên sân tập thể dục ở *Hình 47*. Hãy cho biết vị trí tương đối của các xà ngang đó với mặt sân.

II. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT

2 Cho đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và a song song với đường thẳng a' nằm trong (P) (*Hình 48*). Gọi (Q) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song a, a'.



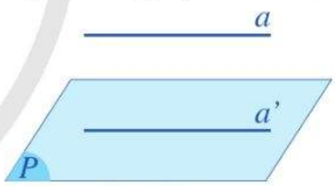
Hình 48

a) Giả sử a cắt (P) tại M. Đường thẳng a có cắt đường thẳng a' tại M hay không?

b) Nêu vị trí tương đối của đường thẳng a và mặt phẳng (P). Vì sao?

Định lí 1 (dấu hiệu nhận biết một đường thẳng song song với một mặt phẳng) (*Hình 49*):

> Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và a song song với đường thẳng a' nằm trong (P) thì a song song với (P).

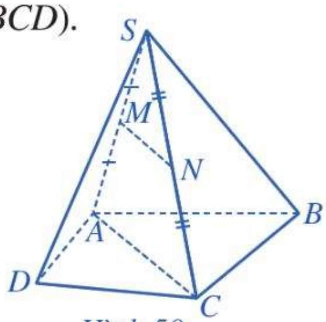


Hình 49

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SC. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải. (*Hình 50*)

Vì M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SC nên MN là đường trung bình của tam giác SAC. Suy ra $MN \parallel AC$. Do $AC \subset (ABCD)$, nên theo Định lí 1, ta có: $MN \parallel (ABCD)$.



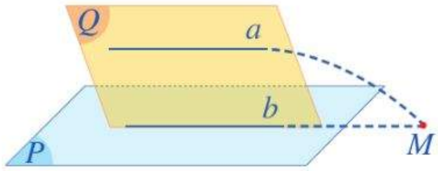
Hình 50

2 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD. Các đường thẳng MN, NP, PM có song song với mặt phẳng (BCD) không? Vì sao?

3 Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Cho mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b. (*Hình 51*)

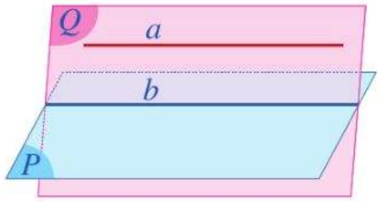
a) Giả sử a cắt b tại M. Đường thẳng a có cắt mặt phẳng (P) tại M hay không?

b) Nêu vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b. Vì sao?



Hình 51

Định lí 2 (Tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng) (*Hình 52*):



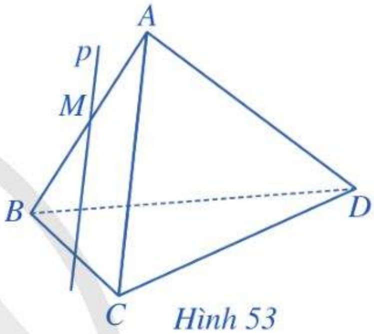
Hình 52

> Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a.

Ví dụ 3 Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Gọi (R) là mặt phẳng qua M và song song với hai đường thẳng AC và BD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với mặt phẳng (ABC).

Giải. (*Hình 53*)

Áp dụng Định lí 2, ta có: Mặt phẳng (R) đi qua M và song song với AC, mà $AC \subset (ABC)$ nên mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến p đi qua M và song song với AC.



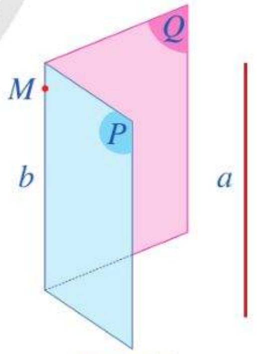
Hình 53

3 Ở Ví dụ 3, xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt phẳng (ABD), (BCD), (ACD).

4 Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cùng song song với đường thẳng a và $(P) \cap (Q) = b$ (*Hình 54*).

a) Lấy một điểm M trên đường thẳng b. Gọi b', b'' lần lượt là các giao tuyến của mặt phẳng (M, a) với (P) và mặt phẳng (M, a) với (Q). Cho biết b' và b'' có trùng với b hay không.

b) Nêu vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b. Vì sao?



Hình 54

Trong trường hợp tổng quát, ta có hệ quả của Định lí 2:

> Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Chú ý: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Ví dụ 4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và SB. Chứng minh rằng:

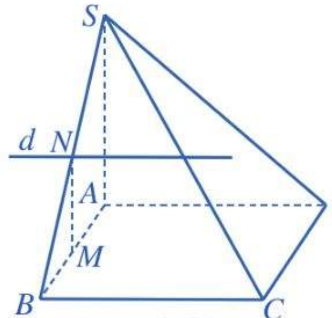
a) Có duy nhất một mặt phẳng (R) là mặt phẳng chứa MN và song song với AD.

b) Đường thẳng AD song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (R).

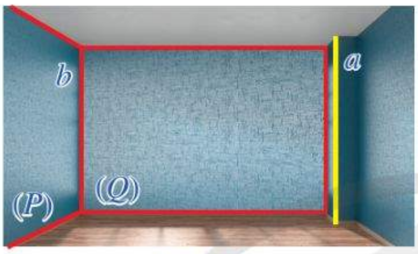
Giải. (*Hình 55*)

a) Do MN và AD là hai đường thẳng chéo nhau nên theo chú ý trên, có duy nhất một mặt phẳng (R) chứa MN và song song với AD.

b) Ta thấy N là điểm chung hai mặt phẳng (SBC) và (R). Ngoài ra, $AD \parallel BC$ và $BC \subset (SBC)$ nên $AD \parallel (SBC)$. Mà $AD \parallel (R)$ nên theo hệ quả của Định lí 2, giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (R) song song với AD. Vậy $AD \parallel d$.



Hình 55



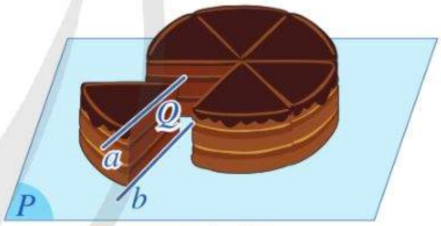
Hình 56

4 Trong *Hình 56*, hai mặt tường của căn phòng gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến b, mép cột gợi nên hình ảnh đường thẳng a. Cho biết đường thẳng a có song song với giao tuyến b hay không.

BÀI TẬP

1. Trong phòng học của lớp, hãy nêu những hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng.

2. Trong *Hình 57*, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gợi nên hình ảnh mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (P); mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gợi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b trong đó a song song với mặt phẳng (P). Cho biết hai đường thẳng a, b có song song với nhau hay không.



Hình 57

3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song với mặt phẳng (ACD).

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

5. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACF).

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SCD) và NG song song với mặt phẳng (SAC).

§4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Trong cuộc sống, chúng ta bắt gặp rất nhiều đồ dùng, vật thể gợi nên hình ảnh của các mặt phẳng song song, chẳng hạn như giá để đồ (*Hình 58*).

Làm thế nào để nhận ra được hai mặt phẳng song song? Hai mặt phẳng song song thì có tính chất gì?

Hình 58

I. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

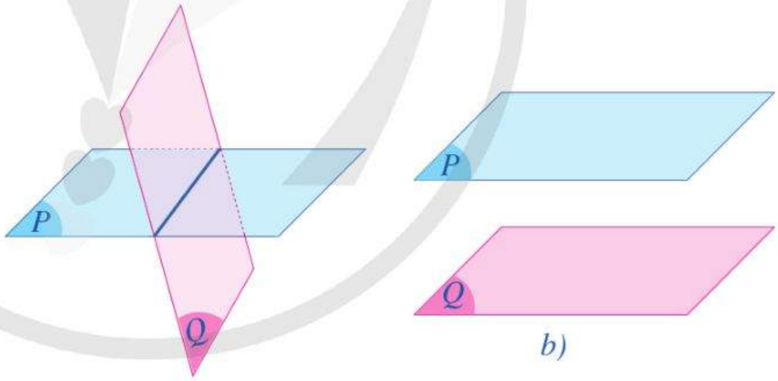
1 Trong không gian cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q).

Nếu (P) và (Q) có một điểm chung thì chúng có bao nhiêu điểm chung? Các điểm chung đó có tính chất gì?

Nhận xét

Đối với hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) trong không gian, có hai khả năng xảy ra:

- Hai mặt phẳng (P) và (Q) có điểm chung. Khi đó, chúng *cắt nhau* theo một đường thẳng (*Hình 59a*).
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) không có điểm chung. Khi đó, ta nói chúng *song song* với nhau, kí hiệu $(P) // (Q)$ hay $(Q) // (P)$ (*Hình 59b*).



a) *b)*

Hình 59

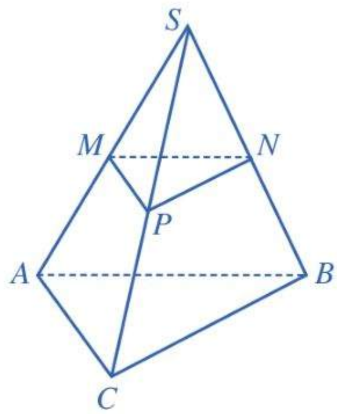
Ta có định nghĩa sau:

Hai mặt phẳng được gọi là *song song* với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Trong thực tiễn có nhiều hình ảnh về hai mặt phẳng song song. Chẳng hạn: các mặt của giá để đồ ở *Hình 58* cho ta hình ảnh những mặt phẳng song song.

1 Nêu ví dụ trong thực tiễn minh hoạ hình ảnh hai mặt phẳng song song.

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC (*Hình 60*). Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABC)$.



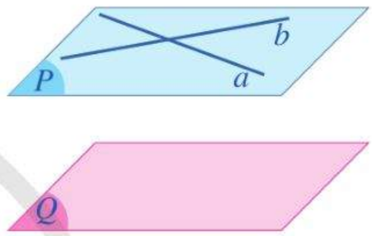
Hình 60

Giải

Nếu hai mặt phẳng (MNP), (ABC) có một điểm chung thì chúng có đường thẳng chung d. Vì $MN \parallel AB$ nên $d \parallel AB$ hoặc d trùng với AB. Tương tự, do $MP \parallel AC$ nên $d \parallel AC$ hoặc d trùng với AC. Điều này là không thể xảy ra vì AB cắt AC tại A.

II. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT

2 Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) (*Hình 61*). Hai mặt phẳng (P) và (Q) có điểm chung hay không?



Hình 61

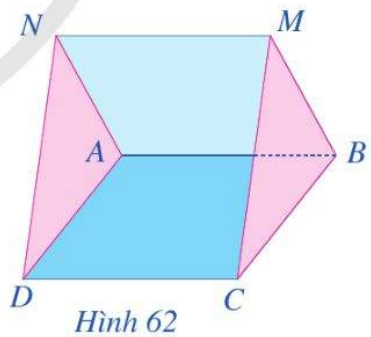
Định lí 1 (dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song):

Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

Ví dụ 2 Cho hai hình bình hành $ABCD$, $ABMN$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng $(ADN) \parallel (BCM)$.

Giải. (*Hình 62*)

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$. Mà AD không thuộc mặt phẳng (BCM) suy ra $AD \parallel (BCM)$. Tương tự, do $ABMN$ là hình bình hành nên $AN \parallel BM$, suy ra $AN \parallel (BCM)$. Mà AD, AN cắt nhau và nằm trong mặt phẳng (ADN) nên theo Định lí 1, ta có: $(ADN) \parallel (BCM)$.



Hình 62

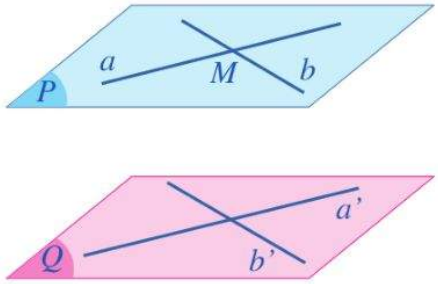
3 Cho mặt phẳng (Q) và điểm M nằm ngoài mặt phẳng (Q).

a) Trong mặt phẳng (Q) vẽ hai đường thẳng a', b' cắt nhau. Qua điểm M kẻ các đường thẳng a và b lần

2 Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N, P, I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB, AM, AN, AP. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCD)$.

lượt song song với a', b'. Gọi (P) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng (cắt nhau) a và b (*Hình 63*). Mặt phẳng (P) có song song với mặt phẳng (Q) hay không?

b) Xét mặt phẳng (R) đi qua điểm M và song song với mặt phẳng (Q). Hai mặt phẳng (R) và (P) có trùng nhau hay không?



Hình 63

Định lí 2 (Tính chất về hai mặt phẳng song song):

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Từ định lí trên, ta có thể chứng minh được các hệ quả sau:

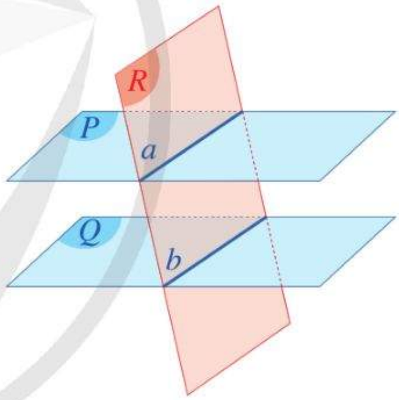
Hệ quả 1. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a và song song với mặt phẳng (Q).

Hệ quả 2. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

4 Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến a.

a) Mặt phẳng (R) có cắt mặt phẳng (Q) hay không? Tại sao?

b) Trong trường hợp mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến b, hãy nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa hai giao tuyến a và b (*Hình 64*).



Hình 64

Định lí 3

Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Nếu mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (P) thì cũng cắt mặt phẳng (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.

Ví dụ 3 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC.

a) Chứng minh rằng (MNP) // ($ABCD$).

b) Giả sử mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q. Chứng minh rằng Q là trung điểm của SD.

Giải. (*Hình 65*)

a) Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$.

Vì $AB \subset (ABCD)$ nên $MN \parallel (ABCD)$.

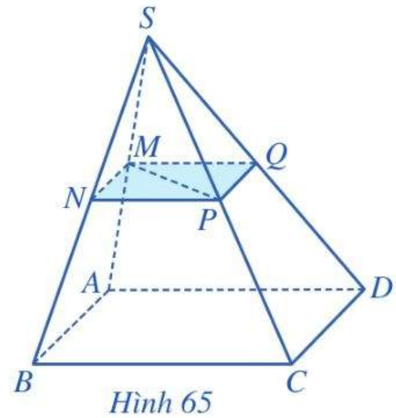
Chứng minh tương tự ta có: $NP \parallel (ABCD)$.

Mà MN cắt NP nên theo Định lí 1 ta có: $(MNP) \parallel (ABCD)$.

b) Vì Q là giao điểm của SD và (MNP), M là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (MNP) nên MQ là giao tuyến của (MNP) và (SAD).

Do $(MNP) \parallel (ABCD)$, $MQ = (MNP) \cap (SAD)$, $AD = (SAD) \cap (ABCD)$ nên theo Định lí 3, ta có: $MQ \parallel AD$.

Trong tam giác SAD, M là trung điểm của SA và $MQ \parallel AD$ nên Q là trung điểm của SD.



Hình 65

3 Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Đường thẳng a cắt hai mặt phẳng trên theo thứ tự tại A, B. Đường thẳng b song song với đường thẳng a và cắt hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt tại A', B'. Chứng minh rằng $AB = A'B'$.

III. ĐỊNH LÍ THALÈS

5 Cho ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R). Hai cát tuyến bất kì a và a' cắt ba mặt phẳng song song lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C'. Gọi B_1 là giao điểm của AC' với mặt phẳng (Q) (*Hình 66*).

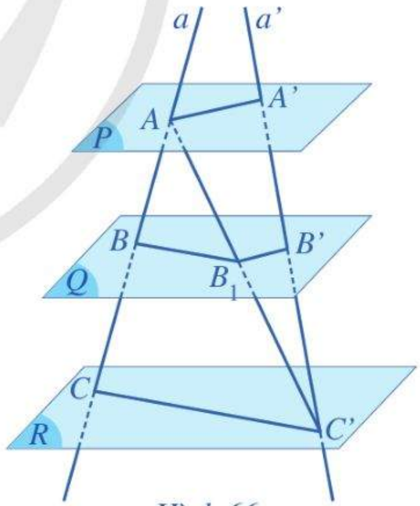
a) Nêu vị trí tương đối của BB_1 và CC'; B_1B' và AA'.

b) Có nhận xét gì về các tỉ số:

$$\frac{AB}{AB_1}, \frac{BC}{B_1C'} \text{ và } \frac{CA}{C'A}; \frac{AB_1}{A'B'}, \frac{B_1C'}{B'C'} \text{ và } \frac{C'A}{C'A'}.$$

c) Từ kết quả câu a) và câu b), so sánh các tỉ số:

$$\frac{AB}{A'B'}, \frac{BC}{B'C'} \text{ và } \frac{CA}{C'A'}.$$



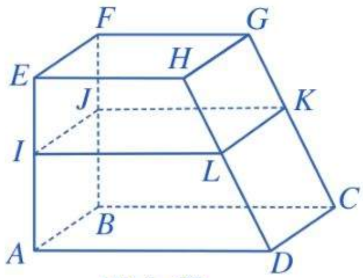
Hình 66

Định lí 4 (Định lí Thalès)

Nếu a, b là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R) lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ví dụ 4 Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới ($ABCD$) và mâm tầng trên ($EFGH$) song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE = 80$ cm, $CG = 90$ cm và muốn đóng thêm một mâm tầng giữa ($IJKL$) song song với hai mâm tầng trên và dưới sao cho khoảng cách $EI = 36$ cm (*Hình 67*). Hãy giúp bác thợ mộc tính độ dài GK để đặt mâm tầng giữa cho kệ để đồ đúng vị trí.



Hình 67

Giải

Ta có cát tuyến EA cắt ba mặt phẳng song song ($EFGH$), ($IJKL$), ($ABCD$) lần lượt tại E, I, A; cát tuyến GC cũng cắt ba mặt phẳng trên theo thứ tự tại G, K, C. Áp dụng định lí Thalès trong không gian, ta có: $\dfrac{EI}{GK} = \dfrac{AE}{CG} = \dfrac{80}{90} = \dfrac{8}{9}$.

Suy ra $GK = \dfrac{9}{8}EI = \dfrac{9}{8} \cdot 36 = 40{,}5$ (cm).

Vậy độ dài $GK = 40{,}5$ cm.

4 Bạn Minh cho rằng: Nếu a, b là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R) lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' thì $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.
Phát biểu của bạn Minh có đúng không? Vì sao?

BÀI TẬP

1. Bạn Chung cho rằng: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) luôn song song với (Q). Phát biểu của bạn Chung có đúng không? Vì sao?

2. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng (P). Một mặt phẳng cắt a, b, c, d lần lượt tại bốn điểm A', B', C', D'. Chứng minh rằng $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

3. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB.

a) Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ với mặt phẳng (ABD).

4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng $(AFD) \parallel (BEC)$.

b) Gọi M là trọng tâm của tam giác ABE. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD). Lấy N là giao điểm của (P) và AC. Tính $\dfrac{AN}{NC}$

§5 HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

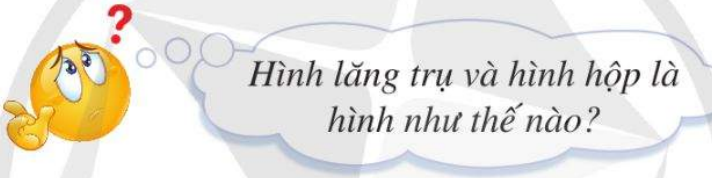
Trong thực tiễn, ta thường gặp nhiều đồ dùng, vật thể gợi nên hình ảnh hình lăng trụ, hình hộp. Chẳng hạn: Khung lịch để bàn (*Hình 68*); Tháp đôi Puerta de Europa ở Madrid, Tây Ban Nha (*Hình 69*), …

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 68

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 69



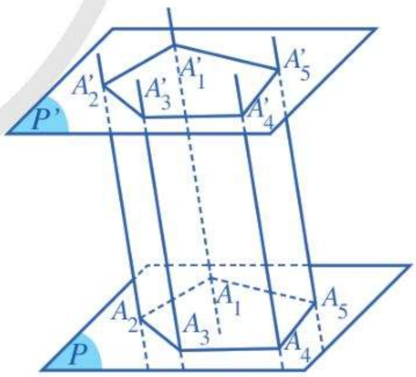
I. HÌNH LĂNG TRỤ

1. Định nghĩa

1 Cho hai mặt phẳng song song (P) và (P'). Trong mặt phẳng (P), cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt mặt phẳng (P') lần lượt tại $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ (*Hình 70* minh hoạ cho trường hợp $n = 5$).

a) Các tứ giác $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, …, $A_nA_1A_1'A_n'$ là những hình gì?

b) Các cạnh tương ứng của hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $A_1'A_2'\ldots A_n'$ có đặc điểm gì?



Hình 70

Ta có định nghĩa sau:

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A_1'A_2'\ldots A_n'$ và các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, …, $A_nA_1A_1'A_n'$ được gọi là *hình lăng trụ*, kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n.A_1'A_2'\ldots A_n'$.

Chú ý: Nếu đáy của lăng trụ là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, … thì hình lăng trụ tương ứng gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác (*Hình 71*), …

Trong hình lăng trụ $A_1A_2\ldots A_n.A_1'A_2'\ldots A_n'$:

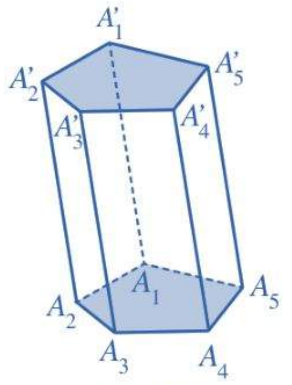
– Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $A_1'A_2'\ldots A_n'$ gọi là hai *mặt đáy*;

– Các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, …, $A_nA_1A_1'A_n'$ gọi là các *mặt bên*;

– Các cạnh của hai mặt đáy gọi là các *cạnh đáy*;

– Các đoạn thẳng A_1A_1', A_2A_2', …, A_nA_n' gọi là các *cạnh bên*;

– Các đỉnh của hai mặt đáy gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.



Hình 71

2. Tính chất

2 Từ định nghĩa hình lăng trụ, nhận xét đặc điểm các mặt bên, cạnh bên và hai mặt đáy của hình lăng trụ.

- Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- Hai mặt đáy của hình lăng trụ là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

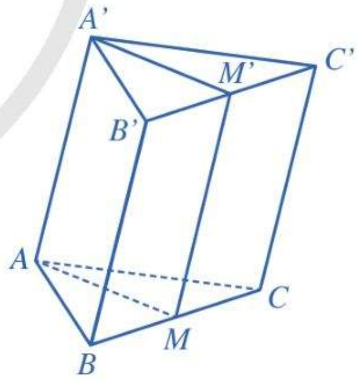
Ví dụ 1 Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $B'C'$. Chứng minh rằng:

a) $AA' \parallel (BCC'B')$;   b) $AM \parallel A'M'$.

Giải. (*Hình 72*)

a) Trong hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, ta có: $AA' \parallel BB'$ và $BB' \subset (BCC'B')$, suy ra $AA' \parallel (BCC'B')$.

b) Vì $MM' \parallel BB'$, $MM' = BB'$ và $BB' \parallel AA'$, $BB' = AA'$ nên $MM' \parallel AA'$, $MM' = AA'$. Suy ra $AMM'A'$ là hình bình hành. Vậy $AM \parallel A'M'$.



Hình 72

1 Cho một số ví dụ về những đồ dùng, vật thể trong thực tế có dạng hình lăng trụ.

II. HÌNH HỘP

1. Định nghĩa

3 Vẽ hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Trong mỗi hình hộp, ta gọi:

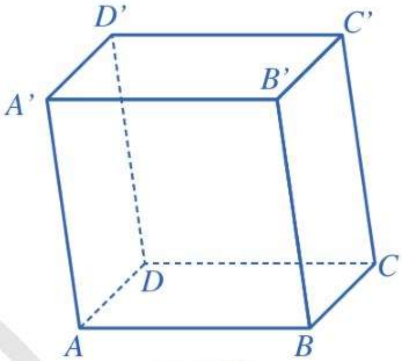
– Hai mặt không có đỉnh chung là *hai mặt đối diện*;

– Hai cạnh song song không nằm trong một mặt là *hai cạnh đối diện*;

– Hai đỉnh không thuộc cùng một mặt là *hai đỉnh đối diện*;

– Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện là *đường chéo*.

Ví dụ 2 Hãy liệt kê các cặp mặt đối diện, các cặp cạnh đối diện và các cặp đỉnh đối diện của hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* (*Hình 73*).



Hình 73

Giải

Trong hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* có:

– Ba cặp mặt đối diện: (*ABCD*) và (*A'B'C'D'*); (*ABB'A'*) và (*DCC'D'*); (*ADD'A'*) và (*BCC'B'*).

– Sáu cặp cạnh đối diện: *AB* và *D'C'*; *BC* và *A'D'*; *CD* và *B'A'*; *DA* và *C'B'*; *AA'* và *CC'*; *BB'* và *DD'*.

– Bốn cặp đỉnh đối diện: *A* và *C'*; *B* và *D'*; *C* và *A'*; *D* và *B'*.

2 Hãy liệt kê các đường chéo của hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* (*Hình 73*).

2. Tính chất

4 Nêu nhận xét gì về hai mặt phẳng chứa hai mặt đối diện của hình hộp.

Hình hộp là một hình lăng trụ nên hình hộp có các tính chất của hình lăng trụ, ngoài ra:

- Các mặt của hình hộp là các hình bình hành.
- Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp song song với nhau.

Nhận xét: Ta có thể coi hai mặt đối diện bất kì của một hình hộp là hai mặt đáy của nó.

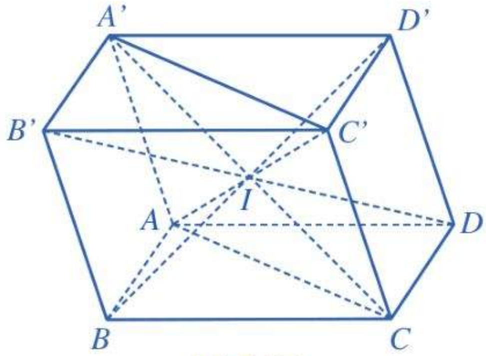
Ví dụ 3 Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Giải

Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* có các đường chéo *A'C*; *AC'*; *BD'* và *B'D* (*Hình 74*).

– Tứ giác $ACC'A'$ có $AA' \parallel CC'$ và $AA' = CC'$ (tính chất hình hộp) nên tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC' và $A'C$. Khi đó I là trung điểm của mỗi đường chéo AC' và $A'C$.

– Tương tự, hai tứ giác $A'B'CD$ và $BCD'A'$ cũng là các hình bình hành nên I là trung điểm của $B'D$ và BD'. Vậy các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



Hình 74

3 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng bốn mặt phẳng $(ABC'D')$, $(BCD'A')$, $(CDA'B')$, $(DAB'C')$ cùng đi qua một điểm.

BÀI TẬP

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(ACB') \parallel (A'C'D)$.

b) Gọi G_1, G_2 lần lượt là giao điểm của BD' với các mặt phẳng (ACB') và $(A'C'D)$. Chứng minh rằng G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ACB' và $A'C'D$.

c) Chứng minh rằng $BG_1 = G_1G_2 = D'G_2$.

2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AA', $C'D'$, AD'. Chứng minh rằng:

a) $NQ \parallel A'D'$ và $NQ = \frac{1}{2} A'D'$;

b) Tứ giác $MNQC$ là hình bình hành;

c) $MN \parallel (ACD')$;

d) $(MNP) \parallel (ACD')$.

3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và $A'B'$.

a) Chứng minh rằng $EF \parallel (BCC'B')$.

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng CF với mặt phẳng $(AC'B)$. Chứng minh rằng I là trung điểm đoạn thẳng CF.

§6 PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

Trong cuộc sống, chúng ta thường gặp bóng nắng của các vật trên mặt đất khi trời nắng. Chẳng hạn, bóng nắng của chiếc máy bay trên đường băng (*Hình 75*).

Vì các tia nắng được coi là song song với nhau nên bóng nắng của một vật gợi nên hình ảnh của vật đó qua phép chiếu song song trên mặt đất.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 75

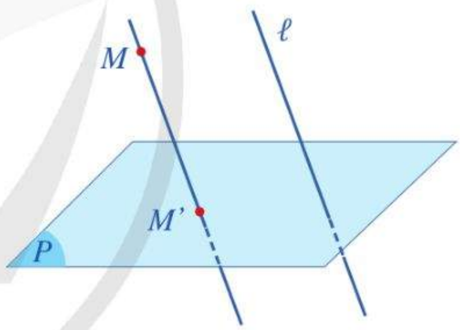
Thế nào là phép chiếu song song? Phép chiếu song song có tính chất gì?

I. PHÉP CHIẾU SONG SONG

1. Định nghĩa

1 Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P).

Qua mỗi điểm M trong không gian, có bao nhiêu đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng ℓ? Đường thẳng đó và mặt phẳng (P) có bao nhiêu điểm chung? (*Hình 76*)



Hình 76

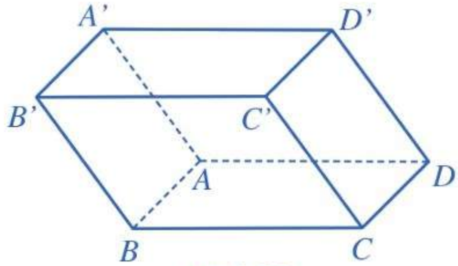
Ta có định nghĩa sau:

> Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) sao cho MM' song song hoặc trùng với ℓ gọi là *phép chiếu song song* lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ.

Mặt phẳng (P) gọi là *mặt phẳng chiếu*, đường thẳng ℓ gọi là *phương chiếu*, điểm M' gọi là *hình chiếu song song* (hoặc *ảnh*) của điểm M qua phép chiếu song song nói trên.

Cho hình $\mathscr{H}$. Tập hợp $\mathscr{H}'$ gồm hình chiếu song song của tất cả các điểm thuộc $\mathscr{H}$ gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của hình $\mathscr{H}$ qua phép chiếu song song nói trên.

Ví dụ 1 Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* (*Hình 77*). Xác định ảnh của các điểm *A'*, *B'*, *C'*, *D'* qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (*ABCD*) theo phương *A'A*.



Hình 77

Giải

Vì *ABCD.A'B'C'D'* là hình hộp nên các cạnh *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'* song song với nhau. Do đó, các điểm *A*, *B*, *C*, *D* lần lượt là ảnh của *A'*, *B'*, *C'*, *D'* qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (*ABCD*) theo phương *A'A*.

2. Tính chất

Ta đã biết: Hình chiếu song song của một đường thẳng là một điểm nếu đường thẳng đó song song hoặc trùng với phương chiếu ℓ. Tương tự như vậy, hình chiếu song song của một đoạn thẳng cũng là một điểm nếu đoạn thẳng đó song song (hoặc nằm trên) phương chiếu ℓ.

Vì thế, trong các tính chất dưới đây, ta chỉ xét hình chiếu song song của các các đường thẳng hoặc đoạn thẳng không song song và không trùng (hoặc nằm trên) phương chiếu ℓ.

1 Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* có *A'C'* cắt *B'D'* tại *O'*. Xác định ảnh của *O'* qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (*ABCD*) theo phương *A'A*.

2 *Hình 78* mô tả bóng nắng của một lan can cầu đường bộ trên mặt đường, tức là hình chiếu của lan can qua phép chiếu song song lên mặt đường. Thanh lan can gợi nên hình ảnh đường thẳng nối các điểm *A*, *B*, *C*, ở đó *B* nằm giữa *A* và *C*. Gọi các điểm *A'*, *B'*, *C'* lần lượt là bóng nắng của các điểm *A*, *B*, *C* trên mặt đường.

Hình 78

Quan sát *Hình 78* và cho biết:

a) Các điểm *A'*, *B'*, *C'* có thẳng hàng hay không. Nếu có, điểm *B'* có nằm giữa hai điểm *A'* và *C'* hay không;

b) Bóng nắng của thanh lan can là hình gì.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng; biến tia thành tia; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

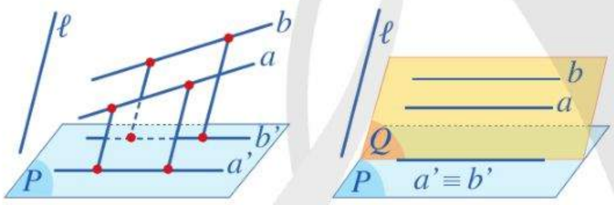
3 *Hình 79* mô tả bóng nắng của chiếc thang gỗ trên bức tường, tức là hình chiếu của chiếc thang đó qua phép chiếu song song lên bức tường. Các thanh gỗ ngang gợi nên hình ảnh các đường thẳng song song với nhau.

Quan sát *Hình 79* và cho biết bóng của các đường thẳng song song đó có là các đường thẳng song song hay không.

Hình 79
(Nguồn: https://shutterstock.com)

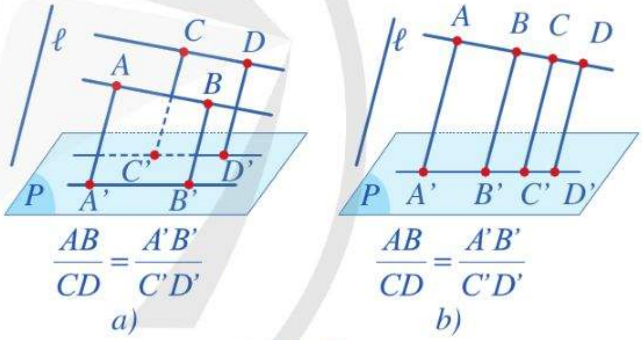
Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau (*Hình 80*, *Hình 81*):

- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



a) b)

Hình 80



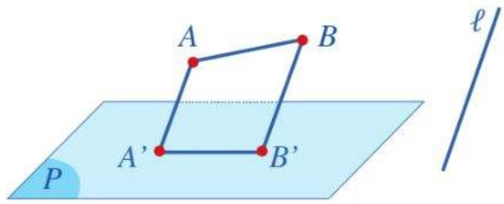
Hình 81

Ví dụ 2 Cho mặt phẳng (P), đoạn thẳng AB và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Giả sử đường thẳng AB không song song với ℓ. Nêu cách xác định hình chiếu song song của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ.

Giải

Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu song song của A, B trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ.

Khi đó, hình chiếu song song của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ là đoạn thẳng $A'B'$ (*Hình 82*).



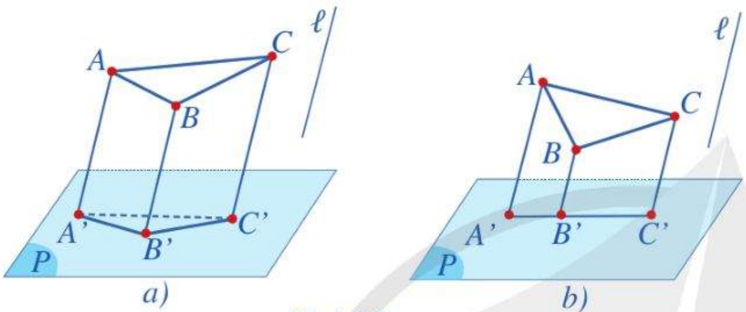
Hình 82

Ví dụ 3 Cho mặt phẳng (P), tam giác ABC và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng AB, BC, CA đều không song song hoặc trùng với đường thẳng ℓ. Xác định hình chiếu song song của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ trong mỗi trường hợp sau:

a) Mặt phẳng (ABC) không song song với ℓ;

b) Mặt phẳng (ABC) song song hoặc chứa ℓ.

Giải



Hình 83

Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu song song của ba điểm A, B, C trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ.

a) Hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác $A'B'C'$ (*Hình 83a*).

b) Ba điểm A', B', C' thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (P) nên ba điểm A', B', C' thẳng hàng và có một điểm nằm giữa hai điểm còn lại. Giả sử điểm B' nằm giữa hai điểm A' và C'. Khi đó, hình chiếu song song của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là đoạn thẳng $A'C'$ (*Hình 83b*).

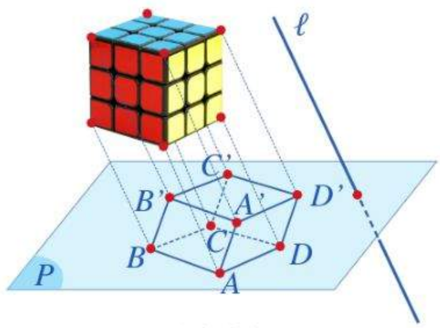
Chú ý: Đối với hình chiếu song song của đường tròn, người ta chứng minh được rằng: Hình chiếu song song của một đường tròn trên một mặt phẳng theo phương ℓ cho trước là một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

2 Cho mặt phẳng (P), hình bình hành $ABCD$ và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Xác định hình chiếu song song của hình bình hành $ABCD$ trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ biết rằng mặt phẳng $(ABCD)$ không song song với ℓ.

II. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

1. Khái niệm

4 Cho khối rubik không có điểm chung nào với mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Hãy xác định ảnh của khối rubik qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ (*Hình 84*).

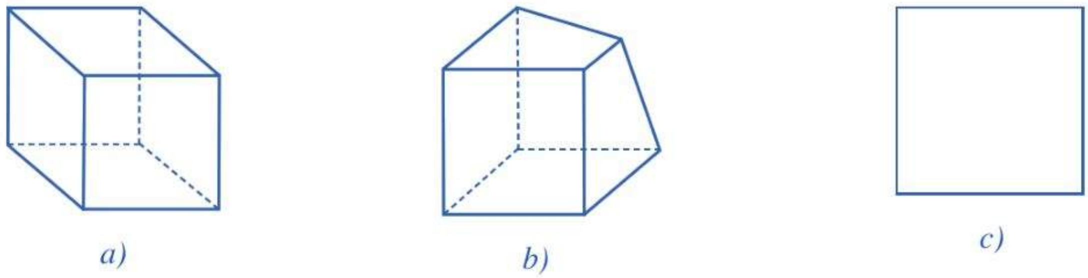


Hình 84

Hình biểu diễn của một hình $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathscr{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Chú ý: Muốn vẽ đúng hình biểu diễn của một hình không gian ta phải áp dụng các tính chất của phép chiếu song song.

Ví dụ 4 Trong các *Hình 85a*, *85b*, *85c*, hình nào biểu diễn cho hình lập phương?



Hình 85

Giải

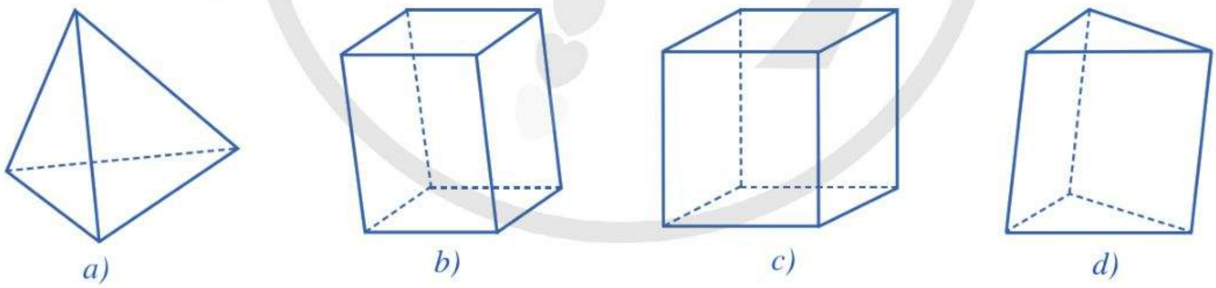
• *Hình 85a* là hình biểu diễn của hình lập phương.

• *Hình 85b* không là hình biểu diễn của hình lập phương vì trong hình này có hai cạnh đối của đáy trên không song song với nhau.

• *Hình 85c* cũng có thể là hình biểu diễn của hình lập phương. Tuy nhiên hình biểu diễn này không tốt vì không giúp ta hình dung được hình trong không gian.

2. Hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

Các hình sau đây thường được sử dụng làm hình biểu diễn của: hình tứ diện (*Hình 86a*); hình hộp (*Hình 86b*); hình hộp chữ nhật (*Hình 86c*); hình lăng trụ tam giác (*Hình 86d*).



Hình 86

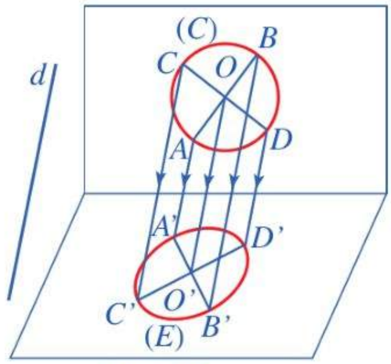
Chú ý

1) • Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tuỳ ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, …).

• Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tuỳ ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật, …).

• Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn cho một hình thang tuỳ ý cho trước, sao cho tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

• Ta thường dùng đường elip làm hình biểu diễn của đường tròn, tâm của elip biểu diễn cho tâm của đường tròn (*Hình 87*).



Hình 87

2) Phép chiếu song song nói chung không giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song (hay không cùng nằm trên một đường thẳng) và không giữ nguyên độ lớn của một góc. Từ đó suy ra nếu trên hình $\mathscr{H}$ có hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song thì tỉ số của chúng không nhất thiết phải giữ nguyên trên hình biểu diễn. Cũng như vậy, độ lớn của một góc trên hình $\mathscr{H}$ không nhất thiết được giữ nguyên trên hình biểu diễn.

BÀI TẬP

1. Trong các *Hình 88a*, *88b*, *88c*, hình nào là hình biểu diễn cho hình tứ diện?


a) *b)* *c)*

Hình 88

2. Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Xác định ảnh của tam giác *A'C'D'* qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (*ABCD*) theo phương *A'B*.

3. Vẽ hình biểu diễn của các vật trong *Hình 89* và *Hình 90*.


Hình 89


Hình 90

4. Vẽ hình biểu diễn của:

a) Một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn;

b) Một lục giác đều.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

1. Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi:

A. Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

B. Hai đường thẳng không có điểm chung.

C. Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.

D. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

2. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

3. Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi:

A. Đường thẳng đó song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.

B. Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.

C. Đường thẳng đó không có điểm chung với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.

D. Đường thẳng đó không có điểm chung với hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.

4. Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi:

A. Có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng còn lại.

B. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng.

C. Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.

D. Hai mặt phẳng không có điểm chung.

5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BD. Điểm P thuộc cạnh AC sao cho $PA = 2PC$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng MP với mặt phẳng (BCD).

b) Xác định giao điểm Q của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACD) với mặt phẳng (MNP).

d) Gọi I là giao điểm của MQ và NP, G là trọng tâm của tam giác ABD. Chứng minh rằng C, I, G thẳng hàng.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (AMN) với mỗi mặt phẳng sau:

a) (SCD); b) (SBC).

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB. Chứng minh rằng:

a) $MN \parallel (SCD)$;

b) $DM \parallel (SBC)$;

c) Lấy điểm I thuộc cạnh SD sao cho $\frac{SI}{SD} = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng: $SB \parallel (AIC)$.

8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy M, M' lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, $B'C'$; lấy các điểm G, G', K lần lượt thuộc các đoạn AM, $A'M'$, $A'B$ sao cho $\frac{AG}{AM} = \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{A'K}{A'B} = \frac{2}{3}$.

a) Chứng minh rằng $C'M \parallel (A'BM')$.

b) Chứng minh rằng $G'K \parallel (BCC'B')$.

c) Chứng minh rằng $(GG'K) \parallel (BCC'B')$.

d) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua K và song song với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (α) cắt cạnh CC' tại điểm I. Tính $\frac{IC}{IC'}$.

9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, $C'D'$.

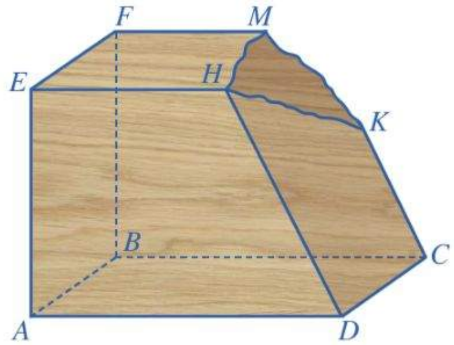
a) Chứng minh rằng $(A'DN) \parallel (B'CM)$.

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng $D'B$ với các mặt phẳng $(A'DN)$, $(B'CM)$. Chứng minh rằng $D'E = BF = \frac{1}{2}EF$.

10. Một khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD) \parallel (EFMH)$, $CK \parallel DH$. Khối gỗ bị hỏng một góc (*Hình 91*). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (R) đi qua K và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Hãy giúp bác thợ mộc xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ để cắt được chính xác.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm DH, BF với mặt phẳng (R). Biết $BF = 60$ cm, $DH = 75$ cm, $CK = 40$ cm. Tính FJ.



Hình 91

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
cấp số cộng	một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d, tức là: $u_n = u_{n-1} + d$ với $n \geq 2$. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng	49
cấp số nhân	một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q, tức là: $u_n = u_{n-1} . q$ với $n \geq 2$. Số q được gọi là công bội của cấp số nhân	53
dãy số hữu hạn	danh sách hữu hạn các số được viết theo một thứ tự nhất định	44
dãy số vô hạn	danh sách vô hạn các số được viết theo một thứ tự nhất định	44
đường thẳng song song với mặt phẳng	đường thẳng được gọi là song song với mặt phẳng nếu chúng không có điểm chung.	101
giới hạn của dãy số	dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $\|u_n\|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$	60
giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm	cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.	66
hai đường thẳng song song	hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung	96
hai mặt phẳng song song	hai mặt phẳng không có điểm chung	105
hàm số liên tục tại một điểm	hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và $x_0 \in (a\ ;\ b)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$	73
hình biểu diễn của một hình trong không gian	hình biểu diễn của một hình $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathscr{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó	117
phép chiếu song song	cho mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) sao cho MM' song song hoặc trùng với ℓ gọi là *phép chiếu song song* lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ.	114

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:

LÊ HUY ĐAN

Thiết kế sách:

PHAN THỊ LƯƠNG

Trình bày bìa:

NGUYỄN MẠNH HÙNG

Sửa bản in:

LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

TOÁN 11 - TẬP MỘT

Mã số:

ISBN: ....

In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ......

Địa chỉ: ....

Số xác nhận đăng kí xuất bản: ...-.../... /...-.../...

Quyết định xuất bản số: .... /....-... ngày ... /... /....

In xong và nộp lưu chiểu